GENERALIZAÇÃO DO MÉTODO DE PERTURBAÇÕES SINGULARES DE BIFURCAÇÃO

Leon Roque Sinay
Laboratório de Computação Científica - CNPq
Rio de Janeiro, Brasil

1. INTRODUÇÃO

Após o trabalho desenvolvido por Koiter [2], verificou-se em experiências de laboratório que alguns problemas, cujas formulações matemáticas podem ser caracterizadas como problemas de bifurcação, apresentam na realidade transições suaves a estados vizinhos aos das soluções teóricas.

Estas experiências mostram todavia que a diferença entre os modelos matemáticos e de teste é devida à presença de imperfeições nestes últimos. Levando em considerações estas imperfeições Matkowsky e Reiss [3] desenvolveram em 1977 o método de perturbações singulares de bifurcação, no qual as imperfeições reais são modeladas como pequenas perturbações impostas a um problema de bifurcação. Este método é válido quando a dimensão do núcleo da derivada de Frèchet do operador envolvido é um.

2. GENERALIZAÇÃO DO MÉTODO DE MATKOWSKY-REISS

Seja H um espaço de Hilbert com produto interno <;> e

$$G: H \times \mathbb{R}^3 \to H$$

no que segue um operador não-linear com as propriedades de diferenciabilidade necessárias.

Procuramos soluções $X(\lambda,\omega,\delta)$ em H da equação

$$G[x,\lambda,\omega,\delta] = 0 \qquad |\delta| << 1 \tag{1}$$

Seja

$$F[x,\lambda,\omega] = \lim_{\delta\to 0} G[x,\lambda,\omega,\delta]$$

Vamos supor que as soluções da equação

$$F[x,\lambda,\omega] = 0 \tag{2}$$

tendem ās soluções de (1) quando $\delta \to 0$.

Supõe-se:

H1: $F[0,\lambda,\omega] = 0 \quad \forall \lambda,\omega$

H2: Existe um par distinguido (λ_c,ω_c) e dois vetores linearmente independentes V_1 e V_2 satisfazendo

$$F_x^0 V_j = F_x^0[0,\lambda_c,\omega_c]V_j = 0 \qquad j=1,2 \quad .$$

Sejam V_j^+ $j=1,2$ soluções da equação

$$(F_x^0)^+ \dot{V} = 0$$

onde $(F_x^0)^+$ ē o operador adjunto de F_x^0 e

$$M(x,y) = \begin{bmatrix} x\langle F^0_{x\lambda}V_1;V_1^+\rangle + y\langle F^0_{x\lambda}V_2;V_1^+\rangle & x\langle F^0_{x\omega}V_1;V_1^+\rangle + y\langle F^0_{x\omega}V_2;V_1^+\rangle \\ x\langle F^0_{x\lambda}V_1;V_2^+\rangle + y\langle F^0_{x\lambda}V_2;V_2\rangle & x\langle F^0_{x\omega}V_1;V_2^+\rangle + y\langle F^0_{x\omega}V_2;V_2\rangle \end{bmatrix}$$

H3: A forma bilinear

$$\beta(x,y) = \det(M(x,y))$$

ē definida.

Então, para cada $\alpha \in [0,2\pi)$ existe uma solução X_1 de (2) dada parametricamente na forma

$$X_1 = \varepsilon(\cos\alpha\ V_1 + \sin\alpha\ V_2) + o(\varepsilon)$$

quando

$$\lambda = \lambda_c + \varepsilon\,\lambda_1(\alpha) + o(\varepsilon)$$

$$\omega = \omega_c + \varepsilon\,\omega_1(\alpha) + o(\varepsilon) \quad .$$

Pode-se demonstrar que se $\lambda_1(\alpha) \neq 0$ e $\omega_1(\alpha) \neq 0$ então existem duas possibilidades: ou $\omega_1(\alpha)/\lambda_1(\alpha)$ independe de α ou dado qualquer nū mero real estendido k ē sempre possīvel achar α tal que $\omega_1(\alpha)/\lambda_1(\alpha) = k$.

No caso particular em que $\omega_1(\alpha)/\lambda_1(\alpha)$ não depende de α, o mē todo de perturbações singulares de bifurcação pode ser generalizado viz-ã-viz usando coordenadas polares convenientes no espaço de parâmetros λ-ω, porém, a diferença do que acontece no problema unidimensional estudado por Matkowsky e Reiss, a continuação das soluções internas nas externas não é automática, devendo-se determinar a fase α em (3) em função da não homogeneidade.

BIBLIOGRAFIA

[1] Caprari, A.A., Estudio Teórico Experimental de Inestabilidad de Vigas Asociadas, Tese, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 1974.

[2] Koiter, W., Over de stabiliteit von het elastisch evenwicht (On the stability of elastic equilibrium), Tese, Delft,1945. Versão em inglês, NASA TT F-10, 833, 1967.

[3] Matkowsky, B.J. and Reiss, E.L., "Singular Perturbations of Bifurcation", SIAM Journal on Applied Mathematics, vol. 33, Sept. 1977, pp. 230-255.