



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA  
**INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS**

## **PROPAGAÇÃO DA ATITUDE DE SATÉLITES ARTIFICIAIS COM QUATÉRNIONS**

**RELATÓRIO FINAL DE PROJETO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA  
(PIBIC/CNPq/INPE)**

Marcela Frank da Silva (UNESP, Bolsista PIBIC/CNPq)  
Email: mfs1eletronica@yahoo.com.br

Dr. Valcir Orlando (CCS/INPE, Orientador)  
E-mail: valcir@ccs.inpe.br

Prof<sup>a</sup>. Dra. Maria Cecília F. P. S. Zanardi (DMA/UNESP, Co-orientadora)  
E-mail: cecilia@feg.unesp.br

Julho de 2008

**Relatório corrigido e aprovado.**

---

**Valcir Orlando**  
**Orientador**

---

**Maria Cecília F. P. S. Zanardi**  
**Co-orientadora**

---

**Marcela Frank da Silva**  
**Orientada**

## **AGRADECIMENTOS**

Ao CONSELHO NACIONAL DE PESQUISA E DESENVOLVIMENTO - CNPq  
pelo apoio financeiro recebido através da Bolsa de Iniciação Científica junto ao  
Programa PIBIC do INPE.

## RESUMO

O objetivo principal deste trabalho é analisar a influência conjunta do torque magnético residual, do torque magnético devido às correntes de Foucault, do torque de gradiente de gravidade e do torque aerodinâmico na atitude de satélites artificiais, utilizando o modelo de vetor de dipolo para o campo magnético terrestre, o modelo TD-88 para descrever a densidade atmosférica e os quatérnions para representar a orientação espacial do satélite. A contribuição deste trabalho em relação aos anteriores é a introdução do torque aerodinâmico através de um modelo simplificado e a determinação do intervalo de tempo para o qual a abordagem proposta é válida. As componentes de cada torque são determinadas no sistema principal de inércia do satélite, através da matriz de rotação em termos dos quatérnions e dos elementos orbitais. Simulações numéricas são realizadas para os Satélites Brasileiros de Coleta de Dados SCD1 e SCD2, considerando um caso inicial em que os dados de órbita e atitude são atualizados a cada 24 horas de propagação, isto é, em que a propagação é reinicializada com auxílio de dados reais dos satélites, utilizados como novas condições iniciais para propagação a partir de cada momento de atualização. Esses dados foram fornecidos pelo Centro de Rastreamento e Controle de Satélites (CRC) do INPE. Um segundo caso simulado, que não utiliza o processo de atualização de dados, foi também considerado de modo a permitir a determinação do intervalo de tempo de aplicação válido para a teoria desenvolvida. Os resultados são apresentados em termos da magnitude da velocidade de rotação, e da ascensão reta e declinação do eixo de rotação. As equações cinemáticas e dinâmicas foram integradas numericamente em termos das variações dos quatérnions e das componentes da velocidade de rotação. A inclusão do torque aerodinâmico à modelagem, em adição aos outros torques externos considerados mostrou um aumento da concordância dos resultados obtidos pela teoria com os dados fornecidos pelo CRC/INPE, mantendo os desvios dentro das faixas de precisão requeridas para os satélites SCD1 e SCD2, para um período de 24 horas de propagação, que é o período de atualização considerado no processo.

# **ATTITUDE PROPAGATION OF ARTIFICIAL SATELLITE WITH QUATERNIONS**

## **ABSTRACT**

The goal of this work is analyze the influence of residual magnetic torque, the eddy current torque, of the gravity gradient torque and the aerodynamic torque in the attitude of Artificial Satellites, using the dipolo vector model for the geomagnetic field and the TD-88 model to describe the atmospheric density. The satellite attitude is represented by the quaternions.

The principal contribution of this work in relation of the previous ones is the introduction of a simplified model for the aerodynamic torque and the determination of the time interval validation for the proposed approach. Components of each torque are determinated in the principal inertia system of the satellite, using the rotation matrix in terms of quaternions and of the orbital elements. Numeric simulations are realized for the spin stabilized Brazilian Satellites of Data Collect SCD1 and SCD2, considering an initial approach with update of orbit and attitude data every 24 hours with the data supplied by the INPE's Satellites Control Center.

A second approach, without the diary updated data, is also considered in order to allow the determination of the valid application interval for the developed theory. Results are showed in terms of the satellite's spin velocity, the right ascending and declination of the satellite spin axes. The cinematic and dynamic equations were numeric integrated in terms of the variation of quaternions and the components of spin velocity. Followed are determinated the behavior of the spin velocity, the right ascending and declination of the satellite spin axes. The approach with the four considered torques shows the agreement of the obtained results by the theory with the data supplied for the INPE's Satellite Control Center, and the deviations are within the required dispersion range.

## SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
LISTA DE FIGURAS.....	6
LISTA DE TABELAS.....	7
LISTA DE SÍMBOLOS.....	8
LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS.....	10
1 - INTRODUÇÃO.....	11
2 - DESENVOLVIMENTO.....	14
2.1 - Representação de atitude.....	14
2.1.1 - Sistemas de coordenadas.....	14
2.1.2 - Matriz de atitude.....	16
2.1.3 - Representação da atitude em termos dos quatérnions .....	18
2.2 - Elementos orbitais .....	19
2.3 - Equações do movimento.....	22
2.3.1 - Equações de Euler.....	23
2.3.2 - Equações cinemáticas em termos dos quatérnions.....	23
2.4 - Satélites estabilizados por rotação.....	24
2.5 - Torque gradiente de gravidade.....	26
2.6 - Torque magnético residual.....	27
2.7 – Torque devido às correntes de Foucault.....	28
2.8 – Torque Aerodinâmico.....	30
2.9 - Aplicações e resultados.....	32
2.9.1 – Abordagem com atualização de dados.....	34
2.9.1.1 – Simulações para o Satélite SCD1.....	34
2.9.1.1 A - Resultados para a Ascensão Reta.....	35
2.9.1.1 B – Resultados para a Declinação.....	38
2.9.1.1 C - Resultados para o Módulo da Velocidade de Rotação.....	41
2.9.1.2 - Simulações para o satélite SCD2.....	44
2.9.1.2 A- Resultados para a Ascensão Reta.....	45
2.9.1.2 B - Resultados para a Declinação.....	48
2.9.1.2 C - Resultados para o Módulo da Velocidade de Rotação.....	51
2.9.2 – Abordagem sem atualização de dados.....	54
2.9.2.1 – Simulação sem atualização dos dados iniciais para o satélite SCD1.....	54
2.9.2.2 – Simulação sem atualização dos dados iniciais para o satélite SCD2.....	55
CONCLUSÃO.....	57
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	60

## LISTA DE FIGURAS

2.1 - Representação do sistema equatorial $O'XYZ$ .....	15
2.2 - Representação da órbita de um satélite artificial, com alguns dos elementos orbitais.....	20
2.3 - Sistema Equatorial $(\hat{I}, \hat{J}, \hat{K})$ , orientação do eixo de rotação $(\hat{k})$ , ascensão reta $(\alpha)$ e declinação $(\delta)$ do eixo de rotação.....	25
2.4 – Variação das diferenças entre a ascensão reta do satélite SCD1 com a abordagem individual e simultânea dos torques.....	37
2.5 – Variação das diferenças da declinação do satélite SCD1 com a abordagem individual e simultânea dos torques.....	40
2.6 – Variação das diferenças entre o módulo da velocidade de rotação do satélite SCD1 com a abordagem individual e simultânea dos torques.....	43
2.7 – Variação das diferenças da ascensão reta do satélite SCD2 com a abordagem individual e simultânea dos torques.....	47
2.8 – Variação das diferenças entre a declinação reta do satélite SCD2 com a abordagem individual e simultânea dos torques.....	50
2.9 – Variação das diferenças entre o módulo da velocidade de rotação do satélite SCD2 com a abordagem individual e simultânea dos torques.....	53

## LISTA DE TABELAS

2.1 - Variações da ascensão reta do satélite SCD1 com a abordagem individual e simultânea dos torques.....	35
2.2 - Diferença dos resultados obtidos para a ascensão reta do satélite SCD1 com a abordagem individual e simultânea dos torques.....	36
2.3 - Variações da declinação do satélite SCD1 com a abordagem individual e simultânea dos torques.....	38
2.4 - Diferença dos resultados obtidos para a declinação do satélite SCD1 com a abordagem individual e simultânea dos torques.....	39
2.5 - Variações do módulo da velocidade de rotação do satélite SCD1 com a abordagem individual e simultânea dos torques.....	41
2.6 - Diferença dos resultados obtidos para o módulo da velocidade de rotação do satélite SCD1 com a abordagem individual e simultânea dos torques.....	42
2.7 - Variações da ascensão reta do satélite SCD2 com a abordagem individual e simultânea dos torques.....	45
2.8 - Diferença dos resultados obtidos para a ascensão reta do satélite SCD2 com a abordagem individual e simultânea dos torques.....	46
2.9 - Variações da declinação do satélite SCD2 com a abordagem individual e simultânea dos torques.....	48
2.10 - Diferença dos resultados obtidos para a declinação do satélite SCD2 com a abordagem individual e simultânea dos torques.....	49
2.11 - Variações do módulo da velocidade de rotação do satélite SCD2 com a abordagem individual e simultânea dos torques.....	51
2.12 - Diferença dos resultados obtidos para o módulo da velocidade de rotação do satélite SCD2 com a abordagem individual e simultânea dos torques.....	52
2.13 - Valores obtidos para a simulação sem atualização dos dados iniciais de 17/08/1993 para o satélite SCD1.....	54
2.14 - Valores obtidos para a simulação sem atualização dos dados iniciais para o dia 20/08/1993 do satélite SCD1.....	55
2.15 - Valores obtidos para a simulação sem atualização dos dados iniciais para o dia 12/2/2002satélite SCD2.....	56
2.16 - Valores obtidos para a simulação sem atualização dos dados iniciais para o dia 24/02/2002 do satélite SCD2.....	56



## LISTA DE SÍMBOLOS

$a$	- semi eixo maior
$\vec{B}$	- campo magnético terrestre local
$e$	- excentricidade
$f$	- anomalia verdadeira
$I$	- inclinação da órbita
$I_x, I_y$ e $I_z$	- momentos principais de inércia do satélite
$\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}$	- vetores unitários do sistema Inercial ou Equatorial
$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$	- vetores unitários no Sistema do Satélite
$\hat{i}_m, \hat{j}_m, \hat{k}_m$	- vetores unitários do Sistema Magnético
$l$	- módulo do vetor do momento magnético do campo terrestre
$M_x, M_y$ e $M_z$	- componentes dos torques externos atuantes no satélite no sistema do satélite
$\vec{M}$	- soma dos momentos magnéticos individuais do satélite
$M$	- matriz de Atitude ou Matriz de Rotação
$O$	- centro de massa do Satélite
$O'$	- centro de massa da Terra
$O'x_m y_m z_m$	- Sistema Magnético
$OXYZ$	- Sistema Equatorial
$Oxyz$	- Sistema do Satélite
$OZ$	- eixo de maior momento principal de inércia
$O'XYZ$	- Sistema Inercial
$P$	- coeficiente que depende da geometria do satélite e da condutividade do material.
$p, q$ e $r$	- componentes da velocidade de rotação no sistema do satélite.
$R_T$	- raio equatorial da Terra
$\vec{r}$	- vetor posição do centro de massa do satélite ao centro de massa da Terra
$w$	- argumento do perigeu
$W$	- módulo da velocidade de rotação
$WI$	- velocidade de rotação no sistema equatorial
$X, Y, Z$	- coordenadas de um vetor no sistema inercial

$x, y, z$	- coordenadas de um vetor no sistema de eixos principais
$\alpha$	- ascensão reta do eixo de rotação
$\delta$	- declinação do eixo de rotação
$\mu_0$	- permeabilidade do espaço livre
$\hat{k}_m$	- vetor unitário que descreve a direção do momento geomagnético
$\beta$	- inclinação do vetor de dipolo em relação ao eixo equatorial OZ
$\eta$	- argumento do nodo ascendente do equador geomagnético
$\phi$	- ângulo de rotação
$\Omega$	- longitude do nodo ascendente

## **LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS**

- UNESP - Universidade Estadual Paulista
- CRC - Centro de Rastreo e Controle
- INPE - Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais
- SCD1 - Primeiro Satélite de Coleta de Dados Brasileiro
- SCD2 - Segundo Satélite de Coleta de Dados Brasileiro
- CM - Centro de Massa
- TGG - Torque de Gradiente de Gravidade
- TA - Torque Aerodinâmico
- TM - Torque Magnético
- TI - Torque de Foucault
- TD-88 - Modelo para densidade atmosférica

## 1 INTRODUÇÃO

A grande diversidade de missões espaciais com fins meteorológicos, de telecomunicação, de sensoriamento remoto e científico, ambientais, entre outros, tem motivado as atividades de controle, propagação e determinação da atitude de satélites artificiais. Por este motivo, a interação entre fontes de campo magnético presentes no satélite e o campo magnético terrestre tem sido objeto de vários estudos, assim como a análise da influência da atmosfera terrestre e da força gravitacional no movimento rotacional e translacional do satélite.

A atitude de um satélite artificial representa a orientação no espaço, sendo a propagação do seu movimento rotacional analisada, com o objetivo de se conhecer a atitude em qualquer instante, a partir de condições iniciais conhecidas, considerando torques externos atuantes sobre o satélite.

O enfoque principal deste trabalho é determinar uma solução numérica para as equações dinâmicas e cinemáticas que descrevem o movimento rotacional do satélite, quando a influência de torques externos é incluída nas equações dinâmicas. Os torques externos considerados são o torque de gradiente de gravidade, o torque magnético residual, o torque devido às correntes de Foucault e o torque de origem aerodinâmica, sendo que suas componentes são incluídas conjuntamente nas equações do movimento. O campo magnético da Terra é descrito pelo modelo de vetor de dipolo inclinado, o modelo TD-88 (SEHNAL, POSPÍSILOVÁ, 1988) para descrever a densidade atmosférica, sendo a atitude do satélite descrita pelos quatérnions. Aplicações são realizadas para satélites estabilizados por rotação, considerando os dados dos Satélites Brasileiros de Coleta de Dados Ambientais, SCD1 e SCD2.

O torque magnético residual ocorre principalmente devido aos momentos magnéticos individuais do satélite e ao campo magnético terrestre. É a principal causa da deriva do eixo de rotação em satélites estabilizados por rotação.

O torque magnético devido às correntes de Foucault ocorre devido ao movimento de rotação do satélite e às correntes induzidas de Foucault que circulam por suas

superfícies metálicas. O principal efeito deste torque é o decaimento do módulo da velocidade de rotação do satélite.

O torque gradiente de gravidade é causado pela diferença na intensidade e direção da força gravitacional com que diferentes partes do satélite são atraídas pela Terra. As equações do movimento serão descritas pelas equações cinemáticas em termos de quatérnions e pelas equações de Euler, nas quais são incluídas as componentes dos torques para um satélite estabilizado por rotação.

O torque aerodinâmico ocorre devido à atuação do arrasto atmosférico na direção oposta à da velocidade orbital do satélite. A existência desse torque deve-se ao fato da força de arrasto atuar no centro de pressão do satélite, geralmente situado a uma certa distância do seu centro de massa.

Na integração das equações do movimento é utilizado o método de Runge - Kutta de 8ª ordem e são feitas simulações considerando os satélites SCD1 e SCD2, considerando diferentes intervalos de tempo.

Os resultados obtidos são comparados com os dados reais dos mencionados satélites fornecidos pelo CRC/ INPE.

Este trabalho está dando continuidade a trabalhos anteriores realizados por alunos de graduação e pós-graduação da FEG/UNESP. Uma análise do movimento rotacional de satélites estabilizados por rotação foi elaborada por Quirelli (2002), que considerou o modelo de vetor de dipolo para descrever o movimento rotacional, incluindo tanto o torque magnético residual quanto o torque magnético devido às correntes de Foucault. Real e Zanardi (2003) analisaram as magnitudes dos torques magnéticos utilizando tanto o modelo de quadripolo quanto o de dipolo para o campo magnético da Terra, com aplicações para satélites estabilizados por rotação. Rodrigues (2004) analisou a propagação da atitude de satélites artificiais, utilizando diferentes tipos de representação, na ausência de torques externos, enfatizando a importância da utilização da parametrização da atitude por quatérnions. Zanardi e Rodrigues (2004) investigaram a propagação da atitude de satélites artificiais utilizando quatérnion e incluindo o torque

de gradiente de gravidade nas equações do movimento. Estes autores analisaram também, neste mesmo trabalho, a propagação da atitude de satélites artificiais utilizando quatérnion, mas incluindo o torque magnético residual médio. Teixeira (2005) analisou a propagação de atitude incluindo o torque devido às correntes de Foucault, também utilizando os quatérnions. Sene (2008) estudou a influência individual do torque aerodinâmico e também a ação conjunta dos quatro torques já citados, com simulações considerando um intervalo de tempo de 24 horas. Seus resultados salientaram a contribuição de cada torque na deriva e precessão do eixo de rotação e no decaimento da velocidade de rotação.

Particularmente, o presente trabalho, enfatiza o estudo da influência conjunta do torque magnético devido às correntes de Foucault, do torque magnético residual, do torque de gradiente de gravidade e do torque aerodinâmico na atitude de satélites estabilizados por rotação, utilizando quatérnions para descrever a orientação espacial do satélite. Comparações da influência conjunta destes torques no módulo da velocidade de rotação do satélite e na ascensão reta e declinação do eixo de rotação do satélite são efetuadas, com auxílio dos já mencionados dados reais dos satélites SCD1 e SCD2. É também realizada uma validação da abordagem proposta executando simulações sem atualização periódica dos dados dos satélites e verificando até quando o erro médio obtido mantém-se dentro da faixa de precisão requerida para as missões dos satélites SCD1 e SCD2.

A abordagem inicial considerada no trabalho, associada com a propagação numérica com a atualização dos dados de órbita e atitude fornecidos pelo INPE foi realizada pelo ex-bolsista Leandro T. Sene, no período de agosto de 2007 a janeiro de 2008, cujos resultados parciais encontram-se registrados em seu relatório parcial datado de fevereiro de 2008. A segunda abordagem relacionada com a propagação numérica sem a atualização dos dados do satélites foi realizada por esta bolsista a partir de fevereiro de 2008, sendo que inicialmente foi desenvolvido um estudo teórico dos principais tópicos necessários para o desenvolvimento do projeto, incluindo a participação na 12ª. Escola de Verão em Dinâmica Orbital e Planetologia na FEG/UNESP, em fevereiro de 2008.

## **2 DESENVOLVIMENTO**

### **2.1 Representação de Atitude**

A atitude de um satélite artificial refere-se à sua orientação no espaço, ou seja, através da atitude pode-se conhecer a maneira como um veículo espacial se orienta. Para analisar a orientação do veículo espacial relacionamos um sistema de coordenadas fixo no centro de massa (CM) do satélite (o qual acompanha a orientação espacial e a rotação do satélite em torno de seu CM) e um sistema inercial, utilizando a matriz de rotação que relaciona estes dois sistemas. Os elementos da matriz de rotação podem ser obtidos por diferentes parametrizações, (MOORE e PISACANE, 1994; SHUSTER, 1993; ZANARDI E LOPES, 2000), tais como os ângulos de Euler, os quatérnions e as variáveis de Andoyer.

#### **2.1.1 Sistemas de coordenadas**

No sistema Inercial ( $O'XYZ$ ), a origem se encontra no CM da Terra ( $O'$ ) com o eixo Z apontando para o Pólo Norte terrestre. O plano XY coincidente com o plano do Equador e o eixo X na intersecção do plano do equador com a eclíptica, como mostra a figura 2.1. Seus vetores unitários são aqui representados por  $\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}$ .

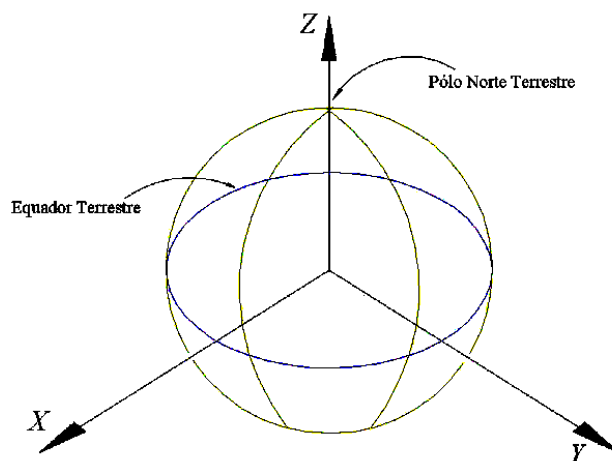


Figura 2.1 - Representação do sistema equatorial O'XYZ.

FONTE: Teixeira (2007)

No Sistema Equatorial (OXYZ), a origem se encontra no centro de massa do satélite (O), apresentando eixos paralelos aos eixos do sistema inercial. É tido como um sistema auxiliar e seus vetores unitários são também representados por  $\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}$ .

Já no Sistema de Eixos Principais (Oxyz) a origem se encontra no centro de massa do satélite, sendo que seus eixos coincidem com as direções dos eixos principais de inércia do satélite, sendo seus vetores unitários representados por  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ . É possível relacionar dois sistemas de coordenadas, sendo que para isso é necessário fazer uma mudança de coordenadas, utilizando a matriz de rotação.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

Em que M é denominada Matriz de Atitude, ou Matriz de Rotação, X, Y, Z são as coordenadas de um vetor no sistema inercial e x, y, z são as coordenadas deste mesmo vetor no sistema de eixos principais.



Neste trabalho o sistema que acompanha a rotação do satélite é o sistema de eixos principais de inércia, Oxyz, aqui denominado de Sistema do Satélite, e o sistema inercial é o Sistema Equatorial, OXYZ.

### 2.1.2 Matriz de Atitude

A matriz de atitude (ou matriz de rotação) é obtida pelas componentes dos vetores unitários  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  no sistema equatorial, podendo ser representado na matriz de atitude M por:

$$M = \begin{bmatrix} i_x & i_y & i_z \\ j_x & j_y & j_z \\ k_x & k_y & k_z \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Se a rotação ocorre apenas no eixo Z, obtêm-se uma matriz em função dos cossenos diretores, associados ao ângulo de rotação  $\phi$ :

$$M = R(\hat{z}, \phi) = \begin{bmatrix} \cos \phi & \text{sen} \phi & 0 \\ -\text{sen} \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

As matrizes de rotação em x e y são obtidas da mesma maneira e estão representadas abaixo:

$$M = R(\hat{x}, \phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \text{sen} \phi \\ 0 & -\text{sen} \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

$$M = R(\hat{y}, \phi) = \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 & -\text{sen} \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen} \phi & 0 & \cos \phi \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Quando a rotação de um ângulo qualquer  $\Phi$  ocorre num eixo qualquer  $(\hat{n})$ , a rotação é representada pela fórmula de Euler (SHUSTER, 1993):

$$M(\hat{n}, \phi) = \cos \Phi I + (1 - \cos \Phi) \hat{n} \hat{n}^t + \sin \Phi [[\hat{n}]] \quad (2.6)$$

em que  $I$  é a matriz identidade  $3 \times 3$ , e  $[[\hat{n}]]$  é a matriz anti-simétrica com as componentes de  $\hat{n}$ . Considerando o versor  $\hat{n}$  com as seguintes componentes:

$$\hat{n} = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Tem-se, então:

$$[[\hat{n}]] = \begin{bmatrix} 0 & n_3 & -n_2 \\ -n_3 & 0 & n_1 \\ n_2 & -n_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Assim pode-se obter as componentes da matriz de atitude associada a uma rotação num eixo qualquer  $\hat{n}$ :

$$M(\hat{n}, \Phi) = \begin{bmatrix} c + n_1^2(1-c) & n_2 n_1(1-c) - n_3 s & n_3 n_1(1-c) - n_2 s \\ n_2 n_1(1-c) - n_3 s & c + n_2^2(1-c) & n_3 n_2(1-c) - n_1 s \\ n_3 n_1(1-c) - n_2 s & n_3 n_2(1-c) - n_1 s & c + n_3^2(1-c) \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

Em que:  $c = \text{cosseno de } \Phi$  e  $s = \text{seno de } \Phi$ .

Conhecendo-se os elementos  $M(i, j)$  da matriz de rotação acima, podemos calcular o ângulo de rotação e o eixo de rotação, pelas seguintes expressões, respectivamente:

$$\cos \Phi = \frac{1}{2} (M(1,1) + M(2,2) + M(3,3) - 1) \quad (2.10)$$

e para  $\sin \Phi \neq 0$

$$\hat{n} = \frac{1}{2 \text{sen } \Phi} \begin{bmatrix} M(2,3) - M(3,2) \\ M(3,1) - M(1,3) \\ M(1,2) - M(2,1) \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

### 2.1.3 Representação da atitude em termos dos quatérnions

Para evitar as singularidades nas equações cinemáticas geradas pelos Ângulos de Euler, podemos utilizar os quatérnions. O quatérnion  $q$  é um vetor  $4 \times 1$ , sendo que as três primeiras componentes compõem sua parte vetorial e a quarta componente sua parte escalar:

$$q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{q} \\ q_4 \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

As componentes vetoriais ( $\vec{q}$ ) e escalar ( $q_4$ ) podem ser expressas em função do ângulo de rotação ( $\phi$ ) e do eixo de rotação  $\vec{n}$  :

$$q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \text{sen} \left( \frac{\phi}{2} \right) \vec{n} \quad e \quad q_4 = \cos \left( \frac{\phi}{2} \right) \quad (2.13)$$

É possível facilmente provar que o módulo do quatérnion é 1, visto que  $\hat{n}$  é um vetor unitário na direção do vetor velocidade de rotação. A matriz de atitude em termos dos quatérnions é representada por (SHUSTER, 1993):

$$A = (q_4^2 - |\vec{q}|^2)I + 2\vec{q}\vec{q}^T - 2q_4[[\vec{q}]]$$

$$A = \begin{bmatrix} q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & 2(q_1q_2 + q_4q_3) & 2(q_3q_1 - q_4q_2) \\ 2(q_2q_1 - q_4q_3) & -q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & 2(q_3q_2 + q_4q_1) \\ 2(q_3q_1 + q_4q_2) & 2(q_3q_2 - q_4q_1) & -q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

De forma simplificada:

$$A = \begin{bmatrix} q_A & q_D & q_G \\ q_B & q_E & q_H \\ q_C & q_F & q_I \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

Em que:

$$[[\bar{q}]] = \begin{bmatrix} 0 & q_3 & -q_2 \\ -q_3 & 0 & q_1 \\ q_2 & -q_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

Conhecendo-se os elementos  $A(i, j)$  da matriz de atitude  $A$ , obtém-se, para  $q_4 \neq 0$ , as componentes dos quatérnions (SHUSTER, 1993):

$$\begin{aligned} q_4 &= \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 + A(1,1) + A(2,2) + A(3,3)} \\ q_1 &= \frac{1}{4q_4} [A(2,3) - A(3,2)] \\ q_2 &= \frac{1}{4q_4} [A(3,1) - A(1,3)] \\ q_3 &= \frac{1}{4q_4} [A(1,2) - A(2,1)] \end{aligned} \quad (2.17)$$

Para o caso em que  $q_4=0$ , podem-se obter as componentes do quatérnion de outras maneiras (SHUSTER, 1993), visto que as equações (2.17) não são válidas neste caso.

## 2.2 Elementos orbitais

Um dos conceitos de grande importância quando se trabalha com veículos espaciais é o dos elementos orbitais, os quais caracterizam a posição do satélite no espaço. São eles:  $a$  (semi-eixo maior da órbita),  $e$  (excentricidade),  $I$  (inclinação da órbita),  $\Omega$  (longitude do nodo ascendente),  $w$  (argumento do perigeu) e  $f$  (anomalia verdadeira). A figura 2.2 apresenta a visualização dos elementos angulares  $I$ ,  $w$ ,  $\Omega$  e  $f$ .

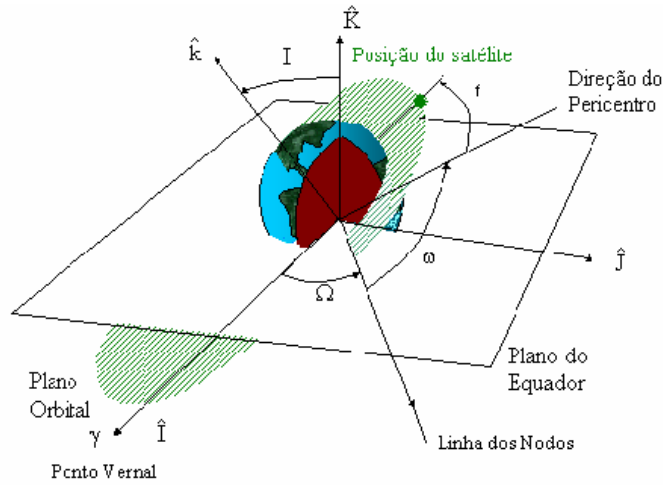


Figura 2.2 - Representação da órbita de um satélite artificial, com alguns dos elementos orbitais.

Na determinação das componentes do torque aerodinâmico e torque de gradiente de gravidade no sistema do satélite será necessário utilizar a matriz de rotação entre o Sistema Equatorial e o Sistema Orbital ( $Ox_oy_oz_o$ ), no qual o eixo  $x_o$  se alinha na direção do vetor posição do satélite, o eixo  $z_o$  na direção perpendicular ao plano orbital, com o eixo  $y_o$  formando um sistema dextrógero, com vetores unitários  $\vec{i}_o, \vec{j}_o, \vec{k}_o$ . O sistema orbital é obtido do sistema equatorial através de três rotações consecutivas:  $\Omega$  no eixo equatorial  $Z$ ,  $I$  no eixo intermediário  $x'$  e  $(w + f_0)$  no eixo orbital  $z_o$ , com a matriz de rotação  $R$  dada por (BATE et al., 1971; ZANARDI, 2005):

$$\begin{pmatrix} \vec{i}_o \\ \vec{j}_o \\ \vec{k}_o \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \vec{I} \\ \vec{J} \\ \vec{K} \end{pmatrix}$$

$$\text{sendo } R = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

$$R_{11} = \cos(w + f_0)\cos(\Omega) - \sin(w + f_0)\cos(I)\sin(\Omega) \quad (2.19)$$

$$R_{12} = \cos(w + f_0)\sin(\Omega) + \sin(w + f_0)\cos(I)\cos(\Omega) \quad (2.20)$$

$$R_{13} = \sin(w + f_0)\sin(I) \quad (2.21)$$

$$R_{21} = -\sin(w + f_0)\cos(\Omega) - \cos(w + f_0)\cos(I)\sin(\Omega) \quad (2.22)$$

$$R_{22} = -\sin(w + f_0)\sin(\Omega) + \cos(w + f_0)\cos(I)\cos(\Omega) \quad (2.23)$$

$$R_{23} = \cos(w + f_0)\sin(I) \quad (2.24)$$

$$R_{31} = \sin(I)\sin(\Omega) \quad (2.25)$$

$$R_{32} = -\sin(I)\cos(\Omega) \quad (2.26)$$

$$R_{33} = \cos(I) \quad (2.27)$$

Em que:  $I$  é a inclinação da órbita,  $w$  é o argumento do perigeu,  $f_0$  é a anomalia verdadeira e  $\Omega$  é a longitude do nodo ascendente.

A relação entre o sistema orbital e do satélite é dada por (SENE, 2008).

$$\bar{A} = AR^t = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

Com  $A$  dada em (2.15) e cada elemento de  $\bar{A}$  é dado, então, por:

$$a_{11} = q_A R_{11} + q_D R_{12} + q_G R_{13} \quad (2.29)$$

$$a_{12} = q_A R_{21} + q_D R_{22} + q_G R_{23} \quad (2.30)$$

$$a_{13} = q_A R_{31} + q_D R_{32} + q_G R_{33} \quad (2.31)$$

$$a_{21} = q_B R_{11} + q_E R_{12} + q_H R_{13} \quad (2.32)$$

$$a_{22} = q_B R_{21} + q_E R_{22} + q_H R_{23} \quad (2.33)$$

$$a_{23} = q_B R_{31} + q_E R_{32} + q_H R_{33} \quad (2.34)$$

$$a_{31} = q_C R_{11} + q_F R_{12} + q_I R_{13} \quad (2.35)$$

$$a_{32} = q_C R_{21} + q_F R_{22} + q_I R_{23} \quad (2.36)$$

$$a_{33} = q_C R_{31} + q_F R_{32} + q_I R_{33} \quad (2.37)$$

### 2.3 Equações do movimento

O movimento rotacional de um veículo espacial é descrito por equações dinâmicas e cinemáticas. As equações dinâmicas são também denominadas de equações de Euler e apresentam relações entre as componentes dos torques externos e a variação das componentes da velocidade de rotação. As equações cinemáticas apresentam as relações entre as componentes da velocidade e o quatérnio de atitude (ou os ângulos de Euler), que determinam a orientação do satélite no espaço.

Para determinar a variação da atitude com o tempo é necessário integrar estas equações. Os torques atuantes sobre o satélite dependem de uma forma não linear da orientação deste no espaço e assim estes dois grupos de equações se interagem, dificultando sua integração analítica.

Os torques ambientais atuantes sobre o veículo espacial são de pequena magnitude e como atuam permanentemente sobre o satélite precisam ser considerados e modelados cuidadosamente, de modo a melhor representar as condições ambientais as quais os veículos estão sujeitos. Neste trabalho os torques externos a serem incluídos são o torque de gradiente de gravidade e os torques magnéticos devido às correntes de Foucault, residual e torque aerodinâmico.

### 2.3.1 Equações de Euler

As taxas de variação das componentes da velocidade de rotação podem ser obtidas a partir das equações dinâmicas (ZANARDI, 1990; WERTZ, 1978):

$$\begin{aligned}\dot{p} &= \frac{M_x}{I_x} + \left( \frac{I_y - I_z}{I_x} \right) \cdot q \cdot r \\ \dot{q} &= \frac{M_y}{I_y} + \left( \frac{I_z - I_x}{I_y} \right) \cdot p \cdot r \\ \dot{r} &= \frac{M_z}{I_z} + \left( \frac{I_x - I_y}{I_z} \right) \cdot p \cdot q\end{aligned}\tag{2.38}$$

em que:  $I_x$ ,  $I_y$  e  $I_z$  são os momentos principais de inércia do satélite,  $M_x$ ,  $M_y$  e  $M_z$  são as componentes dos torques externos atuantes no satélite no sistema do satélite e  $p$ ,  $q$  e  $r$  são as componentes da velocidade de rotação no sistema do satélite.

### 2.3.2 Equações cinemáticas em termos dos quatérnions

As equações cinemáticas que descrevem a taxa de variação das componentes do quatérnion de atitude, devido à rotação do satélite, são dadas por (PISACANE; MOORE, 1994):

$$\begin{aligned}\dot{q}_1 &= \frac{1}{2} [p \cdot q_4 - q \cdot q_3 + r \cdot q_2] \\ \dot{q}_2 &= \frac{1}{2} [q \cdot q_4 - r \cdot q_1 + p \cdot q_3] \\ \dot{q}_3 &= \frac{1}{2} [r \cdot q_4 - p \cdot q_2 + q \cdot q_1] \\ \dot{q}_4 &= \frac{1}{2} [p \cdot q_1 + q \cdot q_2 + r \cdot q_3]\end{aligned}\tag{2.39}$$

Nas equações cinemáticas com os quatérnions, não existe a possibilidade de ocorrer um denominador nulo, o que evita as singularidades, como as que ocorrem nos Ângulos de Euler (ZANARDI, 2001; SHUSTER, 1993).



Os torques aqui abordados dependerão dos elementos da matriz de atitude que relaciona o sistema do satélite com o sistema equatorial. Deste modo, as equações de Euler e dos Quatérnions se interagem, formando um sistema de sete equações diferenciais. Na determinação da solução destas equações será considerado o movimento orbital descrito pelo movimento kepleriano (BATE et al., 1971). Quando não se consideram os torques externos atuantes no satélite artificial, as equações (2.38) e (2.39) tornam-se desacopladas. Neste caso, observa-se que o vetor velocidade de rotação descreve um movimento cônico em torno do eixo de simetria do veículo espacial (ZANARDI, 2005).

Quando o satélite não é simétrico, a componente da velocidade angular de rotação em Oz também terá uma variação periódica (ZANARDI, 2005).

#### **2.4 Satélites estabilizados por rotação**

Os satélites estabilizados por rotação possuem o eixo de rotação ao longo do eixo de maior momento principal de inércia (OZ) o que caracteriza uma estabilidade do movimento rotacional. As coordenadas esféricas que descrevem a atitude do satélite são o módulo da velocidade de rotação ( $W$ ), e a ascensão reta ( $\alpha$ ) e a declinação ( $\delta$ ) do eixo de rotação do satélite, como mostra a figura 2.3.

Estas coordenadas esféricas podem ser determinadas utilizando-se os quatérnions e as componentes da velocidade de rotação no sistema do satélite. Sejam a velocidade de rotação no sistema equatorial e no sistema do satélite dadas respectivamente por:

$$\vec{W}_I = P\hat{I} + Q\hat{J} + R\hat{K} \quad (2.40)$$

$$\vec{W} = p\hat{i} + q\hat{j} + r\hat{k} \quad (2.41)$$

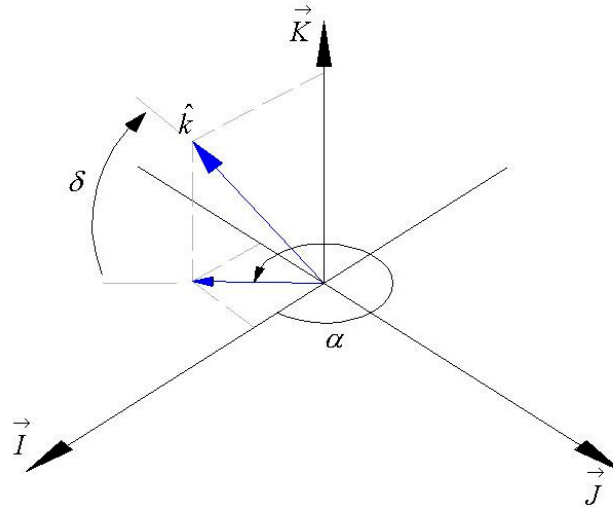


Figura 2.3 - Sistema Equatorial ( $\hat{I}, \hat{J}, \hat{K}$ ), orientação do eixo de rotação ( $\hat{k}$ ), ascensão reta ( $\alpha$ ) e declinação ( $\delta$ ) do eixo de rotação.

A velocidade de rotação no sistema equatorial se relaciona com a velocidade de rotação no sistema do satélite através da matriz de rotação em termos dos quatérnion dada em (2.14). Tem-se então:

$$\vec{W}_I = A^t \vec{W} \Rightarrow \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix} = A^t \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \quad (2.42a)$$

Em que:

$$\begin{aligned} P &= (q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + q_4^2)p + 2q(q_2q_1 - q_4q_3) + 2r(q_3q_1 + q_4q_2) \\ Q &= 2p(q_1q_2 + q_4q_3) + (-q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 + q_4^2)q + 2r(q_3q_2 - q_4q_1) \\ R &= 2p(q_3q_1 - q_4q_2) + 2q(q_3q_2 + q_4q_1) + (-q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 + q_4^2)r \end{aligned} \quad (2.42b)$$

O módulo da velocidade de rotação é dado por:

$$W = (p^2 + q^2 + r^2)^{\frac{1}{2}} \quad (2.43)$$

Pela figura 2.3., em termos da ascensão reta ( $\alpha$ ) e declinação ( $\delta$ ) do eixo de rotação, as componentes da velocidade de rotação no sistema equatorial são dadas por:

$$\begin{aligned} P &= W \cos \delta \cos (360^\circ - \alpha) \Rightarrow P = W \cos \delta \cos \alpha \\ Q &= -W \cos \delta \sin (360^\circ - \alpha) \Rightarrow Q = W \cos \delta \sin \alpha \\ R &= W \sin \delta \end{aligned} \quad (2.44a)$$

De modo que a ascensão reta ( $\alpha$ ) e a declinação ( $\delta$ ) do eixo de rotação do satélite são determinadas por:

$$\begin{aligned} \sin \delta &= \frac{R}{W} \quad \text{com } 0 \leq \delta \leq 90^\circ \\ \cos \alpha &= \frac{P}{W \cos \delta} \quad \text{com } 0 \leq \alpha \leq 360^\circ \\ \sin \alpha &= \frac{Q}{W \cos \delta} \end{aligned} \quad (2.44b)$$

## 2.5 Torque Gradiente de Gravidade

O torque gradiente de gravidade ocorre devido à força gravitacional atrair cada elemento infinitesimal de massa do satélite com uma determinada intensidade e direção.

Uma vez que cada elemento possui o vetor posição em relação ao centro de massa da Terra, logo, concluímos que essa diferença de atração em cada elemento de massa gera um torque, o qual é chamado de *Torque Gradiente de Gravidade*.

A força gravitacional em relação ao elemento ( $dm$ ) é dada por (MOORE; PISACANE, 1994):

$$d\vec{F} = -\mu dm \frac{\vec{r}_T}{r_T^3} \quad (2.45)$$

Em que:

$$\mu = 3,986 \times 10^{14} [m^3/s^2] - \text{constante gravitacional da Terra;}$$

$\vec{r}_T$  = vetor posição do ( $dm$ ) em relação ao  $CM$  da Terra.

Se  $\vec{r}_o$  é o vetor posição do elemento de massa ( $dm$ ) em relação ao  $CM$  do satélite, o torque em relação ao centro de massa do satélite é:

$$d\vec{N}_G = \vec{r}_o \times d\vec{F} \quad (2.46)$$

Realizando o produto vetorial, desenvolvendo os cálculos com a integração e as devidas adequações com a aplicação da matriz de rotação que relaciona os sistemas de coordenadas, chega-se, então, no torque com suas componentes dadas no sistema do satélite (SENE, 2008):

$$\vec{N}_G = 3 \frac{\mu}{r'^3} \left[ a_{21}a_{31}(I_z - I_y)\vec{i} + a_{11}a_{31}(I_x - I_z)\vec{j} + a_{11}a_{21}(I_y - I_x)\vec{k} \right] \quad (2.47)$$

Em que:  $r'$  é o módulo do vetor posição que liga o centro de massa do satélite ao centro de massa da Terra,  $I_x$ ,  $I_y$  e  $I_z$ , os momentos principais de inércia do satélite e os elementos  $a_{11}$ ,  $a_{21}$  e  $a_{31}$  são dados em termos dos quatérnions de atitude e dos elementos orbitais angulares, apresentados respectivamente em (2.29), (2.32) e (2.35).

## 2.6 Torque magnético residual

O torque de origem magnética atuante em um satélite artificial resulta da interação entre o campo magnético do satélite e o campo geomagnético.

As principais fontes causadoras do torque magnético são o momento magnético do satélite, as correntes de Foucault e a histerese, sendo o momento magnético do satélite usualmente a fonte dominante.

O torque residual ocorre principalmente devido ao momento magnético ao longo do eixo de rotação do satélite (WERTZ, 1978) que contribui para uma lenta precessão do eixo de rotação e pode ser obtido por:

$$\vec{N}_R = \vec{M}_S \times \vec{B} \quad (2.48)$$

Em que:  $\vec{B}$  é o campo magnético terrestre local e  $\vec{M}_S$  é a soma dos momentos magnéticos individuais do satélite. Esses momentos individuais são resultantes dos equipamentos eletrônicos que estão a bordo do satélite.

As componentes deste torque foram desenvolvidas por SENE (2008), considerando o momento magnético alinhado ao longo do eixo de rotação do satélite, e no sistema do satélite são dadas por:

$$\vec{N}_R = -B_y M_S \vec{i} + B_x M_S \vec{j} \quad (2.49)$$

Em que:

$$N_{R_x} = -B_y M_S \quad (2.50)$$

$$N_{R_y} = B_x M_S \quad (2.51)$$

$$N_{R_z} = 0 \quad (2.52)$$

## 2.7 Torque devido às correntes de Foucault

Este torque ocorre devido ao movimento de rotação do satélite e às correntes induzidas de Foucault que circulam pelas superfícies metálicas do satélite causando um decaimento de perfil exponencial da velocidade de rotação. Tal torque pode ser descrito por (WERTZ, 1978):

$$\vec{N}_F = P_F \vec{B} \times \left( \vec{B} \times \vec{W}_{sat} \right) \quad (2.53)$$

Em que:  $\vec{W}_{sat}$  é a velocidade angular de rotação,  $\vec{B}$  é o campo magnético terrestre local e  $P_F$  é um coeficiente que depende da geometria do satélite e da condutividade do material, também chamado de Parâmetro de Foucault.

O campo magnético terrestre pode ser expresso como o gradiente de um potencial escalar de um dipolo magnético (WERTZ, 1978). Ao vetor de dipolo está associado o Sistema Magnético, que se relaciona com o Sistema Equatorial através dos ângulos  $\beta$  e  $\eta$  que definem a orientação do vetor de dipolo, sendo  $\beta$  a inclinação do vetor de dipolo em relação ao eixo equatorial  $Z$  e  $\eta$  o argumento do nodo ascendente do equador geomagnético.

As componentes deste torque foram desenvolvidas por Teixeira (2005), considerando o satélite estabilizado por rotação (velocidade alinhada ao eixo de maior momento de inércia), e no sistema do satélite são dadas por:

$$\vec{N}_F = N_{F_x} \vec{i} + N_{F_y} \vec{j} + N_{F_z} \vec{k} \quad (2.54)$$

Onde:

$$N_{F_x} = P_F [B_y(B_x q - B_y p) - B_z(B_z p - B_x r)] \quad (2.55)$$

$$N_{F_y} = P_F [B_z(B_y r - B_z q) - B_x(B_x q - B_y p)] \quad (2.56)$$

$$N_{F_z} = P_F [B_x(B_z p - B_x r) - B_y(B_y r - B_z q)] \quad (2.57)$$

Em que:

$B_x$ ,  $B_y$  e  $B_z$  são os componentes do campo magnético terrestre  $\vec{B}$  e  $p$ ,  $q$  e  $r$  são os componentes da velocidade de rotação do satélite.

## 2.8 Torque Aerodinâmico

As forças aerodinâmicas são frutos da colisão das moléculas de ar rarefeito da alta-atmosfera com a superfície do satélite. Estas forças atuam em um ponto chamado centro de pressão (*CP*). A distância entre o centro de pressão (*CP*) e o centro de massa (*CM*) do satélite é chamada de margem estática (*me*). Quando a margem estática (*me*) não é nula, um torque pode ser produzido pela força aerodinâmica atuante no satélite, sendo esta distância utilizada para computar o chamado torque aerodinâmico.

Desprezando as forças laterais atuantes no satélite, a força aerodinâmica pode ser decomposta em:

Força de arrasto  $\left(\vec{D}\right)$  – atua na direção e no sentido contrário ao da velocidade  $\left(\vec{v}\right)$  do corpo;

Força de sustentação  $\left(\vec{D}_s\right)$  – atua na direção perpendicular à velocidade  $\left(\vec{v}\right)$  do corpo em movimento.

O torque aerodinâmico surge porque a força aerodinâmica não é aplicada no centro de massa do satélite. Para que este torque se anule, em geral se aplicam dispositivos de controle, que fazem com que o satélite se encontre em uma posição de equilíbrio. Se o satélite não é controlado, o momento em relação ao centro de massa do satélite fará com que o satélite oscile, de modo que a força de sustentação mudará de direção, sendo o valor de sua resultante igual à zero.

Deste modo neste trabalho será considerado o torque aerodinâmico oriundo apenas da força de arrasto. Como dito anteriormente, este torque surge quando o centro de pressão (*CP*) não coincide com o centro de massa (*CM*) do satélite e pode ser representado por (VILHENA DE MORAES, 1978):

$$\vec{N}_A = me \times \vec{D} \quad (2.58)$$

Como neste trabalho está sendo dada uma abordagem inicial à análise do torque aerodinâmico, por simplificação a margem estática será assumida fixa, sendo as componentes  $me_x$  e  $me_y$  definidas em função do raio do satélite e a componente  $me_z$  em termos do comprimento do satélite.

A direção da força de arrasto ( $\vec{D}$ ) que age no satélite está na direção oposta à velocidade orbital.

Para determinar o módulo da Força de Arrasto Atmosférico deve-se partir de evidências experimentais (VILHENA DE MORAES, 1978). Então, verifica-se que o arrasto ( $D$ ) é função da densidade do fluido ( $\rho_s$ ), da área da seção transversal ( $S$ ), da velocidade ( $v$ ) do corpo em relação ao meio, da viscosidade do fluido ( $\eta_s$ ) e da velocidade de propagação do som ( $v_{som}$ ), podendo ser representado com:

$$D = \frac{1}{2} \rho_s v^2 S C_D \quad (2.59)$$

com  $C_D$  sendo o coeficiente de arrasto. Neste trabalho  $C_D = 2.2$ , a densidade do fluido ( $\rho_s$ ) é descrita pelo modelo de densidade TD – 88 (SEHNAL; POSPÍSILOVÁ, 1988) e a velocidade do corpo em relação ao meio ( $v$ ) é dada para a atmosfera estática e obtida a partir da Energia Mecânica Específica (BATE; MUELLER; WHITE, 1971).

Desenvolvendo os cálculos chegamos às componentes do arrasto no Sistema do Satélite (SENE, 2008):

$$\vec{D} = \left\{ \begin{array}{l} -D[a_{11} \cos(\gamma_s) + a_{12} \text{sen}(\gamma_s)]\vec{i} - D[a_{21} \cos(\gamma_s) + a_{22} \text{sen}(\gamma_s)]\vec{j} \\ D[a_{31} \cos(\gamma_s) + a_{32} \text{sen}(\gamma_s)]\vec{k} \end{array} \right\} \quad (2.60)$$

ou ainda

$$\vec{D} = D_x \vec{i} + D_y \vec{j} + D_z \vec{k} \quad (2.61)$$



com os elementos  $a_{11}$ ,  $a_{12}$ ,  $a_{21}$ ,  $a_{22}$ ,  $a_{31}$  e  $a_{32}$  dados em função dos quatérnions e dos elementos orbitais angulares, e dados em (2.29), (2.30), (2.32), (2.33), (2.34) e (2.35), e o ângulo ( $\gamma_s$ ) sendo o ângulo formado entre o vetor posição do satélite e o vetor velocidade orbital.

Do produto vetorial dado em (2.58) temos as componentes do torque aerodinâmico no Sistema do Satélite:

$$N_{Ax} = D_z m e_y - D_y m e_z \quad (2.62)$$

$$N_{Ay} = D_x m e_z - D_z m e_x \quad (2.63)$$

$$N_{Az} = D_y m e_x - D_x m e_y \quad (2.64)$$

## 2.9 Aplicações e Resultados

Nesta seção, apresentam-se as aplicações da teoria desenvolvida para os satélites brasileiros SCD1 e SCD2. Estes satélites são estabilizados por rotação e, por esse motivo, adequados para testar, através de simulações, o desenvolvimento teórico realizado no trabalho. Além disso, os resultados obtidos podem ser comparados com dados reais dos satélites que, como já enfatizado, foram disponibilizados para os testes da teoria pelo CRC/INPE.

Devido à complexidade das equações cinemáticas em termos dos quatérnions dadas em (2.39) e das equações dinâmicas associadas com as taxas de variações das componentes da velocidade de rotação ( $p$ ,  $q$ ,  $r$ ), dadas em (2.38), é necessário realizar uma integração numérica utilizando o método de Runge - Kutta de oitava ordem.

Um caso inicial é considerado, no qual é aplicada uma atualização dos dados de órbita e atitude a cada 24 horas, no processo de propagação de atitude, a partir de dados reais dos satélites. Um segundo caso, que não utiliza o processo de atualização de dados, é também analisado de modo a permitir a determinação do intervalo de aplicação válido para a teoria desenvolvida.

No primeiro caso, dados reais dos satélites SCD1 e SCD2 são usados como condições iniciais, vinculados às componentes da velocidade angular de rotação  $p_0$ ,  $q_0$  e  $r_0$ , ascensão reta ( $\alpha$ ) e declinação ( $\delta$ ) do eixo de rotação do satélite. Os resultados são apresentados em tabelas que mostram a comparação entre os resultados obtidos para o movimento rotacional livre de torques externos e para o caso em que os torques são incluídos individual e conjuntamente nas equações do movimento.

A linguagem de programação utilizada neste trabalho, para a realização das simulações, foi o *FORTRAN*. As simulações foram realizadas para um período de 17 dias para o satélite SCD1, e um período de 16 dias para o satélite SCD2, considerando a taxa de uma atualização a cada 24 horas a partir dos dados reais dos satélites. Deve-se destacar que o período simulado, para o qual se dispõe dos conjuntos de dados reais dos satélites, foi executada uma manobra de correção da atitude para o SCD2, no dia 24/02/2002, cujos efeitos, logicamente, estão refletidos pelo conjunto de dados reais correspondentes.

Os resultados são apresentados em termos da magnitude da velocidade de rotação, da ascensão reta e da declinação do eixo de rotação.

A análise dos resultados é feita através da comparação dos resultados da propagação com os dados reais do satélite fornecidos pelo CRC/INPE. Neste processo utiliza-se a média e o desvio padrão dos erros de propagação. O cálculo da média é importante, pois, no caso da propagação sem atualização dos dados, ela é utilizada como parâmetro para determinar o intervalo de validade da abordagem realizada. Este intervalo está associado ao período de simulação em que as precisões se mantêm menores que 0,1 rpm para a velocidade de rotação e que 0,5° para a média do erro em ascensão e declinação do eixo de rotação, valores estes que satisfazem aos requisitos operacionais do CCS/INPE para as missões dos satélites SCD1 e SCD2.

Para a determinação do intervalo de validade da propagação foram realizadas simulações para um período de até três dias para o SCD1 e de até onze dias para o satélite SCD2, sem considerar a atualização dos dados, a partir dos dados reais, a cada 24 horas.

Os resultados estão apresentados em forma de tabelas e gráficos. As tabelas apresentam os valores reais fornecidos pelo CRC/INPE e os resultados obtidos nas simulações a cada 24 horas para a magnitude da velocidade de rotação do satélite ( $W$ ), a ascensão reta ( $\alpha$ ) e declinação ( $\delta$ ) do eixo de rotação do satélite, indicando também as diferenças entre estes dois valores. Os gráficos apresentam as diferenças entre os valores reais e os simulados para o primeiro caso.

### **2.9.1 Abordagem com atualização de dados**

Os resultados aqui apresentados foram obtidos pelo bolsista anterior, Leandro Teixeira Ferreira de Sene, sendo que os resultados parciais já foram apresentados em seu relatório parcial de fevereiro de 2008. Para os satélites SCD1 e SCD2 a magnitude do torque magnético residual não é significativa (SENE, 2008), de modo que a ordem de grandeza de sua influência é desprezível perante a dos demais torques. Assim as tabelas com os resultados não apresentam a influência individual do torque residual na magnitude da velocidade de rotação, na ascensão reta e na declinação do eixo de rotação.

#### **2.9.1.1 Simulações para o satélite SCD1**

O comportamento da ascensão reta é apresentado nas tabelas 2.1 e 2.2 e na figura 2.4. A média do erro para todos os casos considerados manteve-se menor que  $0,5^\circ$ , que é a precisão requerida pelo CRC/INPE para as missões do SCD1 e SCD2.

O comportamento da declinação do eixo de rotação é apresentado nas tabelas 2.3 e 2.4 e figura 2.5, com o erro médio com os quatro torques simultâneos também se mantendo dentro da faixa de precisão das missões do SCD1 e SCD2, ou seja, menor que  $0,5^\circ$ .

Os resultados para a velocidade de rotação estão apresentados nas tabelas 2.5 e 2.6 e figura 2.6. As tabelas não incluem os resultados das simulações com a inclusão isolada do torque aerodinâmico, pois a velocidade de rotação sofre apenas pequenas variações periódicas, mantendo-se a influência deste torque em ordem inferior a dos demais torques. Observa-se que a menor média do erro e o menor desvio padrão é para a ação conjunta dos 4 torques, apresentando uma precisão da ordem de  $0,1 [rpm]$ .

### 2.9.1.1. A Resultados para a Ascensão Reta

Tabela 2.1 - Variações da ascensão reta do satélite SCD1 com a abordagem individual e simultânea dos torques.

Ascensão Reta [graus]						
Dias	Valores iniciais fornecidos pelo CCS/Inpe	Valores obtidos sem a influência de torques externos	Valores incluindo o torque gradiente de gravidade	Valores incluindo o torque devido às correntes de Foucault	Valores incluindo o torque aerodinâmico	Valores incluindo os quatro torques simultaneamente
17/8/1993	280,090	280,090	280,090	280,090	280,090	280,090
18/8/1993	281,010	280,090	279,907	280,350	280,067	280,140
19/8/1993	281,740	281,010	280,869	281,270	280,967	281,078
20/8/1993	282,240	281,740	281,639	281,970	281,720	281,855
21/8/1993	282,570	282,240	282,176	282,460	282,257	282,416
22/8/1993	282,700	282,570	282,539	282,770	282,610	282,779
23/8/1993	282,670	282,700	282,699	282,870	282,735	282,902
24/8/1993	283,500	282,670	282,710	282,820	282,668	282,846
25/8/1993	283,010	283,500	283,556	283,630	283,485	283,667
26/8/1993	282,430	283,010	283,085	283,120	283,009	283,189
27/8/1993	281,010	282,430	282,522	282,520	282,428	282,606
28/8/1993	281,010	281,010	281,119	281,070	281,029	281,202
29/8/1993	280,180	281,010	281,128	281,060	281,055	281,221
30/8/1993	279,290	280,180	280,308	280,240	280,195	280,358
31/8/1993	278,340	279,290	279,426	279,310	279,289	279,450
1/9/1993	277,360	278,340	278,482	278,360	278,361	278,523
2/9/1993	276,340	277,360	277,506	277,380	277,355	277,518

Tabela 2.2 - Diferença dos resultados obtidos para a ascensão reta do satélite SCD1 com a abordagem individual e simultânea dos torques.

<b>Diferença entre os valores obtidos e os fornecidos pelo CCS/Inpe [graus]</b>					
<b>Dias</b>	<b>Valores obtidos sem a influência de torques externos</b>	<b>Valores incluindo o torque gradiente de gravidade</b>	<b>Valores incluindo o torque devido às correntes de Foucault</b>	<b>Valores incluindo o torque aerodinâmico</b>	<b>Valores incluindo os quatro torques simultaneamente</b>
17/8/1993	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
18/8/1993	0,920	1,103	0,660	0,943	0,870
19/8/1993	0,730	0,871	0,470	0,773	0,662
20/8/1993	0,500	0,601	0,270	0,520	0,385
21/8/1993	0,330	0,394	0,110	0,313	0,154
22/8/1993	0,130	0,161	-0,070	0,090	-0,079
23/8/1993	-0,030	-0,029	-0,200	-0,065	-0,232
24/8/1993	0,830	0,790	0,680	0,832	0,654
25/8/1993	-0,490	-0,546	-0,620	-0,475	-0,657
26/8/1993	-0,580	-0,655	-0,690	-0,579	-0,759
27/8/1993	-1,420	-1,512	-1,510	-1,418	-1,596
28/8/1993	0,000	-0,109	-0,060	-0,019	-0,192
29/8/1993	-0,830	-0,948	-0,880	-0,875	-1,041
30/8/1993	-0,890	-1,018	-0,950	-0,905	-1,068
31/8/1993	-0,950	-1,086	-0,970	-0,949	-1,110
1/9/1993	-0,980	-1,122	-1,000	-1,001	-1,163
2/9/1993	-1,020	-1,166	-1,040	-1,015	-1,178
<b>Média do erro</b>	-0,221	-0,251	-0,341	-0,225	-0,374
<b>Desvio Padrão</b>	0,733	0,823	0,667	0,741	0,761

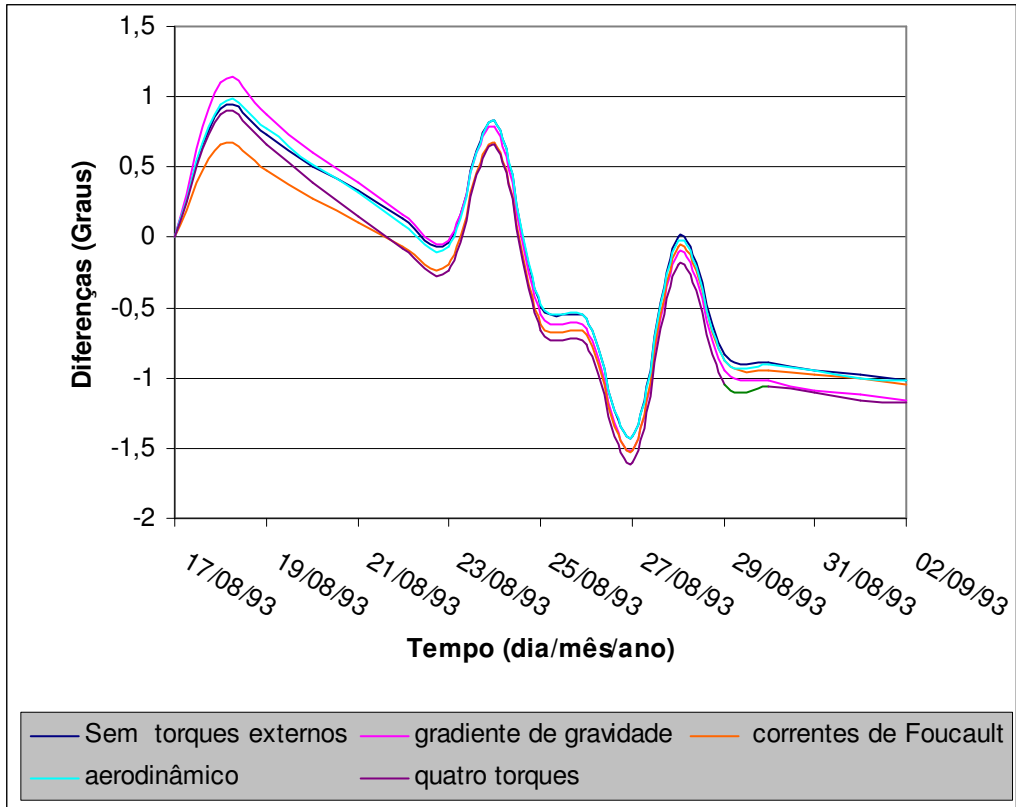


Figura 2.4 – Variação das diferenças entre a ascensão reta do satélite SCD1 com a abordagem individual e simultânea dos torques.

### 2.9.1.1.B Resultados para a Declinação

Tabela 2.3 - Variações da declinação do satélite SCD1 com a abordagem individual e simultânea dos torques.

Declinação [graus]						
Dias	Valores iniciais fornecidos pelo CCS/Inpe	Valores obtidos sem a influência de torques externos	Valores incluindo o torque gradiente de gravidade	Valores incluindo o torque devido às correntes de Foucault	Valores incluindo o torque aerodinâmico	Valores incluindo os quatro torques simultaneamente
17/8/1993	81,100	81,100	81,100	81,100	81,100	81,100
18/8/1993	80,820	81,100	81,155	81,110	81,099	81,167
19/8/1993	80,530	80,820	80,876	80,830	80,815	80,880
20/8/1993	80,230	80,530	80,587	80,530	80,527	80,588
21/8/1993	79,930	80,230	80,287	80,230	80,234	80,291
22/8/1993	79,640	79,930	79,986	79,930	79,926	79,978
23/8/1993	79,350	79,640	79,694	79,630	79,630	79,678
24/8/1993	79,220	79,350	79,401	79,340	79,349	79,392
25/8/1993	78,950	79,220	79,269	79,210	79,220	79,258
26/8/1993	78,700	78,950	78,995	78,940	78,948	78,981
27/8/1993	78,700	78,700	78,742	78,700	78,702	78,731
28/8/1993	78,270	78,700	78,738	78,690	78,696	78,722
29/8/1993	78,080	78,270	78,303	78,260	78,258	78,280
30/8/1993	77,910	78,080	78,108	78,070	78,077	78,094
31/8/1993	77,780	77,910	77,933	77,900	77,913	77,927
1/9/1993	77,670	77,780	77,798	77,770	77,781	77,789
2/9/1993	77,580	77,670	77,682	77,660	77,671	77,670

Tabela 2.4 - Diferença dos resultados obtidos para a declinação do satélite SCD1 com a abordagem individual e simultânea dos torques.

<b>Diferença entre os valores obtidos e os fornecidos pelo CCS/Inpe [graus]</b>					
<b>Dias</b>	<b>Valores obtidos sem a influência de torques externos</b>	<b>Valores incluindo o torque gradiente de gravidade</b>	<b>Valores incluindo o torque devido às correntes de Foucault</b>	<b>Valores incluindo o torque aerodinâmico</b>	<b>Valores incluindo os quatro torques simultaneamente</b>
<b>17/8/1993</b>	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
<b>18/8/1993</b>	-0,280	-0,335	-0,290	-0,279	-0,347
<b>19/8/1993</b>	-0,290	-0,346	-0,300	-0,285	-0,350
<b>20/8/1993</b>	-0,300	-0,357	-0,300	-0,297	-0,358
<b>21/8/1993</b>	-0,300	-0,357	-0,300	-0,304	-0,361
<b>22/8/1993</b>	-0,290	-0,346	-0,290	-0,286	-0,338
<b>23/8/1993</b>	-0,290	-0,344	-0,280	-0,280	-0,328
<b>24/8/1993</b>	-0,130	-0,181	-0,120	-0,129	-0,172
<b>25/8/1993</b>	-0,270	-0,319	-0,260	-0,270	-0,308
<b>26/8/1993</b>	-0,250	-0,295	-0,240	-0,248	-0,281
<b>27/8/1993</b>	0,000	-0,042	0,000	-0,002	-0,031
<b>28/8/1993</b>	-0,430	-0,468	-0,420	-0,426	-0,452
<b>29/8/1993</b>	-0,190	-0,223	-0,180	-0,178	-0,200
<b>30/8/1993</b>	-0,170	-0,198	-0,160	-0,167	-0,184
<b>31/8/1993</b>	-0,130	-0,153	-0,120	-0,133	-0,147
<b>1/9/1993</b>	-0,110	-0,128	-0,100	-0,111	-0,119
<b>2/9/1993</b>	-0,090	-0,102	-0,080	-0,091	-0,090
<b>Média do erro</b>	-0,207	-0,247	-0,202	-0,205	-0,239
<b>Desvio Padrão</b>	0,118	0,130	0,119	0,116	0,132



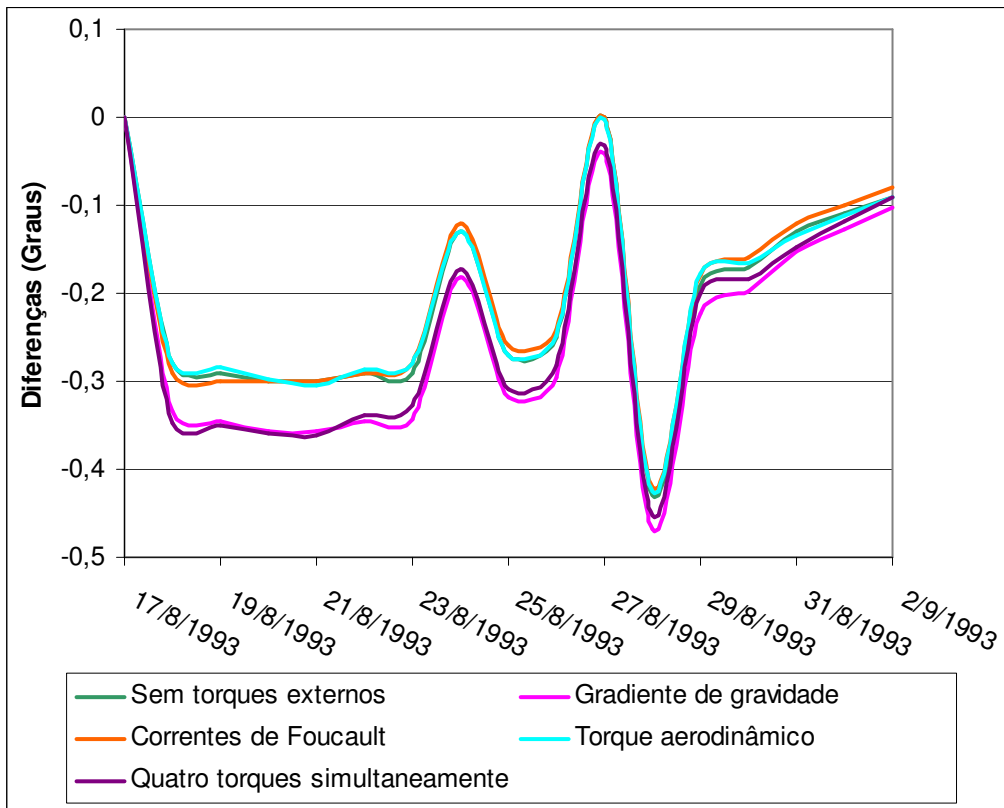


Figura 2.5 – Variação das diferenças da declinação do satélite SCD1 com a abordagem individual e simultânea dos torques.

### 2.9.1.1.C Resultados para o Módulo da Velocidade de Rotação

Tabela 2.5 - Variações do módulo da velocidade de rotação do satélite SCD1 com a abordagem individual e simultânea dos torques.

<b>Módulo da Velocidade de Rotação [rpm]</b>					
<b>Dias</b>	<b>Valores iniciais fornecidos pelo CCS/Inpe</b>	<b>Valores obtidos sem a influência de torques externos</b>	<b>Valores incluindo o torque gradiente de gravidade</b>	<b>Valores incluindo o torque devido às correntes de Foucault</b>	<b>Valores incluindo os quatro torques simultaneamente</b>
<b>17/8/1993</b>	87,060	87,060	87,060	87,060	87,060
<b>18/8/1993</b>	86,880	87,060	87,060	86,900	86,901
<b>19/8/1993</b>	86,710	86,880	86,880	86,730	86,726
<b>20/8/1993</b>	86,540	86,710	86,710	86,570	86,566
<b>21/8/1993</b>	86,370	86,540	86,540	86,400	86,403
<b>22/8/1993</b>	86,210	86,370	86,370	86,240	86,244
<b>23/8/1993</b>	86,040	86,210	86,210	86,100	86,101
<b>24/8/1993</b>	85,880	86,040	86,040	85,940	85,937
<b>25/8/1993</b>	85,800	85,880	85,880	85,780	85,790
<b>26/8/1993</b>	85,730	85,800	85,800	85,730	85,720
<b>27/8/1993</b>	85,580	85,730	85,730	85,660	85,658
<b>28/8/1993</b>	85,580	85,580	85,580	85,580	85,523
<b>29/8/1993</b>	85,510	85,580	85,580	85,530	85,530
<b>30/8/1993</b>	85,440	85,510	85,510	85,460	85,467
<b>31/8/1993</b>	85,370	85,440	85,440	85,400	85,403
<b>1/9/1993</b>	85,310	85,370	85,370	85,330	85,332
<b>2/9/1993</b>	85,240	85,310	85,310	85,260	85,265

Tabela 2.6 - Diferença dos resultados obtidos para o módulo da velocidade de rotação do satélite SCD1 com a abordagem individual e simultânea dos torques.

<b>Diferença entre os valores obtidos e os fornecidos pelo CCS/Inpe [rpm]</b>				
<b>Dias</b>	<b>Valores obtidos sem a influência de torques externos</b>	<b>Valores incluindo o torque gradiente de gravidade</b>	<b>Valores incluindo o torque devido às correntes de Foucault</b>	<b>Valores incluindo os quatro torques simultaneamente</b>
17/8/1993	0,000	0,000	0,000	0,000
18/8/1993	-0,180	-0,180	-0,020	-0,021
19/8/1993	-0,170	-0,170	-0,020	-0,016
20/8/1993	-0,170	-0,170	-0,030	-0,026
21/8/1993	-0,170	-0,170	-0,030	-0,033
22/8/1993	-0,160	-0,160	-0,030	-0,034
23/8/1993	-0,170	-0,170	-0,060	-0,061
24/8/1993	-0,160	-0,160	-0,060	-0,057
25/8/1993	-0,080	-0,080	0,020	0,010
26/8/1993	-0,070	-0,070	0,000	0,010
27/8/1993	-0,150	-0,150	-0,080	-0,078
28/8/1993	0,000	0,000	0,000	0,057
29/8/1993	-0,070	-0,070	-0,020	-0,020
30/8/1993	-0,070	-0,070	-0,020	-0,027
31/8/1993	-0,070	-0,070	-0,030	-0,033
1/9/1993	-0,060	-0,060	-0,020	-0,022
2/9/1993	-0,070	-0,070	-0,020	-0,025
<b>Média do erro</b>	-0,107	-0,107	-0,025	-0,022
<b>Desvio Padrão</b>	0,062	0,062	0,025	0,031

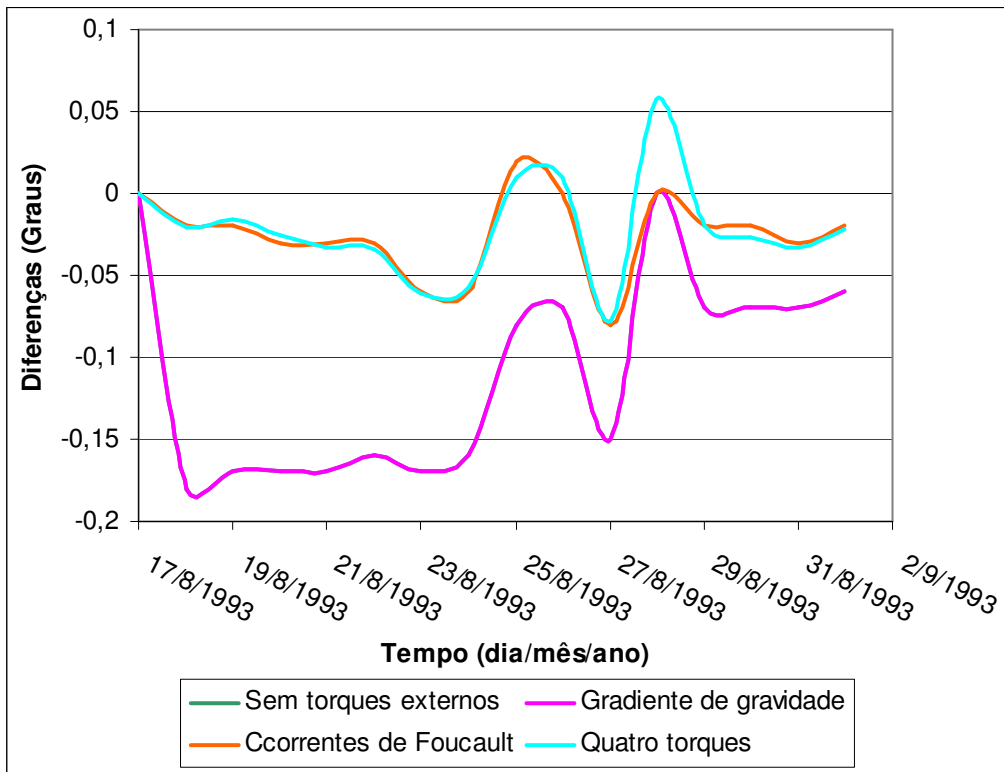


Figura 2.6 – Variação das diferenças entre o módulo da velocidade de rotação do satélite SCD1 com a abordagem individual e simultânea dos torques.

### **2.9.1.2 Simulações para o satélite SCD2**

Os resultados das simulações para o SCD2 estão apresentados nas tabelas 2.7 a 2.12 e Figuras 2.7 a 2.9, tendo apresentado bons resultados para as três variáveis em questão.

Salientando-se que no período de simulação considerado houve uma atuação do controle de atitude no dia 24/02/2002.

A ascensão reta apresentou um dos menores desvios padrões. Dentro das abordagens, a abordagem conjunta é a que gerou um dos menores erros médios para as 3 variáveis e um dos menores desvios para a declinação, apesar da influência negativa de alguns torques em determinados dias do período estudado.

Pelo comportamento da velocidade de rotação, apresentado nas tabelas 2.11 e 2.12, verifica-se que o menor erro médio ocorreu para ação conjunta dos 4 quatro torques, mantendo a precisão na faixa de  $0,1[rpm]$ . Nas tabelas 2.11 e 2.12 não estão inclusos os resultados das simulações com a inclusão isolada do torque aerodinâmico, pois a velocidade de rotação sofre apenas pequenas variações periódicas, mantendo-se a influência deste torque em ordem inferior a dos demais torques, assim como no SCD1.

### 2.9.1.2.A Resultados para a Ascensão Reta

Tabela 2.7 - Variações da ascensão reta do satélite SCD2 com a abordagem individual e simultânea dos torques.

Ascensão Reta [graus]						
Dias	Valores iniciais fornecidos pelo CCS/Inpe	Valores obtidos sem a influência de torques externos	Valores incluindo o torque gradiente de gravidade	Valores incluindo o torque devido às correntes de Foucault	Valores incluindo o torque aerodinâmico	Valores incluindo os quatro torques simultaneamente
12/2/2002	278,710	278,710	278,710	278,710	278,710	278,710
13/2/2002	278,730	278,710	278,686	278,730	278,707	278,707
14/2/2002	278,740	278,730	278,709	278,740	278,729	278,717
15/2/2002	278,740	278,740	278,719	278,740	278,740	278,711
16/2/2002	278,720	278,740	278,715	278,720	278,739	278,689
17/2/2002	278,680	278,720	278,688	278,680	278,725	278,652
18/2/2002	278,630	278,680	278,638	278,620	278,688	278,590
19/2/2002	278,570	278,630	278,576	278,560	278,634	278,509
20/2/2002	278,500	278,570	278,501	278,480	278,564	278,413
21/2/2002	278,420	278,500	278,414	278,410	278,477	278,301
22/2/2002	278,330	278,420	278,316	278,330	278,401	278,204
23/2/2002	278,230	278,330	278,207	278,230	278,340	278,122
24/2/2002	276,600	276,600	276,600	276,600	276,600	276,600
25/2/2002	276,420	276,600	276,432	276,520	276,607	276,361
26/2/2002	276,200	276,420	276,234	276,420	276,418	276,162
27/2/2002	275,940	276,200	275,995	276,140	276,171	275,907

Tabela 2.8 - Diferença dos resultados obtidos para a ascensão reta do satélite SCD2 com a abordagem individual e simultânea dos torques.

<b>Diferença entre os valores obtidos e os fornecidos pelo CCS/Inpe [graus]</b>					
<b>Dias</b>	<b>Valores obtidos sem a influência de torques externos</b>	<b>Valores incluindo o torque gradiente de gravidade</b>	<b>Valores incluindo o torque devido às correntes de Foucault</b>	<b>Valores incluindo o torque aerodinâmico</b>	<b>Valores incluindo os quatro torques simultaneamente</b>
12/2/2002	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
13/2/2002	0,020	0,044	0,000	0,023	0,023
14/2/2002	0,010	0,031	0,000	0,011	0,023
15/2/2002	0,000	0,021	0,000	0,000	0,029
16/2/2002	-0,020	0,005	0,000	-0,019	0,031
17/2/2002	-0,040	-0,008	0,000	-0,045	0,028
18/2/2002	-0,050	-0,008	0,010	-0,058	0,040
19/2/2002	-0,060	-0,006	0,010	-0,064	0,061
20/2/2002	-0,070	-0,001	0,020	-0,064	0,087
21/2/2002	-0,080	0,006	0,010	-0,057	0,119
22/2/2002	-0,090	0,014	0,000	-0,071	0,126
23/2/2002	-0,100	0,023	0,000	-0,110	0,108
24/2/2002	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
25/2/2002	-0,180	-0,012	-0,100	-0,187	0,059
26/2/2002	-0,220	-0,034	-0,220	-0,218	0,038
27/2/2002	-0,260	-0,055	-0,200	-0,231	0,033
<b>Média do erro</b>	-0,071	0,001	-0,029	-0,068	0,050
<b>Desvio Padrão</b>	0,084	0,024	0,075	0,080	0,040

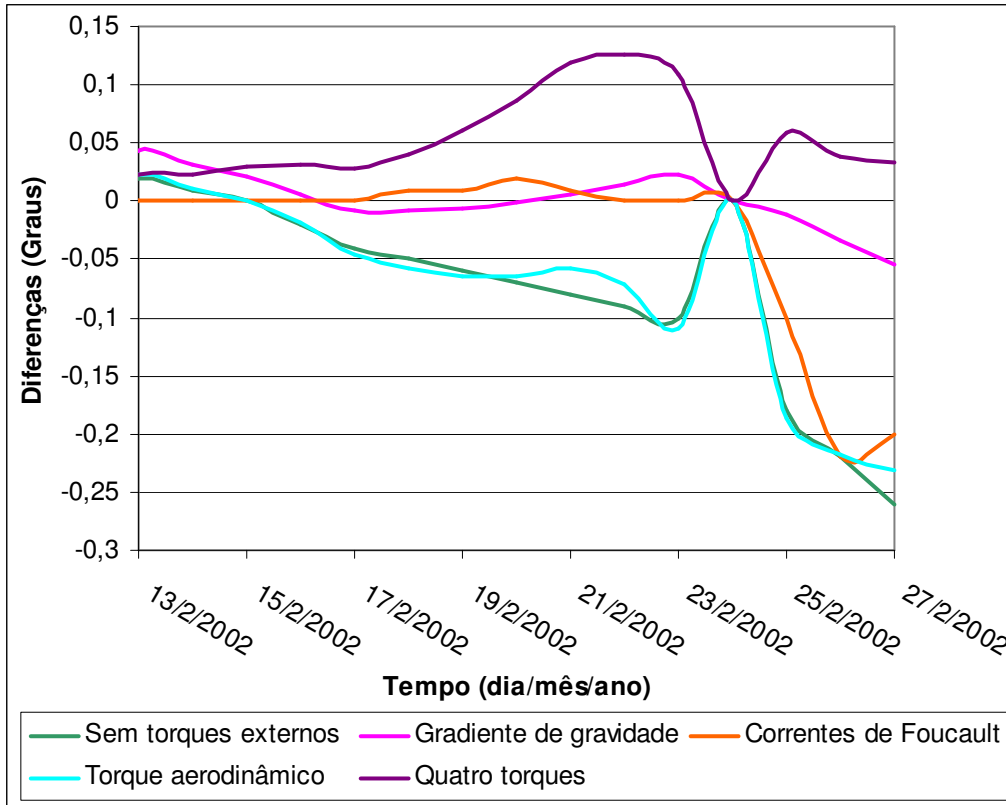


Figura 2.7 – Variação das diferenças da ascensão reta do satélite SCD2 com a abordagem individual e simultânea dos torques.



### 2.9.1.2.B Resultados para a Declinação

Tabela 2.9 - Variações da declinação do satélite SCD2 com a abordagem individual e simultânea dos torques.

Declinação [graus]						
Dias	Valores iniciais fornecidos pelo CCS/Inpe	Valores obtidos sem a influência de torques externos	Valores incluindo o torque gradiente de gravidade	Valores incluindo o torque devido às correntes de Foucault	Valores incluindo o torque aerodinâmico	Valores incluindo os quatro torques simultaneamente
12/2/2002	63,470	63,470	63,470	63,470	63,470	63,470
13/2/2002	63,450	63,470	63,492	63,440	63,471	63,468
14/2/2002	63,420	63,450	63,457	63,420	63,436	63,416
15/2/2002	63,390	63,420	63,412	63,380	63,415	63,378
16/2/2002	63,360	63,390	63,367	63,360	63,393	63,342
17/2/2002	63,330	63,360	63,322	63,330	63,372	63,306
18/2/2002	63,310	63,330	63,278	63,300	63,351	63,274
19/2/2002	63,290	63,310	63,244	63,290	63,317	63,230
20/2/2002	63,270	63,290	63,212	63,270	63,279	63,184
21/2/2002	63,250	63,270	63,181	63,260	63,263	63,162
22/2/2002	63,240	63,250	63,152	63,240	63,252	63,145
23/2/2002	63,230	63,240	63,134	63,230	63,245	63,135
24/2/2002	61,220	61,220	61,220	61,220	61,220	61,220
25/2/2002	61,030	61,220	61,105	61,220	61,227	61,117
26/2/2002	60,830	61,030	60,912	61,040	61,025	60,914
27/2/2002	60,620	60,830	60,711	60,840	60,827	60,716

Tabela 2.10 - Diferença dos resultados obtidos para a declinação do satélite SCD2 com a abordagem individual e simultânea dos torques.

<b>Diferença entre os valores obtidos e os fornecidos pelo CCS/Inpe [graus]</b>					
<b>Dias</b>	<b>Valores obtidos sem a influência de torques externos</b>	<b>Valores incluindo o torque gradiente de gravidade</b>	<b>Valores incluindo o torque devido às correntes de Foucault</b>	<b>Valores incluindo o torque aerodinâmico</b>	<b>Valores incluindo os quatro torques simultaneamente</b>
<b>12/2/2002</b>	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
<b>13/2/2002</b>	-0,020	-0,042	0,010	-0,021	-0,018
<b>14/2/2002</b>	-0,030	-0,037	0,000	-0,016	0,004
<b>15/2/2002</b>	-0,030	-0,022	0,010	-0,025	0,012
<b>16/2/2002</b>	-0,030	-0,007	0,000	-0,033	0,018
<b>17/2/2002</b>	-0,030	0,008	0,000	-0,042	0,024
<b>18/2/2002</b>	-0,020	0,032	0,010	-0,041	0,036
<b>19/2/2002</b>	-0,020	0,046	0,000	-0,027	0,060
<b>20/2/2002</b>	-0,020	0,058	0,000	-0,009	0,086
<b>21/2/2002</b>	-0,020	0,069	-0,010	-0,013	0,088
<b>22/2/2002</b>	-0,010	0,088	0,000	-0,012	0,095
<b>23/2/2002</b>	-0,010	0,096	0,000	-0,015	0,095
<b>24/2/2002</b>	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
<b>25/2/2002</b>	-0,190	-0,075	-0,190	-0,197	-0,087
<b>26/2/2002</b>	-0,200	-0,082	-0,210	-0,195	-0,084
<b>27/2/2002</b>	-0,210	-0,091	-0,220	-0,207	-0,096
<b>Média do erro</b>	-0,053	0,002	-0,037	-0,053	0,015
<b>Desvio Padrão</b>	0,074	0,059	0,084	0,074	0,063

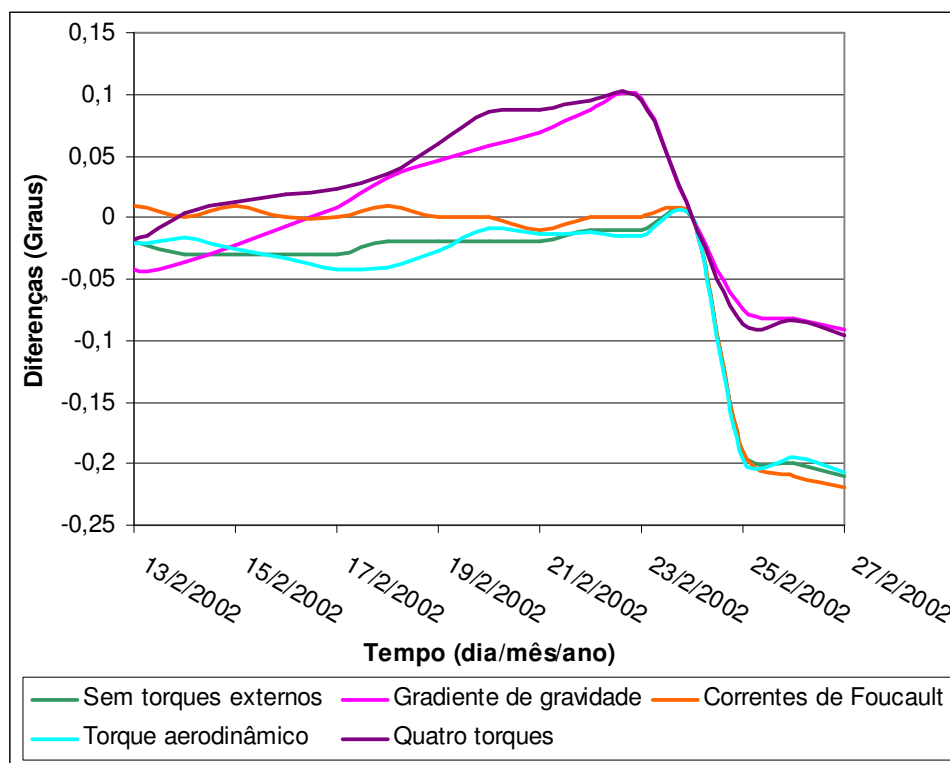


Figura 2.8 – Variação das diferenças entre a declinação reta do satélite SCD2 com a abordagem individual e simultânea dos torques.

### 2.9.1.2.C Resultados para o Módulo da Velocidade de Rotação

Tabela 2.11 - Variações do módulo da velocidade de rotação do satélite SCD2 com a abordagem individual e simultânea dos torques.

<b>Módulo da Velocidade de Rotação [rpm]</b>					
<b>Dias</b>	<b>Valores iniciais fornecidos pelo CCS/Inpe</b>	<b>Valores obtidos sem a influência de torques externos</b>	<b>Valores incluindo o torque gradiente de gravidade</b>	<b>Valores incluindo o torque devido às correntes de Foucault</b>	<b>Valores incluindo os quatro torques simultaneamente</b>
12/2/2002	34,480	34,480	34,480	34,480	34,480
13/2/2002	34,420	34,480	34,480	34,430	34,432
14/2/2002	34,370	34,420	34,420	34,370	34,370
15/2/2002	34,310	34,370	34,370	34,310	34,317
16/2/2002	34,260	34,310	34,310	34,260	34,256
17/2/2002	34,200	34,260	34,260	34,200	34,204
18/2/2002	34,140	34,200	34,200	34,140	34,144
19/2/2002	34,080	34,140	34,140	34,080	34,082
20/2/2002	34,020	34,080	34,080	34,020	34,022
21/2/2002	33,960	34,020	34,020	33,960	33,961
22/2/2002	33,900	33,960	33,960	33,900	33,902
23/2/2002	33,830	33,900	33,900	33,840	33,843
24/2/2002	33,690	33,690	33,690	33,690	33,690
25/2/2002	33,690	33,690	33,690	33,690	33,639
26/2/2002	33,550	33,700	33,690	33,640	33,643
27/2/2002	33,480	33,620	33,550	33,510	33,508

Tabela 2.12 - Diferença dos resultados obtidos para o módulo da velocidade de rotação do satélite SCD2 com a abordagem individual e simultânea dos torques.

<b>Diferença entre os valores obtidos e os fornecidos pelo CCS/Inpe [rpm]</b>				
<b>Dias</b>	<b>Valores obtidos sem a influência de torques externos</b>	<b>Valores incluindo o torque gradiente de gravidade</b>	<b>Valores incluindo o torque devido às correntes de Foucault</b>	<b>Valores incluindo os quatro torques simultaneamente</b>
12/2/2002	0,000	0,000	0,000	0,000
13/2/2002	-0,060	-0,060	-0,010	-0,012
14/2/2002	-0,050	-0,050	0,000	0,000
15/2/2002	-0,060	-0,060	0,000	-0,007
16/2/2002	-0,050	-0,050	0,000	0,004
17/2/2002	-0,060	-0,060	0,000	-0,004
18/2/2002	-0,060	-0,060	0,000	-0,004
19/2/2002	-0,060	-0,060	0,000	-0,002
20/2/2002	-0,060	-0,060	0,000	-0,002
21/2/2002	-0,060	-0,060	0,000	-0,001
22/2/2002	-0,060	-0,060	0,000	-0,002
23/2/2002	-0,070	-0,070	-0,010	-0,013
24/2/2002	0,000	0,000	0,000	0,000
25/2/2002	0,000	0,000	0,000	0,051
26/2/2002	-0,150	-0,140	-0,090	-0,093
27/2/2002	-0,140	-0,070	-0,030	-0,028
<b>Média do erro</b>	-0,059	-0,054	-0,009	-0,007
<b>Desvio Padrão</b>	0,041	0,034	0,023	0,028

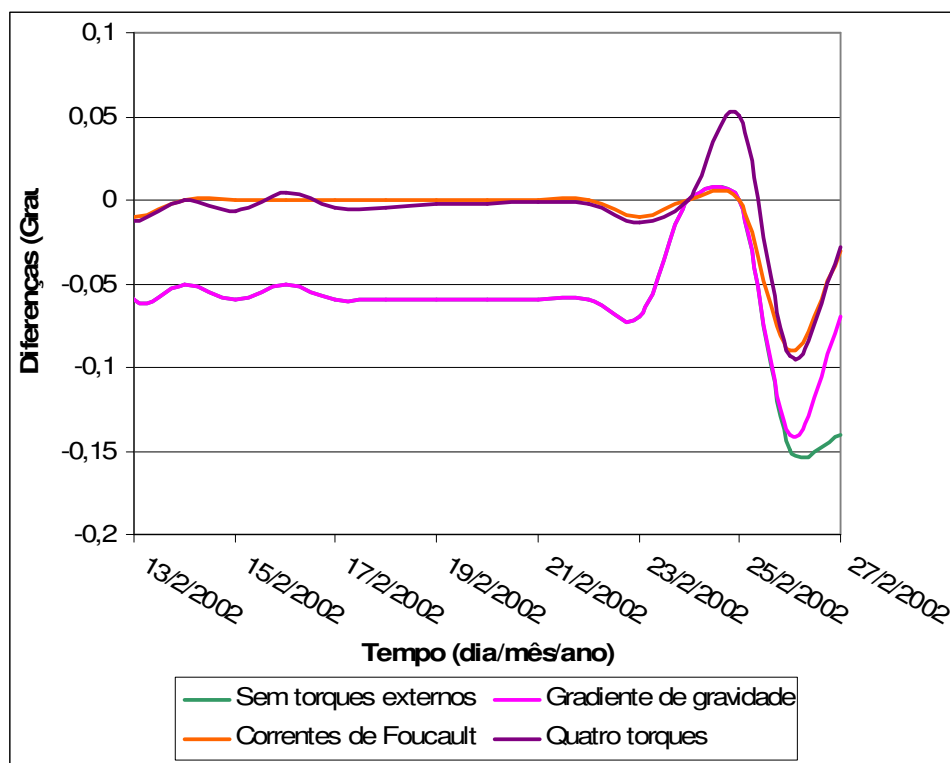


Figura 2.9 – Variação das diferenças entre o módulo da velocidade de rotação do satélite SCD2 com a abordagem individual e simultânea dos torques.

## 2.9.2. Abordagem sem Atualização dos Dados

Neste item são apresentados os resultados das simulações realizadas sem atualização diária dos dados de atitude e órbita, ou seja, para um período de integração maior que 24 horas. Nestas simulações foi considerada a ação conjunta dos 4 torques.

Para cada um dos satélites são apresentados os resultados obtidos para diferentes épocas iniciais, procurando-se determinar o intervalo de validade da teoria desenvolvida.

### 2.9.2.1 Simulação sem atualização dos dados iniciais para o satélite SCD1

Das diversas simulações realizadas foram selecionadas as duas que apresentaram os melhores resultados, na tabela 2.13 para a data inicial em 20/08/1993 e na tabela 2.14 em 17/08/1993.

As tabelas apresentam os resultados obtidos, os dados do CRC/INPE e a média e desvio padrão calculados para as três variáveis estudadas.

Para o satélite SCD1, os erros em ascensão reta e declinação ultrapassaram o valor limite de  $0,5^\circ$  requerido pelo CRC/INPE em apenas três dias, o mesmo não ocorreu com a velocidade de rotação que os três dias ainda se manteve com erro inferior ao valor limite  $0,1$  [rpm].

Tabela 2.13 - Valores obtidos para a simulação sem atualização dos dados iniciais para o satélite SCD1.

Dias	Ascensão Reta [graus]		Declinação [graus]		Módulo de velocidade de rotação [rpm]	
	Valores iniciais fornecidos pelo CCS/INPE	Valores obtidos da simulação	Valores iniciais fornecidos pelo CCS/INPE	Valores obtidos da simulação	Valores iniciais fornecidos pelo CCS/INPE	Valores obtidos da simulação
17/08/93	280,090	280,090	81,100	81,100	87,060	87,060
18/08/93	281,010	280,140	80,820	81,167	86,880	86,901
19/08/93	281,740	280,230	80,530	81,232	86,710	86,745
Média do erro	-	-0,792	-	0,349	-	0,018
Desvio padrão	-	0,756	-	0,350	-	0,017

Tabela 2.14 - Valores obtidos para a simulação sem atualização dos dados iniciais para o satélite SCD1 para uma nova época.

Dias	Ascensão Reta [graus]		Declinação [graus]		Módulo de velocidade de rotação [rpm]	
	Valores iniciais fornecidos pelo CCS/INPE	Valores obtidos da simulação	Valores iniciais fornecidos pelo CCS/INPE	Valores obtidos da simulação	Valores iniciais fornecidos pelo CCS/INPE	Valores obtidos da simulação
<b>20/08/93</b>	282,240	282,240	80,230	80,230	86,540	86,560
<b>21/08/93</b>	282,570	282,416	79,930	80,291	86,370	86,403
<b>22/08/93</b>	282,700	282,393	79,640	80,370	86,210	86,256
<b>23/08/93</b>	282,670	282,526	79,350	80,435	86,040	86,118
<b>Média do erro</b>	-	-0,1512	-	0,5440	-	0,039
<b>Desvio padrão</b>	-	0,1254	-	0,4678	-	0,0322

### 2.9.2.2 Simulação sem atualização dos dados iniciais para o satélite SCD2

De modo similar ao que foi feito acima para o SCD1 estão apresentados nas tabelas 2.15 e 2.16 os resultados obtidos para os dias iniciais 12/02/2002 e 24/02/2002. Para o satélite SCD2, as simulações foram finalizadas, pois ocorreu controle de atitude feita pelo INPE, fato este que não é considerado nas simulações, e não mais porque a média de erro foi maior do que a requerida pelo CRC/INPE.



Tabela 2.15 - Valores obtidos para a simulação sem atualização dos dados iniciais para o satélite SCD2.

Dias	Ascensão Reta [graus]		Declinação [graus]		Módulo de velocidade de rotação [rpm]	
	Valores iniciais fornecidos pelo CCS/INPE	Valores obtidos da simulação	Valores iniciais fornecidos pelo CCS/INPE	Valores obtidos da simulação	Valores iniciais fornecidos pelo CCS/INPE	Valores obtidos da simulação
12/2/2002	278,71	278,71	63,47	63,47	34,48	34,48
13/2/2002	278,73	278,707	63,45	63,468	34,42	34,432
14/2/2002	278,74	278,692	63,42	63,449	34,37	34,384
15/2/2002	278,74	278,663	63,39	63,416	34,31	34,336
16/2/2002	278,72	278,616	63,36	63,368	34,26	34,288
17/2/2002	278,68	278,537	63,33	63,303	34,204	34,431
18/2/2002	278,63	278,434	63,31	63,226	34,14	34,381
19/2/2002	278,57	278,372	63,29	63,174	34,08	34,333
20/2/2002	278,5	278,289	63,27	63,11	34,02	34,285
21/2/2002	278,42	278,182	63,25	63,034	33,96	34,235
22/2/2002	278,33	278,118	63,24	62,983	33,9	34,188
23/2/2002	278,23	278,034	63,23	62,919	33,83	34,139
Média do Erro	-	-0,1372	-	-0,0908	-	0,1615
Desvio Padrão	-	0,0833	-	0,1203	-	0,1303

Tabela 2.16 - Valores obtidos para a simulação sem atualização dos dados iniciais para o satélite SCD2 para uma nova época.

Dias	Ascensão Reta [graus]		Declinação [graus]		Módulo de velocidade de rotação [rpm]	
	Valores iniciais fornecidos pelo CCS/INPE	Valores obtidos da simulação	Valores iniciais fornecidos pelo CCS/INPE	Valores obtidos da simulação	Valores iniciais fornecidos pelo CCS/INPE	Valores obtidos da simulação
24/02/2002	276,600	276,600	61,220	61,220	33,690	33,690
25/05/2002	276,420	276,361	61,030	61,117	33,690	33,639
26/02/2002	276,200	276,109	60,830	61,013	33,550	33,587
27/02/2002	275,940	275,833	60,620	60,909	33,480	33,532
28/02/2002	275,640	275,783	60,420	60,893	33,400	33,496
Média do Erro	-	-0,0228	-	0,2064	-	0,0268
Desvio Padrão	-	0,1013	-	0,1839	-	0,0554

### 3 CONCLUSÃO

Neste trabalho foram analisadas as influências conjuntas do torque de gradiente de gravidade, torque residual, torque devido às correntes de Foucault e torque aerodinâmico na atitude de satélites artificiais estabilizados por rotação, utilizando quatérnions para descrever a atitude. Os resultados foram apresentados em termos das variações da magnitude da velocidade de rotação, da ascensão reta e declinação do eixo de rotação. As equações foram integradas numericamente pelo método de Runge-Kutta de 8ª ordem em termos das variações dos quatérnions e das componentes da velocidade de rotação, e em seguida determinados os comportamentos da velocidade de rotação e da ascensão reta e declinação do eixo de rotação.

Pelos resultados verifica-se que, para a primeira abordagem, que considera a atualização periódica dos dados, os quatro torques em conjunto, com suas componentes somadas algebricamente, descrevem bem o comportamento real da ascensão reta, declinação e módulo da velocidade de rotação do satélite.

Essa soma algébrica de componentes teve efeito positivo, quando os quatro torques contribuíram para o decaimento da ascensão reta, declinação e módulo da velocidade. Além disso, de uma maneira geral, apresentou, em relação a segunda abordagem, menores valores médios e desvios padrões para as diferenças entre os resultados obtidos e os dados reais fornecidos pelo CRC/INPE. Apesar de alguns torques não contribuírem significativamente para o decaimento das variáveis em alguns dias, a média do erro tendeu a ser menor, com algumas exceções, devido principalmente à interação conjunta dos torques.

Os testes que consideraram dados do satélite SCD1, em particular na primeira abordagem, apresentaram bons resultados para o módulo da velocidade de rotação, ficando com uma baixa média de erro e com baixos valores de desvios padrão, quando comparados com a ascensão reta e declinação do eixo de rotação obtidas para este mesmo satélite, conforme registrado na Tabela 2.6. Porém, de uma maneira geral os

resultados obtidos se aproximaram mais dos dados reais quando todos os torques são considerados.

Os resultados obtidos para o satélite SCD2 foram os melhores para as três variáveis em questão. A ascensão reta apresentou um dos menores desvios padrões. A interação conjunta dos torques apresentou menores erros médios para as três variáveis e menores desvios para a declinação.

Na segunda abordagem, na qual não é feita a atualização periódica dos dados, como era esperado, a média dos erros foi maior que a obtida com a abordagem anterior tendo, porém, atingido o objetivo de permitir a determinação do período em que as simulações permanecem válidas. Neste caso verifica-se que a propagação pôde ser estendida para um período de ordem de 11 dias para o satélite SCD2, com a precisão mantendo-se ainda dentro das faixas requeridas. No entanto, o mesmo não aconteceu para o SCD1 cujos resultados ultrapassam os limites de precisão em aproximadamente três dias.

O que impediu um maior período de aplicação de simulações para o satélite SCD1, foi a média dos erros em declinação do eixo de rotação e em ascensão reta, que após três dias sem atualização de dados, alcançaram um valor maior que o limite de  $0,5^\circ$ . Já o módulo da velocidade de rotação apresentou uma média de erro e um desvio padrão muito baixos, o que permite concluir que as considerações e simulações realizadas representaram bem o comportamento real da velocidade de rotação.

Um refinamento na análise da influência dos torques aqui considerados pode ser feito através do estudo do erro de apontamento, ou seja, do desvio angular entre o eixo de rotação obtido e o eixo de rotação nominal. Este tipo de estudo será realizado na continuidade deste projeto, considerando a análise dos casos com e sem a atualização dos dados a cada 24 horas.

De maneira geral nota-se que a influência conjunta dos torques externos, como era esperado, leva a resultados mais precisos, mesmo considerando-se a influência de apenas quatro torques. Deste modo a inclusão de outros torques externos atuantes no

satélite poderá contribuir para uma melhor representação do movimento real do satélite no espaço. Esse é o segundo enfoque do trabalho que dá continuidade a este projeto.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ASSIS, S. C. **Propagação analítica de atitude de satélites estabilizados por rotação: Torque Residual Médio com Modelo de Quadripolo para o Campo Geomagnético**, Dissertação de Mestrado, Dinâmica Orbital e Planetologia Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2002.

ASSIS, S. C.; ZANARDI, M.C. **Torque Magnético Residual Médio com Modelo de Quadripolo**, In: Jornada de Iniciação Científica e Pós-graduação, 2003, Guaratinguetá, **Anais...**, Guaratinguetá, 2003. CD-ROM.

BATE, R.R.; MULLER, D. D.; WHITE, J. E. **Fundamentals of Astrodynamics**. Ed. Dover Publications, INC. 1971.

BROUWER, O.; CLEMENCE, G.M. **Methods of celestial mechanics**, New York: Academic Press, 1961.

KAPLAN, M. H., **Modern spacecraft dynamics & control**, New York: John Wiley, 1976.

QUIRELLI, I. M. P. **Propagação de Atitude de Satélites Estabilizados por Rotação**, Dissertação de Mestrado, Faculdade de Engenharia, UNESP - Guaratinguetá, SP, 2002.

SEHNAL, L., POSPÍŠILOVÁ, L. **Thermospheric model TD88**, Preprint No. 67 of the Astronomical Institute of Czechoslovakia, n "Academy of Sciences", 1988.

SHUSTER, M.D., **A survey of attitude representation**, Journal of Astron. Sciences, v. 41, 4, 1993.

RODRIGUES, D. S. S., **Propagação da atitude de satélites artificiais com diferentes representações**. Relatório Final do PIBIC/CNPq, FEG/UNESP, Guaratinguetá, 2002.

RODRIGUES, D. S. S., **Propagação da atitude de satélites artificiais com diferentes representações**. Relatório Final do PIBIC/CNPq, FEG/UNESP, Guaratinguetá, 2003.

RODRIGUES, D. S. S., **Propagação da atitude de satélites artificiais com quatérnions e torque magnético residual**, Anais da Jornada de Iniciação Científica e Pesquisa da FEG/UNESP, 2004.

SENE, L. T. F.; **Propagação da Atitude de Satélites Artificiais com Quatérnions incluindo Torques Magnéticos e Torque Gradiente de Gravidade**, Relatório Final de Projeto de Iniciação Científica, PIBIC, CNPq, INPE, São José dos Campos, 2006.

TEIXEIRA, J. E. C. T., **Propagação Numérica da Atitude de Satélites Artificiais com Torque Magnético devido às correntes de Foucault e Quatérnions**, Trabalho de Graduação, Faculdade de Engenharia, UNESP – Guaratinguetá, SP, 2005.

THOMAS, L. C.; CAPPELARI, J. O., **Attitude determination and prediction of spin-stabilized satellites**, The Bell System Technical Journal, July, 1964.

User's Guide - **MATLAB Edition for Students**, MAT WORKS Inc, Massachusetts, USA, 1995.

WERTZ, J. R. **Spacecraft Attitude Determination and Control**, Kluwer Academic Publishers, 1978.

ZANARDI, M. C., **Dinâmica da Atitude de Satélites Artificiais**, Tese de Livre Docência, FEG/UNESP, Guaratinguetá, 2005.

ZANARDI, M. C.; RODRIGUES, D. S. S., **Propagação da Atitude de Satélites Artificiais com Quatérnions e Torque Gradiente de Gravidade**, Anais do DINCON 2004, 1831 - 1846, Ilha Solteira-SP, 2004.