ENCIT 88 - Águas de Lindóia, SP (Dez. 1988) /(December 1988)

TRANSFERÊNCIA DE CALOR TRANSIENTE NO INTERIOR DE DUTOS COM TEMPERATURA VARIANDO PERIODICAMENTE NA ENTRADA.

ABCM ABCM

JERÔNIMO DOS SANTOS TRAVELHO
WILSON FERNANDO NOGUEIRA DOS SANTOS
Laboratório de Combustão e Propulsão - LCP/INPE

RESUMO

O presente trabalho apresenta um método de solução para a transferência de calor por convecção forçada laminar no interior de um canal de placas planas paralelas, onde a temperatura na entrada varia periodicamente e na parede sendo uma função desconhecida do tempo e posição, determinada dinamicamente por um balanço da taxa de transferência de calor e energia armazenada. Este método consiste em empregar-se transformada de Laplace e integração numérica.

INTRODUÇÃO

O estudo da transferência de calor por convecção forçada, no regime transiente no interior de dutos e com condições na entrada variando periodicamente, tem sido de interesse para controle de trocadores de calor. Para muitas aplicações em engenharia, os transientes iniciais são negligenciados e a solução quase-estacionária e normalmente assumida para fornecer o comportamento térmico do equipamento.

Como uma consequência deste interesse, alguns trabalhos tem surgido na literatura.

Sucec e Sawant [1] analisaram este problema no interior de um canal de placas planas paralelas, onde a temperatura da parede não era determinada a priori, mas determinada por um balanço da taxa de transferência de calor e energia armazenada. O perfil de velocidades empregado foi o parabólico e a solução foi obtida para um regime quase-estacionário.

Novamente, Sucec [2] analisa o mesmo problema considerando o escoamento do tipo "Slug Flow" e a iteração entre parede-fluido ocorrendo apenas em uma parede.

O modelo de escoamento do tipo "slug flow" tem sido empregado na solução de um número de problemas transiente conjugado, simplificando então a análise e sendo representativo de situações físicas em engenharia.

Importantes contribuições foram dadas por Sparrow e Farias [3] e Cotta el al [4]. Sparrow and Farias estudaram o problema transiente conjugado no interior de um canal de placas planas paralelas (assumindo "slug flow") e obtiveram uma solução na forma de série de exponenciais cossenos. Esta solução no entanto necessitava do cálculo de autovalores complexos que dependiam das propriedades do fluído e parede, e da frequência de oscilação da temperatura. Um processo de tentativa e erro foi tulizado para avaliar numericamente as partes real e imaginária dos mesmos. Cotta et al avançaram nesta análise extendendo-a para o escoamento no interior de tubos, e sugeriram o uso do método da contagem (Count Method) para a obtenção dos autovalores complexos.

O presente trabalho apresenta uma maneira alternativa de se resolver a mesma situação física apresentada por [3] e [4] , sem a necessidade do cálculo dos autovalores complexos. Esse cálculo é evitado aplicando-se a transformada de Laplace as equações e condições de contorno que descrevem o porblema. A anti-transformada, que é a solução do problema original, é obtida numericamente.

FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

O trabalho aqui analisado, considera a transferência de calor por convecção forçada, transiente no interior de um canal de placas paralelas separadas de 2L e espessura l. A temperatura do fluido na entrada varia senoidalmente. A temperatura na parede não é conhecida, mas determinada por um balanço da taxa de transferência de calor e energia armazenada.

A formulação matemática do problema, levando-se em conta que as propriedades de transporte do fluido e parede foram mantidas constantes e que a condução axial em ambos foi negligenciada, é dada por

$$\frac{\partial}{\partial t} T(x,z,t) + U \frac{\partial}{\partial t} T(x,z,t) = \alpha \frac{\partial T}{\partial x^2}(x,z,t) \qquad (1)$$

em $0 < x < L, \quad z > 0, \quad t > 0.$

Com a condição na entrada dada por

$$T(x,o,t) = T_o + \Delta T_o e^{iwt} \qquad (2a)$$

e as seguintes condições de contorno

$$\left.\frac{\partial}{\partial x} T(x,z,t)\right|_{x=0} = 0 \qquad (2b)$$

$$-K \left.\frac{\partial}{\partial x} T(x,z,t)\right|_{x=1} = \rho_w c_w l \frac{\partial}{\partial t} T(z,t) \qquad (2c)$$

Como o objetivo do trabalho é obter a solução periódica, então torna-se desnecessária a condição inicial em t=0.

Assumindo escoamento do tipo "slug flow", U= const, as equações (1) e (2) são modificadas pela introdução dos seguintes parâmetros adimensionais:

$$X = \frac{x}{L} \qquad (3a)$$

$$Z = \frac{\alpha z}{UL^2} \tag{3b}$$

$$\tau = \frac{\alpha t}{L^2} \tag{3c}$$

$$\theta\,(X,Z,\tau) = \frac{T\,(x,z,t) - T_o}{\Delta T_o} \tag{3d}$$

$$\Omega = \frac{\omega L^2}{\alpha} \tag{3e}$$

$$a^* = \frac{\rho C_p L}{\rho_w C_w l} \tag{3f}$$

Portanto as equações (1) e (2) adimensionalisadas transformam-se em:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \frac{\partial \theta}{\partial Z} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} \tag{4}$$

em $\quad 0 < X < 1 \;,\quad Z > 0 \;,\; \tau > 0$

$$\theta\,(X,0,\tau) = e^{i\Omega\tau} \tag{5a}$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial X}\,\theta(X,Z,\tau)\right|_{x=0} = 0 \tag{5b}$$

$$a^* \left.\frac{\partial}{\partial X}\,\theta(X,Z,\tau)\right|_{x=1} + \frac{\partial}{\partial \tau}\,\theta(1,Z,\tau) = 0 \tag{5c}$$

Para se obter a solução periódica a partir da equação (4) sujeita as condições impostas em (5), define-se que

$$\theta(X,Z,\tau) = T^+(X,Z)\, e^{i\Omega(\tau - Z)} \tag{6}$$

Resultando no seguinte problema para $T^+(X,Z)$, após ser introduzida nas equações (4) e (5):

$$\frac{\partial}{\partial Z}\, T^+\,(X,Z) = \frac{\partial^2}{\partial X^2}\, T^+\,(X,Z) \tag{7}$$

$$T^+(X,0) = 1 \tag{8a}$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial X}\, T^+\,(X,Z)\right|_{x=0} = 0 \tag{8b}$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial X}\, T^+\,(X,Z)\right|_{x=1} + ib^*\, T^+(1,Z) = 0 \tag{8c}$$

O parâmetro adimensional b^* que aparece na equação (8c) representa os efeitos de capacidade térmica da parede, sendo definido por:

$$b^* = \frac{\Omega}{a^*} = \frac{\omega L\, c_w\, l_w}{K} \tag{9}$$

<u>MÉTODO DE SOLUÇÃO</u>

A transformada de Laplace com respeito a Z foi empregada para resolver as equações (7) e (8), transformando-as em (10) e (11) com $\tilde{T}$ definido como:

$$\tilde{T} = \underset{Z \to s}{\mathcal{L}}\; T^+\,(X,Z) = \int_0^\infty T^+\,(X,Z)\, e^{-sZ}\, dZ$$

$$\frac{\partial^2}{\partial X^2}\,\tilde{T}\,(X,s) - s\tilde{T}\,(X,s) - 1 \tag{10}$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial X}\,\tilde{T}\,(X,s)\right|_{x=0} = 0 \tag{11a}$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial X}\,\tilde{T}\,(X,s)\right|_{x=1} + ib^*\, T(1,s) = 0 \tag{11b}$$

onde s é o parâmetro da transformada de Laplace. A solução da equação (10) é dada a seguir,

$$\tilde{T}\,(X,s) = c_1 e^{\sqrt{s}\,X} + c_2 e^{\sqrt{s}\,X} + \frac{1}{s} \tag{12}$$

Aplicando as condições de contorno impostas em (11), determina-se c_1 e c_2, e a solução da equação (12) é dada por:

$$\tilde{T}\,(X,s) = \frac{1}{s} - \frac{ib^*}{s}\,.\,(e^{\sqrt{s}\,X} + e^{-\sqrt{s}\,X})\,.\,\frac{1}{[\sqrt{s}(e^{\sqrt{s}} - e^{-\sqrt{s}}) + ib^*(e^{\sqrt{s}} + e^{-\sqrt{s}})]} \tag{13}$$

Rearranjando a equação (13), tem-se:

$$T\,(X,s) = \frac{1}{s} - \frac{ib^*}{s}\,.\,\frac{e^{-\sqrt{s}}\,(e^{\sqrt{s}\,X} + e^{-\sqrt{s}\,X})}{\sqrt{s} + ib^*}\,.\left[\frac{1}{1 - \left(\frac{\sqrt{s} - ib^*}{\sqrt{s} + ib^*}\right) e^{-2\sqrt{s}}}\right] \tag{14}$$

Observando-se o termo entre parenteses, verifica-se que o mesmo pode ser aproximado por uma série da seguinte forma:

$$\frac{1}{1 - w} = 1 + w + w^2 + \ldots \tag{15}$$

onde a condição $|w| < 1$ deve ser satisfeita para que a convergência seja alcançada.

Introduzindo esta mudança na equação (14), tem-se

$$\tilde{T}\,(X,s) = \frac{1}{s} - \frac{ib^*}{s}\,.\,\frac{e^{-\sqrt{s}}(e^{\sqrt{s}\,X} + e^{-\sqrt{s}\,X})}{(\sqrt{s} + ib^*)}\,.\left[1 + \left(\frac{\sqrt{s} - ib^*}{\sqrt{s} + ib^*}\right) e^{-2\sqrt{s}} + \left(\frac{\sqrt{s} - ib^*}{\sqrt{s} + ib^*}\right)^2 . \, e^{-4\sqrt{s}} + \ldots\right] \tag{16}$$

A anti-transformada da equação (16) que é a solução periódica do problema proposto, é obtida numericamente por

$$T^+(X,Z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{sZ}\,.\,\tilde{T}\,(X,s)\, ds \tag{17}$$

onde c é escolhido de maniera que todos os pontos singulares da expansão de $\tilde{T}(X,s)$ em série, fiquem a esquerda da linha $Re(s) = c$ no plano complexo s. Os pontos singulares são $s = 0$ e $s = -b^{*2}$.

A interação foi feita numericamente utilizando-se a regra de Simpson.

RESULTADOS E CONCLUSÕES

A anti-transformada de Laplace foi obtida numericamente para os casos de b* iguais a 5,10 e 20. Em todos os casos foi assumido a* = 0,001. Os valores de Z utilizados foram 0,1, 0,2, 0,5 e 1,0.

Esses valores foram escolhidos de modo a possibilitar a comparação dos resultados de Cotta et al com os do presente trabalho. A Figura 1 mostra tal comparação para a amplitude A da flutuação da temperatura na parede e a defasagem Ø com relação à oscilação na entrada do duto. Essas grandezas são obtidas por:

$$A = |T^+| = \sqrt{T_r^{+2} + T_i^{+2}} \tag{18}$$

$$\emptyset = tg^{-1}\left(\frac{T_r^+}{T_i^+}\right) - \Omega Z \tag{19}$$

onde T_r^+ e T_i^+ são as partes real e imaginária de T^+.

Como ficou evidente pelo descrito anteriormente, o método apresentado é de simples aplicação e evita a necessidade do cálculo de autovalores. Isto é possível porque aplica-se as condições de contorno (Equação (11)) antes de se fazer a anti-transformada. Quando isso não é feito encontra-se a solução geral da equação como descrito por [3] e [4].

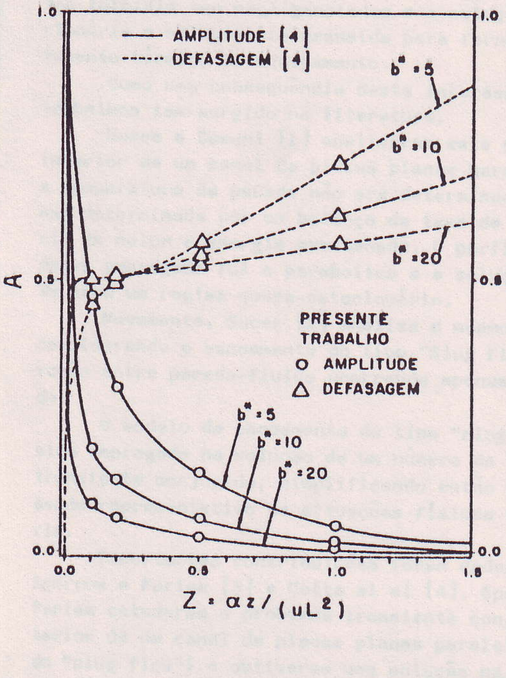

Figura 1. Amplitude e defasagem da temperatura na parede em função da distância axial.

REFERÊNCIAS

[1] Sucec, J. and Sawant, A.M., Unsteady Conjugated forced convection Heat Transfer in a Parallel PLate Duct. Int. J. Heat Mass Transfer, 27(1): 95-100 (1984).

[2] Sucec, J., Transient Heat Transfer Between a Plate and a Fluid Whose Temperature Varies Periodically with Time. Journal of Heat Transfer, 102: 126-131 (1980).

[3] Sparrow, E.M. and de Farias, F.N., Unsteady Heat Transfer in Ducts With Time-Varying Inlet Temperature and Participating Walls. Int. J. Heat Mass Transfer, 11: 837-853 (1968).

[4] Cotta, R.M. Mikhailov, M.D. and Ozisik, M. N., Transient Conjugated forced Convection in Ducts with Periodically Varying Inlet Temperature. Int. J. Heat Mass Transfer, 30(10): 2073-2082 (1987)

ABSTRACT

This work presents a method for the solution of the heat transfer with laminar forced convection inside a parallel plate channel. The temperature in the inlet varies periodically and the wall temperature is an unknown function of time and position. The latter is obtained through the study of the transient heat transfer between fluid and the wall. Laplace transforms are used in this study together with numerical integration.