

Determinação de Órbitas Fixas e Periódicas em Sistemas de Equações Diferenciais

Bruno A. F. Roth^{*1}, Elbert E. N. Macau^{**2} e Maisa O. Terra^{**2}

(1) Área de Computação Científica e P.A.D
Laboratório Associado de Computação e Matemática Aplicada (LAC)
Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE)

(2) Laboratório de Integração e Testes (LIT)
Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE)

(*)Mestrado, e-mail:roth@lit.inpe.br ; (**)Orientadores

Resumo

Este trabalho explora o método proposto por *Schmelcher e Diakonov* de determinação de órbitas fixas e periódicas instáveis em mapas. Uma adaptação foi aplicada ao método determinar pontos fixos e periódicos em equações diferenciais. Resultados foram gerados com o sistema de equações diferenciais de *Lorenz*. Por fim um análise da aplicabilidade e funcionalidade método adaptado de *Schmelcher e Diakonov* no sistema de equações diferenciais de *Lorenz* conclui este trabalho.

Palavras-Chave: caos, órbitas periódicas instáveis, sistema dinâmico não-linear.

Introdução

Em sistemas dinâmicos em regime de evolução caótica, o movimento é organizado em torno de órbitas periódicas instáveis. Estas órbitas, que estão densamente presentes no invariante caótico, capturam o esqueleto topológico do movimento, no sentido de que toda órbita pode ser aproximadamente reconstituída através das órbitas periódicas instáveis de curto período. Podemos calcular quantidades que caracterizam o movimento caótico, tais como dimensões, expoentes de Lyapunov, entropia topológica, seguindo as órbitas periódicas instáveis do sistema [1] [4]. Em [4] uma expansão em série em torno das órbitas periódicas instáveis de curto período foi introduzida e aplicada para avaliação de grandezas representativas da evolução caótica. As expansões de curvatura [4] do somatório das órbitas periódicas [6] [2] [9] são uma ferramenta igualmente poderosa para a avaliação das ressonâncias nos sistemas caóticos Hamiltonianos [5].

O presente trabalho tem por objetivo explorar o método proposto por *Schmelcher e Diakonov* quanto a sua eficiência e aplicabilidade na determinação de órbitas fixas e periódicas da *Seção de Poincaré* de sistemas dinâmicos definidos por um fluxo.

No estudo de sistemas, freqüentemente há interesse em se levantar grandezas estatísticas de longo prazo, tais como, médias, expoentes de Lyapunov, dimensões e outros invariantes, como a *medida natural* e densidade de *probabilidade*. Estas grandezas estatísticas são fisicamente significativas somente quando a medida que está sendo considerada é gerada por uma trajetória típica no espaço da fase. Esta *medida* é chamada *medida natural* [3] se é invariante em relação a evolução da dinâmica. Conseqüentemente, é de importância fundamental compreender e caracterizar a medida natural em termos de grandezas dinamicamente fundamentais. Não há nada mais fundamental do que expressar a medida natural em termos das órbitas periódicas embutidas no conjunto caótico invariante [7].

O trabalho está dividido em mais quatro seções: definição do método de *Schmelcher e Diakonov* para mapas; adaptação do método de *Schmelcher e Diakonov* para equações diferenciais; resultados com sistema de equações diferenciais de *Lorenz* e finalmente as conclusões finais.

Método apresentado por Schmelcher e Diakonov para mapas

A idéia básica deste método [8] consiste em partir do sistema dinâmico discreto N-dimensional em regime caótico e através de transformações lineares apropriadas, obter um sistema dinâmico transformado, tal que todos pontos fixos deste novo sistema sejam os mesmos do sistema original e com as mesmas localizações no espaço de fase. Entretanto as transformações lineares, apropriadamente escolhidas, mudam a estabilidade dos pontos fixos e órbitas periódicas, de tal forma que ao invés de instáveis, como no sistema original, passam a ser estáveis na nova dinâmica, sendo diferentes transformações lineares responsáveis pela estabilização de diferentes conjuntos de pontos.

Vamos considerar um sistema dinâmico discreto completamente caótico N-dimensional dado por $U : \vec{r}_i + 1 = \vec{f}(\vec{r}_i)$.

| Dimensão | Matrizes C_k |
|----------|---|
| 1D | $C_1 = 1$ $C_2 = -1$ |
| 2D | $C_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ $C_2 = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ $C_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$ $C_4 = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$ $C_5 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$ $C_6 = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$ $C_7 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$ $C_8 = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$ |

Tabela 1: Matrizes C_k para uma e duas dimensões.

Por U ser completamente caótico, ele apresenta apenas pontos fixos instáveis. Note que órbitas periódicas de período p correspondem a termos $f^p(\bar{r}_i)$ em lugar de $f(\bar{r}_i)$.

O objetivo proposto é o de construir a partir de $U : \bar{r}_i + 1 = \bar{f}(\bar{r}_i)$, um sistema dinâmico S_k diferente contendo os mesmos pontos fixos (PF) de U . Utilizando a transformação $L_k : U \rightarrow S_k$, os PF que eram instáveis passam a estáveis.

Devido a estabilidade dos pontos fixos no sistema dissipativo S_k , toda trajetória de S_k depois de algumas iterações dirige-se para um ponto fixo \bar{r}_F , ou sai dos limites do invariante caótico do sistema original U . Por construção \bar{r}_F também é um ponto fixo do sistema U . Para cumprir a correspondência um a um entre os pontos fixos de U e S_k , a transformação L_k deve em geral ser linear. Portanto:

$$S_k : \bar{r}_{i+1} = \bar{r}_i + \Lambda_k(\bar{f}(\bar{r}_i) - \bar{r}_i), \quad (1)$$

onde Λ_k é uma matriz $N \times N$ constante inversível. Reescrevemos $\Lambda_k = \lambda C_k$, tal que λ seja um parâmetro real, $1 \gg \lambda > 0$, e C_k matrizes ortogonais cujos elementos são apenas $\{-1, 0, 1\}$. O número destas matrizes é dado por $2^n n!$ e são listadas para $n = 1$ e $n = 2$ na Tab. (). A definição na Eq. (1) satisfaz a correspondência um para um entre os pontos fixos de U e S_k : Se $\bar{r}_i = \bar{r}_F$ é um ponto fixo de U , o termo a direita da Eq. (1) desaparece e portanto \bar{r}_F também é ponto fixo de S_k ; por sua vez, se \bar{r}_F é ponto fixo de S_k , e Λ_k não é singular, o termo a direita da Eq. (1) deve ser igual a 0 para $\bar{r}_i = \bar{r}_F$, então \bar{r}_F é também ponto fixo de U . Assim, as leis dinâmicas U e S_k possuem pontos fixos em posições idênticas no espaço.

O método acima de detecção de pontos periódicos instáveis para um sistema dinâmico caótico envolve o parâmetro λ que deve ser suficientemente pequeno a fim transformar pontos fixos instáveis, do sistema caótico original, para estáveis através da transformações L_k . Quanto maior for o período a ser encontrado menor deverá ser o parâmetro λ . Entretanto, o parâmetro não pode ser muito pequeno, pois a convergência na iteração das leis dinâmicas transformadas será muito lenta.

Há uma maneira simples de evitar o ajuste do parâmetro λ , tomando-se o limite $\lambda \rightarrow 0$ o que nos leva a $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{(\bar{r}_{i+1} - \bar{r}_i)}{\lambda} = \dot{\bar{r}} = C_k(\bar{f}(\bar{r}_i) - \bar{r}_i)$. Esta equação representa a formulação contínua da transformação do sistema dinâmico discreto Eq. (1) e sua solução não dependem do parâmetro λ , podendo ser facilmente resolvido usando um integrador de equações diferenciais ordinárias (ex: Runge-Kutta [10]).

Na seção seguinte as adaptações para determinar os pontos fixos e periódicos em equações diferenciais são demonstradas.

Adaptação do método apresentado por Schmelcher e Diakonov para equações diferenciais

Para a determinação de pontos fixos e periódicos em equações diferenciais utilizamos o método proposto por Schmelcher e Diakonov. Foi necessário adaptar o método afim de determinar os pontos fixos e periódicos na *Seção de Poincaré*.

A principal adaptação no algoritmo foi a definição de $\bar{f}(\bar{r}_i)$ Eq.(1) como sendo a próxima iteração quando o fluxo cruza a *Seção de Poincaré* no mesmo sentido.

Resultados com o sistema de equações diferenciais de Lorenz

Para determinar os pontos fixos e periódicos na *Seção de Poincaré* devemos determinar localização do seção visualizando o gráfico do invariante caótico obtido pelas equações diferenciais de Lorenz.

Os pontos fixos e periódicos do sistema de equações de Lorenz foram determinados utilizando a *Seção de Poincaré* em $X = -15$ como podemos observar na Fig. (1).

Iniciamos a procura por pontos periódicos na *Seção de Poincaré* determinando uma grade de condições iniciais definida pelos limites $(-15, -30, 0, 0)$ e $(-15, 30, 50)$. Integramos cada condição inicial até que cruze a seção definida por $X = -15$ na mesma direção. Afim de mover as condições iniciais para posições válidas na seção, isto é, posições onde a seção será visitada.

Definimos os parâmetros do método de Schmelcher e Diakonov como segue: Número de condições iniciais: 500; número máximo de iterações do método para cada condição inicial: 500; valor do parâmetro λ : 1×10^{-3} ; número de Matrizes: 8 e parâmetro de parada de iteração do método Schmelcher e Diakonov: 1×10^{-3} .

Com as configurações acima foram detectadas alguns pontos de período 1, isto é, cruza uma vez no mesmo sentido a *Seção de Poincaré*, como podemos observar nos gráficos da Fig. (2).

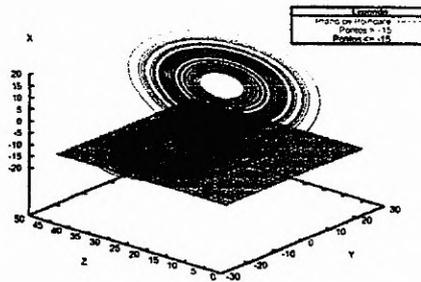


Figura 1: *Seção de Poincaré* $X = -15$ no sistema de equações diferenciais de *Lorenz*.

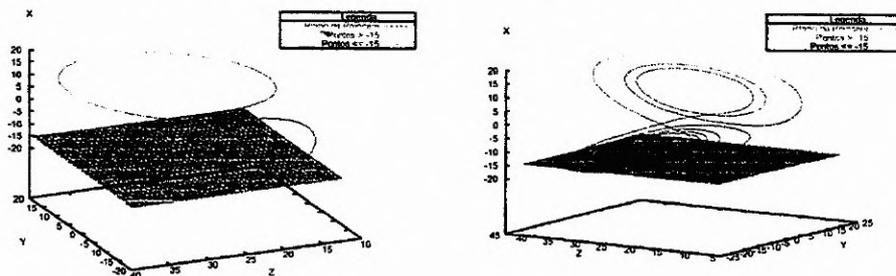


Figura 2: Ponto de período 1 da *Seção de Poincaré* $X = -15$ aplicado no sistema de equações diferenciais de *Lorenz*. $PF_A \approx (-15.0, -18.468, 32.150)$ - (Esquerda). $PF_B \approx (-15.0, -21.277, 28.727)$ - (Direita)

Conclusão

Podemos verificar que para este sistema de equações diferenciais de *Lorenz*, o método adaptado determinou com precisão os pontos de período 1, como podemos observar no gráficos da Fig.(2) .

A escolha da posição da *Seção de Poincaré* exerce influência no período da órbita detectada. Por exemplo na Fig(2)-(Direita)) se a *Seção de Poincaré* estivesse na coordenada $X = -5$ a resposta seria de período 5 e não de 1.

Órbitas de períodos um pouco maiores, período 2 e 3 também foram testados para este sistema de equações diferenciais (*Lorenz*), validando funcionalidade deste método.

Referências

- [1] Auerbach, D., Cvitanovic, P., Eckmann, J., Gunaratne G., Procaccia I., *Physical Review Letters*, 58:(2387-2389), 1987.
- [2] Balian, R., Bloch, C, *Ann. Physical (NY)*, 85:(514), 1974.
- [3] Bowen, R., Ruelle, D. *Invent. Math*, v. 79 p. 181, 1975.
- [4] Cvitanovic, P, *Physical Review Letters*, 61:(2729), 1988.
- [5] Cvitanovic-II, P., Eckhardt B., *Physical Review Letters*, 63:(823-826), 1988.
- [6] Gutzwiller, M. C., *Jornal Math Physical*, 12:(343), 1971.
- [7] Lai, Y.; Nagai, Y., Grebogi C. *Physical Review Letters*, 79:(649-652), 1997.
- [8] Schmelcher, P., Diakonov, F. K, *Physical Review E*, 57:(2739-2746), 1998.
- [9] Miller, W. M.; Bloch, C., *Ann. Physical (NY)*, 30:(77), 1975.
- [10] Press, W. H., Teukolsky, S. A., *Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing*. 2.ed. Cambridge, Press Syndicate, 1992.