

# Uma solução exata para o Problema de Localização de Concentradores com Alocação Múltipla

Wesley Gomes de Almeida<sup>1</sup>, Edson Luiz França Senne<sup>2</sup>, Horacio Hideki Yanasse<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Programa de Mestrado ou Doutorado em Computação Aplicada – CAP  
Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais – INPE

<sup>2</sup>Faculdade de Engenharia – Campus de Guaratinguetá  
Universidade Estadual Paulista – UNESP

<sup>3</sup>Laboratório Associado de Computação e Matemática Aplicada – LAC  
Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais – INPE

{wesgomes2005@gmail.com, elfsenne@feg.unesp.br,  
horacio@lac.inpe.br}

**Abstract.** *In this work the uncapacitated multiple allocation  $p$ -hub median problem is studied. Considerations about the Variable Neighborhood Search (VNS) technique applied to hub location problems are presented.*

**Resumo.** *Neste trabalho estuda-se o problema de localização de  $p$ -concentradores com alocação múltipla. Considerações sobre a técnica VNS aplicada a problemas de localização de concentradores são apresentadas.*

**Palavras-chave:** *Problemas de Localização-Alocação, Localização de Concentradores Capacitado, VNS.*

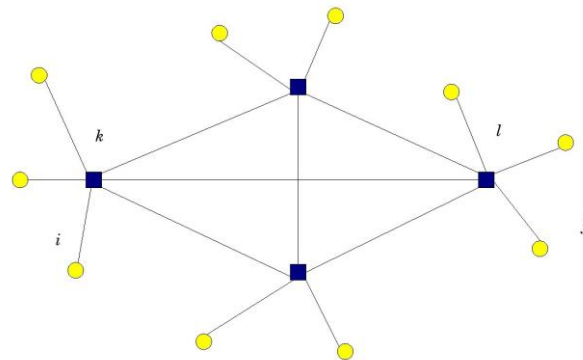
## 1. Introdução

Existem diversos problemas definidos em redes, na maioria dos casos a comunicação entre os nós da rede não acontece de forma direta, mas através de nós especiais denominados concentradores. Isto ocorre com frequência, por exemplo, em redes de transporte e em redes de telecomunicação. Nestes casos, diz-se que a rede é do tipo *hub-and-spoke* (Aykin, 1994).

Um modelo desse tipo de rede pode ser exemplificado imaginando-se um serviço de transporte rodoviário de cargas em que a demanda individual dos clientes não é suficiente para lotar um veículo em uma única viagem. Por esse motivo, as cargas são agregadas e transportadas em conjunto. Para isto, empresas que operam este tipo de serviço possuem instalações físicas localizadas em diversas regiões para consolidar as cargas oriundas de diversas origens. Portanto, este tipo de serviço compreende as operações de coleta (de um cliente até um terminal de consolidação de origem), transferência (de um terminal de consolidação de origem para um terminal de consolidação de destino) e distribuição (do terminal de consolidação de destino até o cliente final). Para uma empresa deste tipo, um bom planejamento da rede de transporte, com os terminais de consolidação (concentradores) bem localizados, pode implicar em ganhos financeiros significativos.

Diversas aplicações práticas em redes de transporte e de telecomunicações, como o transporte de pessoas, produtos, materiais ou de dados, ocorrem em redes deste tipo. A

Figura 1 mostra um exemplo de rede do tipo *hub-and-spoke*, onde os concentradores são representados por quadrados e os demais nós (denominados *spokes* ou nós de demanda) são representados por círculos.



**Figura 1 – Rede do tipo hub-and-spoke**

O problema de localização de concentradores pertence à classe de problemas NP-difíceis (Garey e Johnson, 1979). Portanto, a determinação de solução ótima para o problema por meio de algoritmos exatos, constitui um grande desafio, pois deve utilizar métodos enumerativos, que exigem grande esforço computacional e podem ser impraticáveis para exemplares do problema de grandes dimensões. Por isto, diversas propostas usando heurísticas têm sido consideradas, tais como: Busca Tabu (Klincewicz, 1991), *Simulated Annealing* (Abdinnour-Helm e Venkataramanan, 1993), Redes Neurais Artificiais (Smith et al, 1996) e Algoritmos Genéticos (Abdinnour-Helm, 1998; Topcuoglu et al, 2005; Cunha e Silva, 2007).

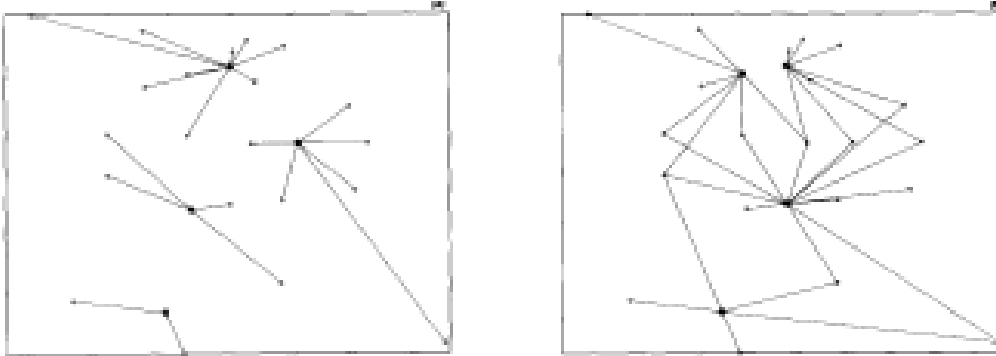
Ernst e Krishnamoorthy (1996) usam um conjunto de dados baseado em entregas postais na Austrália (AP, do inglês *Australian Post*). Este conjunto de dados possui testes em que  $n$ , número de nós da rede variam de 10 a 200 nós, e os custos denominados apertados (do inglês, *Tight*) e frouxos (do inglês, *Loose*) definem dois tipos de testes diferentes para cada valor de  $n$ . Tal conjunto tornou-se padrão por diversos autores na literatura para realização de testes em métodos para resolução de problemas de localização de concentradores.

Ernst e Krishnamoorthy (1999) propõem dois algoritmos heurísticos para o problema capacitado: o primeiro baseia-se no método *simulated annealing* e o segundo em um método de descida randômico. Tal método consiste em gerar soluções vizinhas aleatoriamente e só aceitar movimentos de melhora. Com o apoio de um método do tipo *branch-and-bound* e com limitantes superiores providos pelas heurísticas os autores conseguiram obter soluções ótimas para problemas AP definidos em redes de até 50 nós, com exceção do teste em que  $n = 50$  e os custos fixos e a capacidade são do tipo apertados.

O problema de localização de concentradores com alocação múltipla pode ser considerado um dos mais importantes, devido a sua aproximação com a realidade. Nem sempre a alocação única torna uma rede mais barata, quando se permite que um cliente seja alocado a mais que um terminal as chances de encontrar uma solução menor aumenta, devido ao problema tornar-se menos restrito.

A Figura 2 apresenta dois exemplos de rede do tipo *hub-and-spoke*, a primeira figura cada cliente só pode ser alocado a um único concentrador, enquanto que na segunda um cliente pode ser alocado a mais que um. Este exemplo foi apresentado por Ernst e Krishnamoorthy (1998), neste caso,  $n=25$  e  $p$  foi restrito a 4 concentradores. Neste

exemplo, o custo ótimo para o Problema de Localização de Concentradores (PLC) com alocação simples é 139197,17, no entanto, quando mudamos o problema e se permite a alocação múltipla (ou seja, um cliente ser alocado a mais que um concentrador) o ótimo passa a ser 135638,58. Em situações reais, por exemplo, o gerente de transporte de uma empresa com certeza optaria pelo problema com alocação múltipla.



**Figura 2 – Exemplo de rede com alocação única e múltipla (Ernst e Krishnamoorthy, 1998)**

Este trabalho tem como objetivo propor uma solução exata para o problema de Localização de concentradores com alocação múltipla. Neste trabalho será usado como solução inicial de referência para a CPLEX um método heurístico para a localização dos concentradores e um método de busca pelo menor caminho para a alocação dos nós não *hubs* aos concentradores.

A seguir pode ser visto o modelo matemático proposto por Campbell, J. E. (1994) para a representação do problema de localização de concentradores com alocação múltipla:

$$f(x) = \text{Min} \sum_i \sum_k \sum_l \sum_j w_{ij} c_{ijkl} x_{ijkl} \quad (1)$$

**Sujeito a:**

$$\sum_k H_k = p, \quad \forall k \in V \quad (2)$$

$$\sum_k \sum_l x_{ijkl} = 1, \quad \forall i, j \in V \quad (3)$$

$$\sum_l x_{ijkl} \leq H_k, \quad \forall i, j, k \in V \quad (4)$$

$$\sum_k x_{ijkl} \leq H_l, \quad \forall i, j, l \in V \quad (5)$$

$$H_k \in \{0,1\} \quad (6)$$

$$x_{ijkl} \geq 0 \quad \forall i, j, k, l \in V. \quad (7)$$

Em que:

- $V$  é conjunto de nós da rede;
- $w_{ij}$  é a quantidade de fluxo transferido entre os nós  $i$  e  $j$ ;
- $H_k$  é uma variável binária que assume valor 1 se o nó  $k$  for escolhido para ser um concentrador, ou zero caso contrário.

- A variável  $p$  representa o número de concentradores a serem definidos no conjunto  $V$ ;
- $x_{ijkl}$  é a fração da quantidade total de fluxo  $w_{ij}$  que é roteada via concentradores  $k$  e  $l$ . O custo por unidade de fluxo ao longo desta rota é dado por  $c_{ijkl}$  ( $c_{ijkl} = \lambda d_{ik} \alpha d_{kl} + \delta d_{lj}$ ).
- $\lambda$ ,  $\alpha$ ,  $\delta$  são, respectivamente, os custos de coleta, transferência e distribuição;
- $d_{ij}$  é a distância entre os nós  $i$  e  $j$ ;

Nesse modelo, a função-objetivo (1) estabelece que custo total a ser minimizado corresponda à soma dos custos de coleta, transferência e distribuição, a restrição (2) garante que a quantidade total de concentradores escolhidos será igual a  $p$ , as restrições (3) asseguram que o envio de alguma encomenda que sai de  $i$  e chega em  $j$  irá passar por uma única rota  $(k, l)$ , as restrições (4) e (5) garantem que se existe alguma encomenda a ser enviada do nó  $i$  para o  $j$  através de  $k$  e  $l$ , então  $k$  e  $l$  devem obrigatoriamente ser concentradores e as restrições (6) e (7) correspondem às condições de integralidade das variáveis de decisão.

## 2. Método VNS

O método de busca em vizinhança proposto por Mladenovic & Hansen (1997) é uma técnica de busca local que explora o espaço de soluções através de trocas sistemáticas de estruturas de vizinhança. Sua metodologia consiste em explorar vizinhanças gradativamente mais “distantes” da solução atual, a exploração de uma nova região somente acontece se um movimento de melhora é realizado. O pseudocódigo é apresentado pela Figura 3.

```

Procedimento VNS
  Seja  $s^0$  uma solução inicial e  $r$  o número de estruturas de vizinhança
   $s \leftarrow s^0$  {Solução corrente}
  Enquanto (Critério de parada não satisfeito) faça
     $k \leftarrow 1$ ; {Tipo de estrutura de vizinhança}
    Enquanto ( $k \leq r$ ) faça
      Gere um vizinho qualquer  $s' \in N^{(k)}(s)$ 
       $s'' \leftarrow \text{BuscaLocal}(s')$ 
      Se ( $f(s'') < f(s)$ )
        então  $s \leftarrow s''$ ;  $k \leftarrow 1$ 
        senão  $k \leftarrow k + 1$ 
      Fim-se
    Fim-enquanto
  Fim-enquanto
  Retorne  $s$ 
Fim-procedimento

```

Figura 3 – Pseudocódigo VNS

Neste trabalho foi desenvolvida uma estratégia do tipo VNS, capaz de resolver o problema de localização de concentradores com alocação múltipla. A exploração de vizinhança consiste em trocar a definição dos concentradores e a busca local determina o menor caminho para alocação dos outros nós aos respectivos concentradores.

### 3. Testes e Resultados

A verificação da eficiência do método implementado, baseou-se no conjunto de dados AP (Ernst e Krishnamoorthy, 1996). O conjunto de dados AP (*Australian Post*), proposto por Ernst e Krishnamoorthy (1996). Os valores dos custos de coleta, transferência e distribuição são respectivamente 3, 0,75 e 2. Os fluxos não são simétricos, ou seja,  $w_{ij} \neq w_{ji}$ , além disso, um cliente (spoke) pode enviar um e-mail a si próprio ( $w_{ii} \neq 0$ ).

Os testes realizados foram executados em um computador com processador Core2-Duo 2.0 GHz, com 2 GB de memória RAM, sob o sistema operacional Linux.

- **Opt** representa a solução ótima conhecida para o problema;
- **Sol** representa a melhor solução encontrada pelo método implementado;
- **TE** representa o tempo médio de execução total do algoritmo (em segundos), até que o critério de parada seja alcançado;

**Tabela 1 – Resultados CPLEX × LB**

Entrada		CPLEX 12		VNS+CPLEX	
N	P	Sol	TE	Sol	TE
20	4	131665,43	4,78	Opt	6,05
20	5	118934,97	4,40	Opt	5,62
20	6	107005,85	3,81	Opt	5,25
25	4	135638,58	16,33	Opt	19,90
25	5	120581,99	12,21	Opt	15,95
25	6	110835,82	10,40	Opt	14,22
40	2	173415,96	319,97	Opt	342,00
40	3	155458,61	422,89	Opt	466,00
40	4	140682,74	314,76	Opt	361,00
40	5	130384,74	222,96	Opt	256,00
40	6	122171,26	260,04	Opt	300,00

Na tabela 1 são apresentados os resultados obtidos pelo VNS+CPLEX e pelo CPLEX 12. Pelos testes realizados é possível verificar que apesar do uso de uma heurística na determinação de uma solução inicial, o tempo para encontrar o ótimo não houve melhora.

Foram realizados testes para  $n$  maiores que 50, porém o CPLEX não conseguiu obter uma solução devido à falta de memória. Como o método aqui proposto fazia uso de uma estratégia heurística foi possível obter soluções para entradas maiores, porém como o CPLEX não foi capaz de tratá-las optou-se por não apresentá-las, devido a essas não garantirem otimalidade.

### 4. Conclusões

O problema de localização de concentradores capacitado é um problema de Otimização Combinatória relevante, pois ocorre em diversas situações práticas em que o transporte

de alguma entidade (pessoas, dados, produtos, etc) precisa passar por um processo de agregação antes de ser distribuída ao seu destino. Boas soluções para o problema podem representar ganhos econômicos significativos para muitos setores empresariais.

O problema, no entanto, é conhecido ser da classe NP-difícil (Garey e Johnson, 1979) e algoritmos exatos para determinar a solução ótima do problema constituem um grande desafio, pois precisam utilizar métodos que exigem grande esforço computacional e podem ser impraticáveis para exemplares do problema de grandes dimensões.

Baseado nos estudos e testes realizado sobre a técnica *Local Branching (LB)* é possível identificar que uma das vantagens da utilização desse método é que ele pode começar a busca através de uma solução boa (obtida por uma metaheurística) (Fischetti *et al.*, 2004). No entanto uma das maiores dificuldades identificadas é que o CPLEX gasta a maior parte do seu tempo tentando provar que a solução encontrada é ótima, logo, acredita-se que um dos principais desafios constitui em definir melhores limitantes superiores e inferiores para o problema.

O principal foco desse trabalho foi verificar se uma heurística pode tornar o processo de busca pelo CPLEX mais rápido, porém podemos verificar que isso não ocorreu. Logo, para continuação desse trabalho pretende-se implementar a técnica LB usando outra técnica para inicialização das soluções de modo que possa ser resolvida eficientemente problemas de localização de concentradores com alocação múltipla.

## Referências

- Abdinnour-Helm, S. (1998) A hybrid heuristic for the uncapacitated hub location problem. *European Journal of Operations Research*, v. 106, p. 489-499.
- Abdinnour-Helm, S.; Venkataramanan, M.A. (1993) Using simulated annealing to solve the p-hub location problem. In: IRMIS Working paper, Decision and Information Systems Department, School of Business.
- Aykin, T. (1994) Lagrangian relaxation based approaches to capacitated hub-and-spoke network design problem. *European Journal of Operational Research*, v. 79, n. 33, p. 501-523.
- Campbell, J.E. (1994) Integer programming formulations of discrete hub location problems, *European Journal of Operational Research*, v. 72, p. 387-405.
- Cunha, C.B.; Silva, M.R. (2007) A genetic algorithm for the problem of configuring a hub-and-spoke network for a LTL trucking company in Brazil. *European Journal of Operational Research*, v. 179, p. 747-758.
- Ernst, A.; Krishnamoorthy, M. (1996) Efficient algorithms for the uncapacitated single allocation p-hub median problem. *Location Science*, v. 4, n. 3, p. 139-154.
- Ernst, A.T.; Krishnamoorthy, M. (1998) An Exact Solution Approach Based on Shortest-Paths for P-Hub Median Problems, *INFORMS Journal on Computing*, v.10 n. 2, p. 149-162, Feb.
- Ernst, A.T.; Krishnamoorthy, M. (1999) Solution Algorithms for the Capacitated Single Allocation Hub Location Problem, *Annals of OR*, v. 86, p. 141-159.
- Fischetti, M.; Polo, C.; Scantamburlo, M. (2004) A Local Branching Heuristic for Mixed-Integer Programs with 2-Level Variables, with an Application to a Telecommunication Network Design Problem. *Networks*, v. 44, n. 2, p. 61-72.

- Garey, M. R.; Johnson, D. S. (1979) *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*, San Francisco: W.H. Freeman.
- Kliniewicz, J. (1991) Heuristics for the p-hub median problem. *European Journal of Operations Research*, v. 79, p. 25-37.
- Mladenovic, N.; Hansen, P. Variable neighborhood search. *Comps. & Opns. Res.* 24, 11, 1097-1100, 1997.
- Smith, K.; Krishnamoorthy, M.; Palaniswami, M. (1996) Neural versus traditional approaches to the location of interacting hub facilities. *Location Science (Special Issue on Hub Location)*, v. 4, n. 3, p. 155-171.
- Topcuoglu, H.; Corut, F.; Ermis, M.; Yilmaz, G. (2005) Solving the uncapacitated hub location problem using genetic algorithms. *Computers and Operations Research*, v. 32, p. 967-984.