



20 e 21 de outubro
Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE
São José dos Campos - SP

Sobre Parabolicidade e Hiperbolicidade em Problemas Inversos: Método Genético e Variacional

**Leonardo Bacelar Lima Santos¹, Leonardo Dagnino Chiwiacowsky²,
Haroldo Fraga Campos Velho³**

¹Programa de Mestrado em Computação Aplicada – CAP
Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais – INPE

²Programa Interdisciplinas de Pós graduação em Computação Aplicada - PIPCA.
Universidade do Vale do rio dos Sinos - UNISINOS.

³Laboratório Associado de Computação e Matemática Aplicada – LAC
Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais – INPE

santoslbl@gmail.com, leondc@gmail.com, haroldo@lac.inpe.br

Abstract. *The phenomena of heat conduction (parabolic regime) and heat wave (hyperbolic regime - a finite thermal signal speed) are considered. Is presented the direct problems (building physics, mathematical formulation and numerical solution) and inverse (encoding gene and variational formulation) to estimate the initial condition.*

The variational formulation (Alifanov) for solving inverse problems, originally applied to heat conduction's problem (parabolic problem), doesn't produces a satisfactory solution in hyperbolic inverse problems - in which inaccuracies in the initial conditions are not eliminated over time. In Chiwiacowsky, 2005 was proposed a genetic algorithm (GA - stochastic global search method) with the epidemic operator to initialize an Variational Method (VM - by the Conjugate Gradient Algorithm - deterministic local search technique): Hybrid method (HM = GA + VM). Are here recovered the well-known results of the inversion by GA and VM to the problem of heat conduction (validation step), and presented original results of inversions for hyperbolic formulation, using both techniques. Are also made discussions about hybrid approaches.

Resumo. *São aqui discutidos os fenômenos de condução do calor (regime parabólico), e onda de calor (regime hiperbólico - velocidade finita do sinal térmico). São apresentados os problemas direto (construção física, formulação matemática e solução numérica) e inverso (codificação genética e formulação variacional- tipo Alifanov) para estimação de condição inicial.*

A formulação variacional para solução de problemas inversos, originalmente aplicada ao problema de condução do calor (problema parabólico), não produz

uma solução inversa satisfatória em problemas hiperbólicos - nos quais imprecisões nas condições iniciais não são eliminadas ao longo do tempo. Em Chiwiacowsky, 2005 foi proposto o uso de um Algoritmo Genético (AG - método estocástico de busca global) com o operador epidêmico para inicializar um Método Variacional (MV - via Método de Gradiente Conjugado - técnica determinística de busca local): Método Híbrido (MH=AG+MV). São aqui recuperados os bem conhecidos resultados da inversão via AG e MV para o problema de condução do calor (etapa de validação), e apresentados pela primeira vez (resultados originais) inversões para a formulação hiperbólica, usando ambas as técnicas. Ao final são proferidas discussões sobre abordagens híbridas.

Palavras-chave: equações diferenciais parciais parabólicas e hiperbólicas, problemas inversos, algoritmo genético, método variacional, transferência de calor

1. Introdução

Modelos matemáticos para fenômenos naturais frequentemente são construídos tendo como base Equações Diferenciais Parciais (EDP).

Uma EDP na variável dependente u e nas variáveis independentes x e y , é uma equação que pode ser posta na forma $F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0$ onde F é uma função das variáveis indicadas e pelo menos uma derivada parcial aparece na expressão.

Seja a EDP linear $Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu + G = 0$ onde os coeficientes são as funções A, B, C, D, E e F tal que $A^2(x, y) + B^2(x, y) + C^2(x, y) \neq 0$ e $G = G(x, y)$ uma função real definida sobre um aberto do R^2 ; associada a tal está o discriminante $\Delta = B^2(x, y) - 4A(x, y)C(x, y)$, responsável por sua classificação. Uma EDP é dita parabólica se $\Delta < 0$, elíptica se $\Delta = 0$, e hiperbólica se $\Delta > 0$ [1].

Fisicamente parabolicidade reflete a infinitude da velocidade do sinal e regime assintótico de equilíbrio; elipsidade está ligada a problemas estacionários, e hiperbolicidade a *shifts*, deslocamentos, com velocidade finita do sinal.

O problema de condução do calor é, normalmente, governado por uma equação parabólica - deduzida via princípios de conservação e pela lei de Fourier. Uma modificação na lei de Fourier para modelar a finitude do sinal térmico origina uma equação hiperbólica para propagação do calor [2] - uma onda amortecida, de comportamento semelhante à ondas mecânicas e eletromagnéticas em meios atenuantes.

Estes são exemplos de Problemas Diretos. Pode-se definir como Problema Direto a situação na qual “causas” geram “efeitos”, ex: em um material não dielétrico, quando é estabelecida uma diferença de potencial elétrico (“causa”) é gerada uma corrente (“consequência”), que pode ser observada (acessada - medida) experimentalmente. Se, entretanto, o objetivo for descobrir qual o valor da diferença de potencial elétrico que gerou um corrente medida, então tal situação é o Problema Inverso [3, 4].

Problemas inversos podem ser resolvidos, por exemplo, por:

- Métodos de regularização [5] - O critério dos mínimos quadrados não é suficiente para garantir um bom resultado de inversão, especialmente em casos nos quais há ruído experimental, devido ao fato de uma solução matemática que minimiza

a função custo geralmente fazer com que o modelo coincida com os dados de maneira exata. O método de regularização torna possível o controle da quantidade de suavidade que ocorre na solução: requer-se a melhor coincidência dos dados (termo advindo do critério dos mínimos quadrados), levando-se em consideração um certo grau de suavidade desejado - ou imposto por necessidade de consistência matemática ou fenomenológica,

- Métodos de otimização [6] - Nestes o objetivo é minimizar a discrepância entre o observável experimental e o estimado via problema direto, trata-se de um problema de otimização que usa como restrição o próprio modelo direto. O método de Gradiente Conjugado (MGC) via formulação de *Alifanov* [7, 8] é um exemplo¹, bem como metodologias baseadas em Inteligência Artificial, como Algoritmos Genéticos.

O método de *Alifanov*, originalmente aplicado à área térmica, não produz uma solução inversa satisfatória em problemas hiperbólicos - como vibrações mecânicas - nos quais imprecisões nas condições iniciais não são eliminadas ao longo do tempo, o que ocorre em problemas parabólicos, como a condução de calor [9]. Então foi proposto em Chiwiacowsky (2005) [10, 11, 12] o uso de um Algoritmo Genético (método estocástico de busca global [13], com o operador epidêmico [14]) para inicializar o MV via MGC (método determinístico de busca local): estratégia híbrida.

Alguns trabalhos já foram propostos no domínio da condução hiperbólica do calor, desde Pascal, 1992 [15]. Todavia nenhum estimando condição inicial usando a abordagem de *Alifanov*. Alguns destes trabalhos foram:

- Polesek-Karczewska, 2003 [16]. Apresenta distribuição de temperatura (problema direto) em empacotamento de esferas de diferentes materias, tanto por considerações a primeiros princípios, quanto numéricas e experimentais.
- Shen e Han, 2003 [17]. Aplicação da técnica TVD (total variation diminishing) para resolver o problema direto. No limite da aproximação convectiva a solução é calcula explicitamente, já no limite radiativo é usado um método numérico tipo Newton.
- Masood, 2006 [18]. Estimou condição inicial no problema em coordenadas cilíndricas via método de Picard.
- Huang e Hsin-HsienWu, 2006 [19]. Usaram a formulação de *Alifanov* para estimar condição de contorno. Conseguiram bons resultados independentemente da suposição inicial, e mais robusto frente a ruído nos dados de entrada do que os Algoritmos anteriores.
- Huang e Lin, 2008 [20]. Usaram a formulação de *Alifanov* para estimar simultaneamente duas condições de contorno. Os resultados são bons independentemente da sugestão inicial, e mesmo com presença de ruído nos dados de entrada.
- Huang e Lin, 2008 [21]. Usaram a formulação de *Alifanov* para estimar termo fonte. Os resultados são bons para sugestão inicial nula.
- Saleh e Al-Nimr, 2008 [22]. Resolveram o problema direto usando uma formulação variacional via transformada de Laplace.
- Yang, 2009 [23]. Estimaram condição de contorno no problema bidimensional, por um método baseado em diferenças finitas e no algoritmo de Newton-Raphson.

¹A formulação de *Alifanov* apresenta regularização intrínseca

São apresentadas a seguir a construção física, formulação matemática e solução numérica dos problemas diretos tratados (condução e onda de calor) e exibidos resultados de técnicas de inversão (genética e variacional) para estimação de condição inicial nos problemas.

2. Fundamentações físicas e soluções do problema direto

A seguir são construídos os problemas diretos de condução e onda de calor e exibido o esquema numérico de resolução.

2.1. Condução do calor

O princípio de conservação (equação da continuidade) para o transporte de calor na ausência de gradientes de pressão e densidade nos dá que a temperatura (T) varia temporalmente tendo como fonte (divergente) o fluxo de calor na substância, ponderado pela densidade (ρ) e pelo calor específico (c) desta (Eq. 1). A lei (fenomenológica) de Fourier apresenta o fluxo de calor como consequência do gradiente de temperatura entre diferentes pontos do meio, amplificado pelo coeficiente de condutividade térmica - κ (Eq. 2). A combinação destes dos alicerces estabelece a equação parabólica para a condução do calor (Eq. 3) [24].

$$\rho c \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{q}(x, t) = 0 \quad (1)$$

$$\vec{q}(x, t) = -\kappa \nabla T(x, t) \quad (2)$$

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} - \frac{\kappa}{\rho c} \nabla^2 T(x, t) = 0 \quad (3)$$

O problema direto da condução do calor pode ser assim definido:

Seja $T(x, t) \in C^2$ função real de variáveis reais definida no cartesiano entre o compacto $\Omega_x = [0, L]$ e o aberto $\Omega_t = [0, t_f)$, tal que

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} - \frac{\kappa}{\rho c} \nabla^2 T(x, t) = 0; x \in \Omega_x, t \in \Omega_t;$$

$$T(x, 0) = f(x); x \in \Omega_x;$$

$$\frac{\partial T(x, 0)}{\partial t} = 0; x \in \Omega_x;$$

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial x} = 0; x = 0, x = 1, t \in \Omega_t$$

Um exemplo de esquema para solução numérica deste problema, baseado em diferenças finitas (aproximação discreta via *Taylor*, centrada no espaço e avançada no tempo [25]), é:

- Seja N o número de pontos na discretização espacial, e M na temporal. Tome $h = L/N$, $k = tf/M$, $lambda = \frac{\kappa}{\rho c} * (k/(h^2))$;
- Para i de 0 a N faça
 $T[i][0] = f[ih]$;
 fim.
- Para j de 0 a $M - 1$ faça
 $u[0][j + 1] = 0$;
 Para i de 1 a $N - 1$ faça
 $u[i][j + 1] = u[i][j] + lambda(u[i + 1][j] - 2u[i][j] + u[i - 1][j])$;
 fim.
 $u[N][j + 1] = 0$;
 fim.

2.2. Onda de calor

A abordagem para a condução do calor em regime parabólico considera que um pulso de calor aplicado à superfície de um corpo é imediatamente sentido em todas as partes deste, não importando a distância: velocidade infinita de propagação [2]. Cálculos a primeiros princípios (baseados na teoria cinética dos gases) derivam a seguinte expressão, conhecida como equação de fourier modificada:

$$\tau \frac{\partial \vec{q}(x, t)}{\partial t} + \vec{q}(x, t) = -\kappa \nabla T(x, t) \quad (4)$$

onde τ é o tempo de relaxação - representa a existência de um tempo finito não nulo de acumulação de calor para se alterar a corrente térmica.

Combinando esta pressão com a Eq. 1 temos a equação hiperbólica para a condução do calor (Eq. 5) [2].

$$\tau \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial t^2} + \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} - \frac{\rho c}{\kappa} \nabla^2 T(x, t) = 0 \quad (5)$$

Tal formulação prevê um limite superior para a velocidade finita não nula (a) de propagação do sinal

$$a = \sqrt{\frac{\rho c}{\kappa \tau}} \quad (6)$$

No limite em que $\tau = 0$ a equação hiperbólica retorna a equação parabólica - a velocidade infinita de propagação do sinal. Valores típicos de τ para solidos dielétricos são da ordem de 10E-11 segundos [26].

O problema direto da onda de calor pode ser assim definido:

Seja $T(x, t) \in C^2$ função real de variáveis reais definida no cartesiano entre o compacto $\Omega_x = [0, L]$ e o aberto $\Omega_t = [0, tf)$, tal que

$$\tau \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial t^2} + \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} - \frac{\kappa}{\rho c} \nabla^2 T(x, t) = 0; x \in \Omega_x, t \in \Omega_t;$$

$$T(x, 0) = f(x); x \in \Omega_x;$$

$$\frac{\partial T(x, 0)}{\partial t} = 0; x \in \Omega_x;$$

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial x} = 0; x = 0, x = 1, t \in \Omega_t$$

Um exemplo de esquema para solução numérica deste problema, baseado em diferenças finitas (aproximação discreta via *Taylor*, centrada no espaço e avançada no tempo), é:

- Seja N o número de pontos na discretização espacial, e M na temporal. Tome $h = L/N, k = t f/M, \text{lambda} = \frac{\kappa}{\rho c} * (k/(h^2))$;
- Para i de 0 a N faça
 $T[i][0] = f[ih]$;
 fim.
- Para i de 1 a $N - 1$ faça
 $T[i][1] = \frac{1}{2} * \text{lambda}^2 (T[i + 1][0] + T[i - 1][0]) + (1 - \text{lambda}^2) u[i][0]$;
 fim.
- Para j de 1 a $M - 1$ faça
 $T[0][j + 1] = 0$;
 Para i de 1 a $N - 1$ faça
 $T[i][j + 1] = (2\tau/(2\tau + k)) * [2(1 - \text{lambda}^2) T[i][j] + \text{lambda}^2 (u[i + 1][j] + u[i - 1][j]) - u[i][j - 1] + (\frac{1}{2}k/\tau) u[i][j - 1]]$;
 fim.
 $T[N][j + 1] = 0$;
 fim.

3. Metodologia

A seguir é brevemente apresentada a codificação genética dos problemas e a formulação variacional.

3.1. Codificação genética

Idealizada em 1795 por John Henry Holland, a técnica dos AGs são metaheurísticas bio-inspiradas que, a partir de um conjunto inicial de soluções e através de operadores genéticos inspirados na teoria Darwinista da evolução por seleção na-natural: seleção, cruzamento e mutação - vão atualizando seu conjunto de soluções até que uma delas seja razoável: apresente, por exemplo, um erro inferior a uma tolerância escolhida.

A questão central na otimização via AGs é definir adequadamente os cromossomos e seus genes. O cromossomo é o elemento que compõe a população. Cada cromossomo deve corresponder a um e apenas um elemento do espaço de busca [4].

Seja para os problemas de propagação ou para os de onda de calor cada indivíduo da população corresponde a uma possível condição inicial para o problema: cada gen representa, portanto, o valor no espaço da temperatura inicial.

O AG aqui utilizado é do tipo não geracional, e foi implementado usando codificação real, seleção via torneio, mutação uniforme e cruzamento geométrico com crossover de ponto único [10]. O operador epidêmico [14] foi usado a cada 10 iterações sem melhora da melhor solução encontrada. O código foi escrito em linguagem Fortran 90, e executado em máquinas escalares.

3.2. Formulação de Alifanov

O método variacional é uma forte opção na solução de problemas inversos. Na sua implementação são desenvolvidos o problema de sensibilidade, o problema adjunto e as equações gradientes.

Visando a aplicação do método adjunto, assumindo disponíveis observáveis experimentais $Y(x, t)$ para instantes contínuos de tempo e m pontos espaciais (igualmente espaçados), define-se a seguinte forma funcional a ser minimizada:

$$J[f(x)] = \sum_{m=1}^{m=M} \int_{t=0}^{t=tf} [Y(x_m, t)_{f(x)} - Y(x_m, t)^{\text{Exp}}]^2 dt; \quad (7)$$

onde $Y(x, t)_{f(x)}$ e $Y(x, t)^{\text{Exp}}$ são vetores contendo, respectivamente, os valores do observável estimado (originado pela distribuição inicial $f(x)$ estimada) e medido (originado pela distribuição inicial $f^*(x)$ verdadeira e desconhecida).

Para definição do problema de sensibilidade, a condição inicial $f(x)$ deve ser perturbada por uma pequena variação, resultando em $f(x) + \Delta f(x)$, esta variação implicará também em uma variação nos valores do observável: $Y(x, t) + \Delta Y(x, t)$. O problema de sensibilidade é então obtido através da substituição, no problema direto, de $f(x)$ por $f(x) + \Delta f(x)$, e $Y(x, t)$ por $Y(x, t) + \Delta Y(x, t)$.

O problema de sensibilidade é dado pelo problema perturbado subtraído pelo não perturbado, como os problemas em questão são lineares, o resultado pode ser alcançado apenas substituindo o termo $Y(x, t)$ por $\Delta Y(x, t)$ no problema direto.

Para definição do problema adjunto a equação de restrição deve ser incorporada à forma funcional através do uso da técnica dos multiplicadores de *Lagrange*. Sendo assim, introduzindo o problema com restrição, obtém-se a forma Lagrangeana dada por:

$$J[T(x, t)_{f(x)}, \lambda(x, t)] = \sum_{m=1}^{m=M} \int_{t=0}^{t=tf} [T(x_m, t)_{f(x)} - T(x_m, t)^{\text{Exp}}]^2 dt \\ - \int_{x=0}^{x=1} \int_{t=0}^{t=tf} \lambda(x, t) \left[\tau \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial t^2} + \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} - \frac{\kappa}{\rho c} \nabla^2 T(x, t) \right];$$

Manipulando matematicamente esta expressão de forma a ter incremento estacionário em $J[T(x, t)_{f(x)}, \lambda(x, t)]$, e escrevendo as equações no domínio dos multipli-

cadores de Lagrange chegamos, para cada um dos problemas, a ²:

- Condução de calor:

$$\dot{\lambda} + \frac{\rho c}{\kappa} \frac{\partial^2 \lambda(x, t)}{\partial x^2} - 2 \sum_{m=1}^{m=M} \int_{t=0}^{t=tf} [T(x_m, t)_{f(x)} - T(x_m, t)^{\text{Exp}}]^2 dt \delta(x - x_m) = 0;$$

$$J'(x, t) = \frac{1}{tf} \lambda(x, 0);$$

- Onda de calor:

$$\tau \ddot{\lambda} + \dot{\lambda} + \frac{\rho c}{\kappa} \frac{\partial^2 \lambda(x, t)}{\partial x^2} - 2 \sum_{m=1}^{m=M} \int_{t=0}^{t=tf} [T(x_m, t)_{f(x)} - T(x_m, t)^{\text{Exp}}]^2 dt \delta(x - x_m) = 0;$$

$$J'(x, t) = \frac{1}{tf} [\lambda(x, 0) - \tau \dot{\lambda}(x, 0)];$$

4. Resultados e discussões

Na presente seção são apresentados os resultados de estimação de condição inicial (função triangular) para os dois problemas (condução e onda de calor), usando os dois métodos (Algoritmo Genético e Método Variacional).

Na Figura 1a são recuperados os resultados bem conhecidos da inversão para o problema da condução do calor via Algoritmo Genético [27], sem e com regularização, em ambos os casos com ruído do tipo branco (gaussiano, com média nula) multiplicativo e de intensidade de 0.5%. A inclusão de um termo regularizador na função custo melhorou o resultado da estimação da condição inicial do problema.

Na Figura 1b exibe-se os resultados também já clássicos da literatura do Método Variacional, sem e com ruído (branco, multiplicativo, de intensidade de 0.5%). A estimação para um perfil com ruído apresenta qualidade bastante inferior quando comparada com a livre de ruído.

Na Figura 2a são apresentados resultados inéditos da inversão para o problema da onda (eq. hiperbólica) do calor, via Algoritmo Genético, sem e com regularização. Assim como no caso parabólico, a inclusão de um termo regularizador na função custo melhorou o resultado da estimação. Percebe-se que o efeito do mesmo nível de ruído é mais drástico no problema hiperbólico que no parabólico: o nível de ruído (branco, multiplicativo) no caso hiperbólico foi 5 vezes menor que no caso parabólico.

Na Figura 2b exibe-se os resultados também inéditos da inversão para o problema da onda (eq. hiperbólica) do calor, agora para o Método Variacional, sem e com ruído. A intensidade do ruído também neste caso hiperbólico foi de apenas 0.1%. O problema hiperbólico, novamente, apresentou maior sensibilidade frente à presença de ruído.

²Vale a pena ressaltar que tanto o problema direto quanto o problema adjunto para o caso hiperbólico recupera o caso parabólico quando $\tau = 0$.

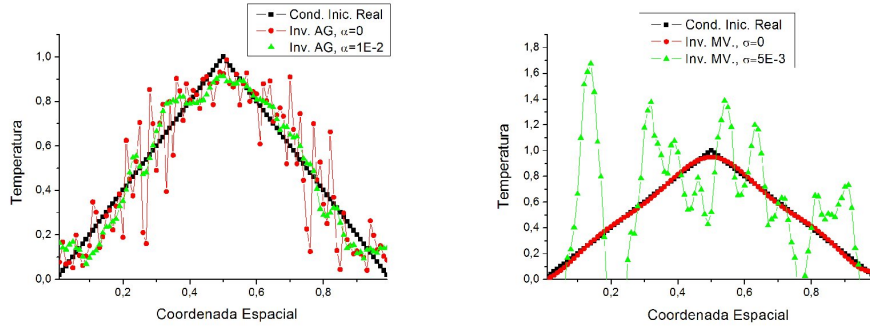


Figura 1. Resultados da inversão para o problema parabólico via AG (a) e MV (b). α representa o valor do parâmetro de regularização e σ o nível de ruído.

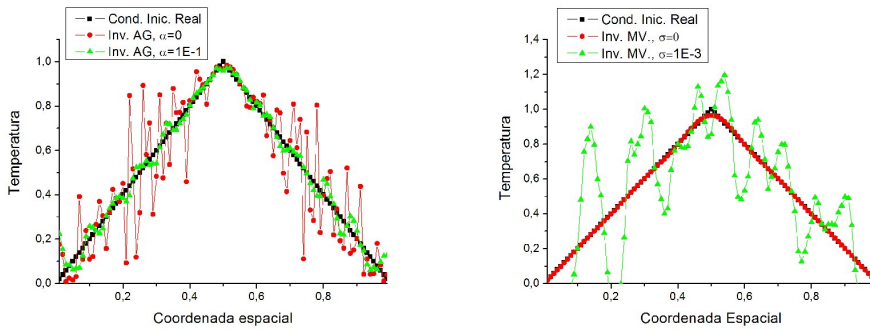


Figura 2. Resultados da inversão para o problema hiperbólico via AG (a) e MV (b). α representa o valor do parâmetro de regularização e σ o nível de ruído.

Uma comparação entre os métodos é apresentada na *Figura 3*. No eixo das ordenadas está o desvio de estimação na condição inicial (próprio valor da função custo para o AG e do funcional de mínimos quadrados para o MV) em função de cada miliminuto (*Fig 3b*). Para problemas de baixa complexidade é aconselhável, neste contexto, o uso do MV, uma vez que o tempo computacional necessário para tal método obter um resultado melhor do que o do AG pode ser alcançável a tempo razoável. Já para problemas muito complexos torna-se interessante o uso do AG, pois para pouco tempo computacional o resultado deste método é melhor do que o do MV.

5. Conclusões e perspectivas

Os resultados clássicos da literatura para o problema da propagação do calor seja usando o AG seja via MV foram recuperados. Resultados inéditos condizentes à versão hiperbólica do problema foram apresentados, tanto via Algoritmo Genético quanto pelo Método Variacional. Foram analisados o efeito do ruído em ambos os métodos, e da regularização no AG.

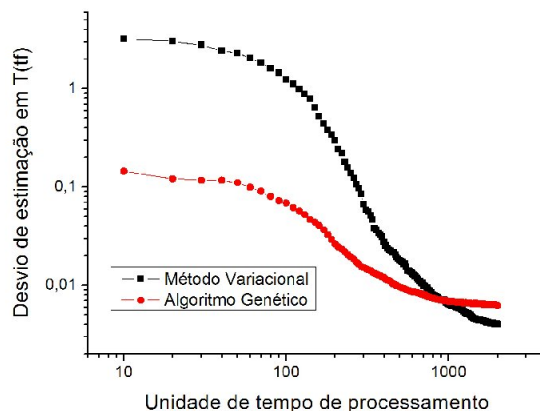


Figura 3. Desvio de estimação na condição inicial (próprio valor da função custo para o AG e do funcional de mínimos quadrados para o MV) em função de cada miliminuto.

A comparação entre os métodos apresentada na Figura 3 encoraja o uso de uma metodologia híbrida, na qual a sugestão inicial para o MV é dada pela solução parcial do AG: o AG é executado algumas poucas vezes (obtendo resultado melhor do que o que seria obtido via MV), e então tal solução parcial é passada ao MV: assim as vantagens dos métodos isolados são combinadas - melhor resultado do AG para poucas iterações, e maior velocidade de melhora da solução no caso do MV.

Tal incentivo à estratégia híbrida é complementar ao expresso por Chiwiacowsky (2005) [10] e exposto nos resultados das Figuras 2a e 2b: a presença de ruído afeta bastante os problemas hiperbólicos (quando comparados aos parabólicos, nos quais tais imprecisões são eliminadas com a integração no tempo) - o uso de um método de busca global para inicializar um de busca local faz com que uma sugestão inicial mais próxima à bacia de mínimo da função custo seja usada, desta forma é menos drástico o efeito do ruído do dado experimental.

Como perspectivas está o teste de outros tipos de condição inicial, a inversão via método híbrido e o uso de uma implementação paralela do AG [27] - que configura o método Paralelo-Híbrido.

Referências

- [1] V. Iório (2001): EDP: Um Curso de Graduação. Publicação IMPA. ISBN 85-244-0065-X.
- [2] L.D. Chiwiacowsky (2002): Uso da Função de Transferência em problemas de condução do calor com a Lei de Fourier modificada. Dissertação de Mestrado em Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Brasil.

- [3] H.F. de Campos Velho (2008): Problemas Inversos em Pesquisa Espacial, Mini-curso Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional (CNMAC), Belém (PA), Brasil, 120 p.
- [4] Santos, L. B. L., Miranda, J. G. V. POGA: POGA: uma ferramenta genérica para Problemas Inversos e Designer Ótimo. (2010) Submetido ao XII Simpósio de Aplicações Operacionais em Áreas de Defesa (SIGE), São José dos Campos, Brasil, 2010.
- [5] A. N. Tikhonov, V. Y. Arsenin (1977): Solutions of Ill-Posed Problems. Winston & Sons. Washington, D.C.
- [6] M. Bazarra *et al* (1990): Linear programming and network flows. John Wiley & Sons, New York.
- [7] O.M. Alifanov (1974): Solution of an Inverse Problem of Heat Conduction by Iteration Methods, Journal of Engineering Physics, 26, 471-476
- [8] O.M. Alifanov, V.V. Mikhailov (1978): Solution of the Nonlinear Inverse Thermal Conductivity Problem by Iteration Method, Journal of Engineering Physics, 35, 1501-1506.
- [9] L.D. Chiwiacowsky, H.F. de Campos Velho (2003): Different Approaches for the Solution of a Backward Heat Conduction Problem. Inverse Problems in Engineering, 11(3), 471-494.
- [10] L.D. Chiwiacowsky (2005): Método Variacional e Algoritmo Genético em Identificação de Danos Estruturais. Tese de Doutorado em Computação Aplicada, INPE, São José dos Campos, Brasil.
- [11] L.D. Chiwiacowsky, P. Gasbarri, H.F. de Campos Velho (2008): Damage Assessment of Large Space Structures Through the Variational Approach. Acta Astronautica, 62, 592-604.
- [12] L. B. L. Santos, L. D. Chiwiacowsky, H. F. de Campos Velho (2010): Análise de robustez do método híbrido de estimação de dano estrutural. Anais do DINCON 2010.
- [13] Goldberg, E. D., Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning. Addison-Wesley Longman Publishing Co., 1989.
- [14] F. L. L. Medeiros (2003): Algoritmo Genético Híbrido como um método de busca de estados estacionários de sistemas dinâmicos. Dissertação - INPE-CAP.
- [15] Pascal, H. A nonlinear model of heat conduction. J. Phys. A: Math. Gen. 25 (1992), 939.
- [16] Polesek-Karczewska, S. Effective thermal conductivity of packed beds of spheres in transient heat transfer. HEAT AND MASS TRANSFER, 39, 5-6 (2003), 375-380.
- [17] Shen, W., Han, S. A numerical solution of two-dimensional hyperbolic heat conduction with non-linear boundary conditions. Heat and Mass Transfer, 39 (2003), 499-507. DOI 10.1007/s00231-003-0414-3
- [18] Masood, K. Recovery and regularization of initial temperature distribution in a two-layer cylinder with perfect thermal contact at the interface. Proc. Jpn. Acad., Ser. B, 82 (2006).

- [19] Huang, C., Hsin-HsienWu. An inverse hyperbolic heat conduction problem in estimating surface heat flux by the conjugate gradient method. J. Phys. D: Appl. Phys. 39 (2006), 4087-4096.
- [20] Huang, C. H., Lin, C. Y. Inverse Hyperbolic Conduction Problem in Estimating Two Unknown Surface Heat Fluxes Simultaneously. JOURNAL OF THERMOPHYSICS AND HEAT TRANSFER, 22, 4 (2008), 766-774.
- [21] Huang, C. H., Lin, C. Y. An iterative regularization method in estimating the unknown energy source by laser pulses with a dual-phase-lag mode. INTERNATIONAL JOURNAL FOR NUMERICAL METHODS IN ENGINEERING, 76, 1 (2008), 108-126.
- [22] Saleh, A. A., Al-Nimr, M. Variational formulation of hyperbolic heat conduction problems applying Laplace transform technique. International Communications in Heat and Mass Transfer, 35 (2008), 204-214.
- [23] Yang, C. Direct and inverse solutions of the two-dimensional hyperbolic heat conduction problems. Applied Mathematical Modelling, 33 (2009), 2907-2918.
- [24] V. Wylen *et al* (2003): Fundamentos da termodinâmica. Edição 7. ISBN: 8521204906
- [25] J. D. Hoffman (2001): Numerical Methods for Engineers and Scientists CRC Press. Edição 2. ISBN: 978-0824704438
- [26] Kaminsk, W., 1990. Hyperbolic heat conduction equation for materials with a nonhomogeneous inner structure, Journal of Heat Transfer, vol. 112, pp. 555-560.
- [27] S. Sambatti (2004): Diferentes Estratégias de Paralelização de um Algoritmo Genético Epidêmico Aplicadas na Solução de Problemas Inversos em Transferência de Calor. Dissertação de Mestrado em Computação Aplicada, INPE, São José dos Campos.