



20 e 21 de outubro
Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE
São José dos Campos - SP

Modelos dinâmicos espaciais em programação funcional

Sérgio S. Costa^{1,3}, Ana Paula Aguiar², Gilberto Câmara², Tiago Carneiro

¹Programa de Doutorado em Computação Aplicada – CAP, INPE

²Earth System Science Center (CST)
Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais – São José dos Campos, SP

³Departamento de Matemática e Computação
Universidade Federal de Itajubá - Itajubá, MG

{anapaula,gilberto}@dpi.inpe.br, scosta@unifei.edu.br

Resumo. Modelos espacialmente explícitos são simulações computacionais que descrevem algum fenômeno que tem uma ocorrência bem definida no espaço e no tempo. Desse modo, o desflorestamento é um fenômeno espaço-temporal. Ele ocorre em uma determinada localização no espaço e no tempo. Então, é possível fazer modelos que buscam entender este fenômeno com relação a estas duas variáveis. Por exemplo, aproximação a infra-estruturas afeta o desflorestamento? Ou um incentivo de algum programa político que ocorre em um determinado período do tempo? Este trabalho descreve alguns elementos básicos para construir modelos espacialmente explícitos.

Palavras-chave: Simulação, Programação Funcional, Modelos espaciais.

1. Introdução

Modelagem é o processo cognitivo no qual os princípios de uma ou mais teorias são aplicados para se produzir um modelo de um determinado fenômeno real. Fenômeno é qualquer fato ou situação concreta de interesse científico, passível de descrição ou explicação como, por exemplo, os fenômenos meteorológicos. Grandes partes destes fenômenos variam tanto no espaço como no tempo, e são conhecidos como fenômenos espaços-temporais, por exemplo, o movimento de um ciclone ou a mudança de uso da terra em uma determinada região. Estudar novos modelos de representação de fenômenos espaço-temporal é um grande desafio computacional e requer o desenvolvimento de novos modelos que considerem ambas as dimensões.

Durante a modelagem, existe sempre a necessidade de especificar a estrutura e o comportamento do modelo idealizado. Existem duas visões de representação que são trabalhadas com pouca ou nenhuma interação: computacional e matemática. Simulações computacionais são representadas utilizando-se linguagens de programação, usualmente imperativas, que descrevem como um processo ocorre, através de uma seqüência de

passos no tempo. Essas simulações computacionais quando aplicadas a dados espaciais são definidas como modelos espacialmente explícitos, por exemplo, (Verburg 1999), (Aguiar, Câmara, and Escada 2007) e (Soares-Filho 2002). Enquanto que os modelos matemáticos geralmente são especificados na forma de equações que descrevem as estruturas algébricas e suas relações. Alguns trabalhos que compartilham dessa visão utilizam linguagens funcionais que tem características declarativas, permitindo descrever “o que” ao invés de “como”, por exemplo (Frank 1999), (Frank 2005), (Winter and Frank 1999) e (Winter and Nittel 2003). Neste trabalho é proposta a integração de ambas as abordagens ou visões (computacionais e matemáticas) para descrever modelos espacialmente explícitos.

2. Modelos dinâmicos espaciais em programação funcional

2.1. Breve descrição da sintaxe

Neste trabalho foi utilizada a linguagem de programação funcional Haskell. Antes de prosseguir com as definições deste trabalho, será necessário considerar os seguintes elementos sintáticos desta linguagem:

- Uma função é escrita na forma $f :: A \rightarrow B \rightarrow C$. Onde f é uma função que tem duas entradas do tipo (A e B) e uma saída do tipo C.
- O símbolo ‘[]’ é utilizado para lista e ‘()’ para tuplas.
- O símbolo ‘=’ é utilizado para relacionar uma expressão a um dado nome e ‘==’ é a operação de igualdade.
- A palavra chave *type* é usada para criar um novo tipo que é sinônimo do tipo do lado direito de ‘=’.

Para mais detalhes sobre Haskell, consultem as seguintes referências: (Peyton Jones, Hughes *et al.*, 1999; Peyton Jones, 2002; Daume, 2004)

2.1 Modelos discretos

Modelos discretos são assim denominados devido a suas entidades só mudarem de estado a cada instante t e $T=[t_1, t_2, \dots, t_n]$. Os modelos espaciais existentes na literatura são em geral modelos discretos. Neles, o tempo representa passos discretos no tempo, podendo representar anos, meses ou dias. Em Haskell, conjuntos podem ser expressos através de listas usando uma notação similar a matemática, por exemplo: [1997, 1998, 1999, 2000] ou [1997...2000]. Neste trabalho para uma lista discreta e não vazia são definidas duas operações: *now* e *fut*. Onde, para um dado conjunto $[t_1, t_2, \dots, t_n]$ a operação *now* retorna t_1 e a operação *fut* retorna $[t_2, \dots, t_n]$.

Dado uma variável no tempo t , os valores dessa variável para os instantes $[t_1, t_2, \dots, t_n]$ é o conjunto $[v_1, v_2, \dots, v_n]$. Estes valores são calculados a partir da seguinte função:

Essa função descreve uma dependência ou retroalimentação entre os tempos t e $t+1$:

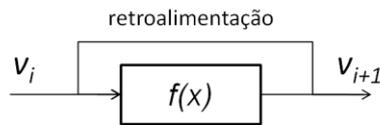


Figura 1. Sistema dinâmico discreto

Define-se então nesse trabalho uma simulação discreta em termos de uma tripla:

Onde:

- T é um conjunto discreto e finito de instante
- V é um valor escalar ou multivalorado; espacial ou não espacial
- F é uma função , que descreve o comportamento do modelo a cada passo do tempo.

A ligação entre os três elementos é descrita pela seguinte função recursiva:

Esta definição não é restrita a um determinado tipo de modelo, podendo ser aplicada tanto em valores numéricos quanto em valores espaciais. Por exemplo, essa definição poderia ser aplicada a modelos que descrevem o processo de desflorestamento para um dado tempo, como mostrado na Figura 2.

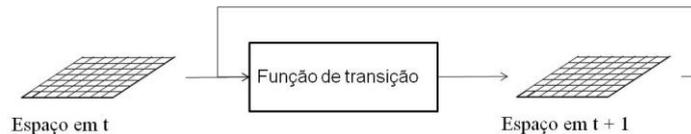


Figura 2. Sistema dinâmico discreto aplicado a mudança de uso e cobertura

A função dada anteriormente pode ser mapeada para programação funcional como uma função genérica ou paramétrica. Contudo, em aplicações reais é possível executar diversas outras operações para cada passo do tempo. Por exemplo, pode-se desejar salvar ou visualizar os resultados, Figura 3.

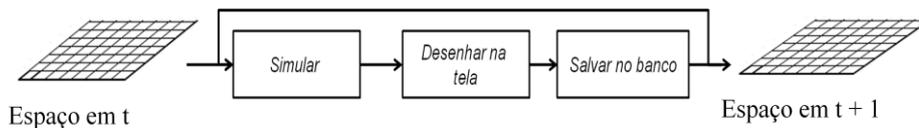


Figura 3. Diferentes ações aplicadas ao mesmo dado de entrada e no mesmo tempo t.

Em programação funcional a noção de seqüência de ações é expressa pelo formalismo de mônadas. Wadler (1990) propôs mônadas para estruturar programas escritos em linguagens funcionais. O uso de mônadas permite uma linguagem funcional simular um comportamento de linguagens imperativas, com controle de estado e efeitos colaterais (Thompson, 1999). O uso de mônadas possibilitou ao Haskell se manter puramente funcional lidando com dados de entrada e saída. A função *sim* foi descrita em Haskell usando essa abstração:

```
sim :: (Monad m) -> [t] -> (t -> s -> m s) -> s -> m s
sim ts f s
    | (null ts) = return s
```

```
| otherwise = return s >= f (now ts) >= sim (fut ts) f
```

De modo geral, o que diferencia um modelo espacial dos demais é que no primeiro os valores de entrada são entidades espaciais e as funções de transição operações sobre essas entidades. Entretanto, na próxima seção será descrito algumas estruturas que podem guiar a construção destes modelos em programação funcional.

2.2 Modelos espaciais dinâmicos

Nos modelos espaciais dinâmicos, como em diversos outros, podem-se distinguir duas principais abordagens. Os modelos centralizados ou *top-down*, e os distribuídos ou *bottom-up*. Enquanto na abordagem *top-down* o modelo descreve o comportamento de todo o sistema, na abordagem *bottom-up* esse comportamento é descrito individualmente para cada entidade e propagado para todo o sistema. Nos modelos espaciais dinâmicos, especificamente os de mudança de uso e cobertura, os sistemas são regiões na qual se deseja encontrar leis que possam explicar as mudanças temporais nos elementos da paisagem. Por exemplo, nos modelos aplicados em áreas urbanas busca-se encontrar regras de mudança entre áreas de uso comercial, industrial e residencial (Couclelis, 1997; White, Engelen *et al.*, 1997; Batty, 1999; Almeida, Monteiro *et al.*, 2003; Barros, 2004). Diferentemente, nos modelos rurais a transição de uso a ser modelada é em geral entre floresta, agricultura familiar e agro-comércio (Verburg, Veldkamp *et al.*, 1999; Briassoulis, 2000; Kok e Veldkamp, 2001; Veldkamp e Lambin, 2001; Verburg, Schot *et al.*, 2004; Aguiar, 2006; Santé, 2010 #2506).

Nos modelos espaciais dinâmicos, a área de estudo é discretizada em unidades espaciais, pixels, pontos, polígonos ou células. Na abordagem *top-down* a função de transição toma como valor de entrada um conjunto dessas entidades espaciais em um tempo t_i e retorna o estado destas entidades para o tempo t_{i+1} . Nos modelos de mudança de uso e cobertura a abordagem *top-down* é ainda a mais empregada, por exemplo, CLUE (Veldkamp e Fresco, 1996), CLUE-s (Verburg, Soepboer *et al.*, 2002), DINAMICA (Soares-Filho, Cerqueira *et al.*, 2002) e RIKS (White e Engelen, 2000). De modo geral, nestes modelos a função de transição tem dois principais argumentos: a quantidade de mudança e uma função de potencial. As funções de potenciais de mudança são dadas por uma equação matemática, estatística ou por redes neurais que correlacionem as mudanças a um conjunto de variáveis, como distancia a estradas, rios, portos e cidades. Então, dado estes dois argumentos a função de transição calcula o potencial de mudança para cada entidade e muda uma determinada quantidade. Esta quantidade é dada por uma função que determina a quantidade de mudança em cada passo do modelo, conhecido também como função de demanda. Nos modelos encontrados na literatura, a função de demanda e de potencial não são definidas explicitamente como argumentos da função de transição. Nestes modelos, as funções de potencial e de demanda não foram escritas separadamente, não permitindo a combinações entre diferentes funções de demanda e de potencial. Em, (Costa, Aguiar *et al.*, 2009), os autores mostraram as similaridades destes modelos, mostrando que ao tratar essas funções como argumentos da função de transição aumentam as possibilidades de construções de diferentes modelos.

Na abordagem *bottom-up*, a função de transição toma como valor de entrada cada entidade da área de estudo individualmente. Um exemplo muito utilizado para ilustrar esta abordagem são os autômatos celulares, mais especificamente o jogo da vida. Em modelos de mudança de uso e cobertura, principalmente em áreas urbanas, os

autômatos celulares são ainda muito utilizados (Santé, García *et al.*, 2010). Nestes modelos é comum que a função de transição utilize a vizinhança como parâmetro. Por exemplo, no jogo da vida, a transição de estado de cada célula utiliza os números de vizinhos como parâmetro para decidir o seu próximo estado. Deste modo, os modelos são aplicados sobre cada entidade em um nível micro resultando em um padrão no nível macro. Esse fenômeno é conhecido como emergência, é a característica mais importante desta abordagem.

Alguns autores têm apontados uma série de críticas sobre o uso de autômatos celulares em modelos de mudança de uso e cobertura (Couclelis, 1997; Takeyama e Couclelis, 1997; Couclelis, 1999). A principal crítica é que em muitos destes modelos existe uma relação de “um para um” entre as células e as propriedades urbanas ou rurais. Então, eles teriam como pressupostos de que o espaço é homogêneo. Além disso, nestes modelos a vizinhança é estacionária e as regras de transição são universais, ou seja, a mesma função de transição é aplicada em toda área de estudo. Alguns autores têm proposto o emprego de modelos baseados em agentes como alternativas aos autômatos celulares (Parker, Berger *et al.*, 2001; Huigen e Fischer, 2003; Castella, Boissau *et al.*, 2005; Matthews, Gilbert *et al.*, 2005; Parker, Daniel G. Brown *et al.*, 2006; Robinson, Brown *et al.*, 2007; Valbuena, Verburg *et al.*, 2008). Esta abordagem teria o potencial de resolver as limitações apontadas anteriormente, onde os agentes podem:

- a) Representar entidades espaciais com diferentes formas (espaço não é homogêneo).
- b) Relacionar-se entre si de diferentes formas (vizinhança não estacionarias).
- c) Possuir diferentes comportamentos (regras de transição não universais).

Neste trabalho, argumentamos que com o uso de linguagens funcionais é possível escrever um autômato celular que mantém a sua formalização e simplicidade e atenda as principais limitações apontadas anteriormente.

3.3 Função de transição nos modelos bottom-up

Dado uma área de estudo S , composta por um conjunto de entidades espaciais s , onde $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$. Em modelos *bottom-up*, a função de transição tem como entrada um valor do tipo s , retornando um novo valor do mesmo tipo:

$f :: s \rightarrow s$

Como discutido anteriormente, o fenômeno conhecido como emergência requer que exista uma relação entre as entidades espaciais e que esta relação tenha efeito no valor de saída da função de transição. Nos autômatos celulares é comum o emprego de vizinhanças simples, como *Moore* ou *Von Neuman*. Isso se deve ao fato de que nestes modelos o espaço é representado por uma grade regular, de pixels ou células. Entretanto, alguns fenômenos podem ser preferencialmente representados por objetos que possuem delimitação. Por exemplo, cidades, estados e propriedades agrícolas. A Figura 4 ilustra um conjunto de polígonos que representa propriedades agrícolas de diferentes tamanhos e formas. Observe que no caso da representação por células seria necessário definir quais células estaria contido em cada propriedade.

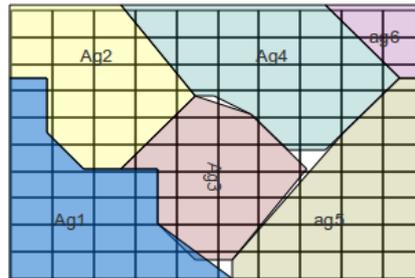


Figura 4. Exemplo de delimitações de propriedades agrícolas

O espaço e as relações são dois elementos indistinguíveis, dado que são as relações que descrevem as configurações espaciais. Por exemplo, em modelos espaciais é comum utilizar uma relação no espaço euclidiano como, por exemplo, adjacência. Entretanto, diversos outros autores têm apontado que em aplicações reais é necessário considerar outros tipos de relações (Figura 5) que não seja unicamente espacial (Takeyama e Couclelis, 1997; O'sullivan, 2001; Aguiar, Câmara *et al.*, 2003).

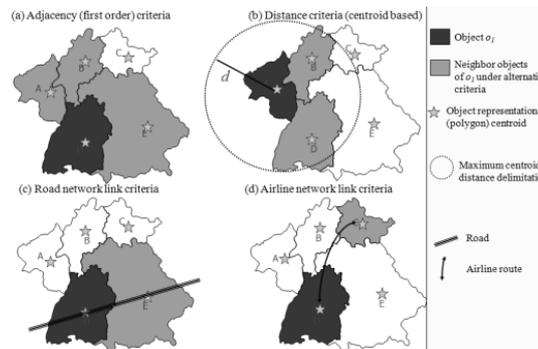


Figura 5. Exemplo de relações entre entidades

Na Figura 5 são apresentados exemplos de diferentes formas de relação entre entidades espaciais: a) relação de adjacência, b) distância entre os centróides, c) intersecção com estradas e d) ligações aéreas. Essas diferentes relações descrevem o que alguns autores referem-se como espaço relativo, ou seja, o espaço descrito pelas relações entre as entidades (Takeyama e Couclelis, 1997).

Neste trabalho propomos o emprego de predicados binários como argumentos das funções de transição a fim de permitir que os autômatos celulares sejam aplicados sobre espaços não homogêneos e com vizinhança não estacionária. O uso de predicados binários já foi utilizado com objetivo de generalizar as operações focais e zonais definido por (Tomlin, 1983), como operações baseados em predicados (Câmara, Palomo *et al.*, 2005; Costa, Câmara *et al.*, 2007). Entretanto, neste trabalho esse conceito será utilizado tanto para tratar relações espaciais quanto não espaciais. A relação pode ser definida em termos de um operador espacial aplicado as posições de $s1$ e $s2$, como: {'disjoint', 'equal', 'touch', 'inside', 'overlap', 'contains', 'intersects'}.

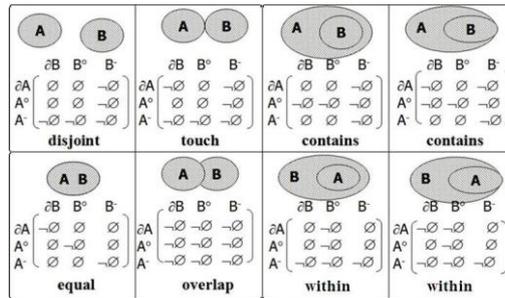


Figura 6 Diferentes predicados espaciais. Fonte: (Egenhofer e Herring, 1991)

Além de operadores espaciais, é possível definir predicados que considere uma relação não espacial. Dado que cada entidade espacial pode possuir um conjunto de valores não espacial, pode-se então relacioná-las através destes valores. Por exemplo, se S descreve um conjunto de propriedades rurais, então pode existir um valor em que informe se aquela propriedade é familiar ou não. Então, é possível usar este valor para restringir a relação somente entre as propriedades rurais do mesmo tipo, ou usar ambos operadores conjuntamente. A definição destes predicados é essencial a modelagem, dado que ela descreve a abrangência da relação entre as entidades que pode ser considerada na aplicação da função de transição. Com o uso de predicados, possibilitamos uma gama de variedade de formas de construir as relações baseadas em predicados espaciais ou não espaciais. Os predicados binários permitem um rearranjo espacial que vai além noção de espaço euclidiano.

Deste modo, a função de transição f é reescrita considerando dois parâmetros adicionais:

$$f :: [s] \rightarrow p \rightarrow s \rightarrow s$$

O primeiro parâmetro é um conjunto de entidades espaciais que é o espaço de referência. Este espaço representa o conjunto de entidades espaciais que pode estar relacionada com s . O espaço de referencia não é necessariamente o mesmo espaço da área de estudo do modelo. O predicado p avalia a relação entre s e o conjunto de entidades do espaço de referencia. Com essa definição é possível escrever modelos de autômatos celulares para regiões não homogêneas e com vizinhança não estacionária. Outra limitação apresentado anteriormente para os modelos autômato celulares era com relação a regras de transição universais. Esta limitação é também superada, dado que é possível construir mais de uma regra de transição e aplicá-las apenas a um sub-conjunto de entidades da área de estudo. Por exemplo, considere um espaço composto por um conjunto de polígonos que represente propriedades rurais. Cada propriedade rural possui um atributo que a classifique como pertencente a um grande ou a um pequeno proprietário. Com este atributo é possível aplicar uma regra de transição diferente para cada um destes grupos.

3. Experimentos

3.1 Jogo da vida

Um dos autômatos celulares mais citados na literatura foi proposto em 1970 pelo matemático John Conway e recebeu o nome de “Jogo da Vida”. Este autômato é um exemplo de um modelo que é capaz de criar padrões complexos através de regras simples. Neste modelo cada entidade tem dois valores possíveis, vivo ou morto.

```
data Estado = Vivo | Morto deriving (Eq, Show)
```

A função de transição do jogo da vida é simples e elegante:

- Qualquer célula viva com menos de dois vizinhos vivos morre de solidão.
- Qualquer célula viva com mais de três vizinhos vivos morre de superpopulação.
- Qualquer célula com exatamente três vizinhos vivos se torna uma célula viva.
- Qualquer célula com dois vizinhos vivos continua no mesmo estado para a próxima geração.

Essa função pode ser descritas em Haskell com a mesma elegância:

```
vida :: [s] -> (s->s->bool) -> s
vida w p c
  | v > 3 = morre c
  | v < 2 = morre c
  | v == 3 = vive c
  | otherwise = c
where
  v = vivos r
  r = (filter (\x -> x/=c) (select w c p ))
```

A função de transição “vida” pode ser aplicada em um espaço regular e com relação de vizinhança *Moore*:

```
glider = [...]

m2 t s = do
  let s' = map (vida s moore) s
  return s'

main = do { sim [1..10] m2 glider }
```

A mesma função de transição pode ser aplicada a um espaço não regular, neste caso usando a operação espacial de intersecção. Os resultados para quatro iterações podem ser vistos na Figura 9.

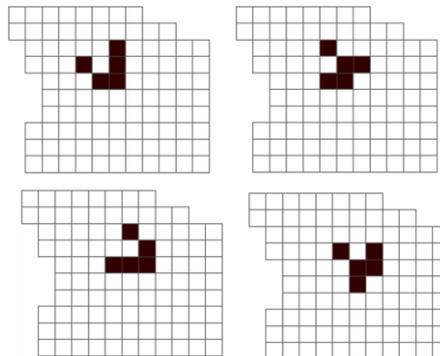


Figura 7 Padrão glider em um espaço celular irregular

O experimento da figura 9 usou a biblioteca TerraHS (Costa, Câmara *et al.*, 2007), que provê acesso a banco de dados espaciais além de um conjunto de operadores espaciais.

3.2. Modelo de difusão

A função de transição descrita na seção 3.1 foi aplicada sobre um espaço irregular, porém as entidades espaciais eram células regulares. Para exemplificar o emprego sobre entidades espaciais que não são células regulares, foi escrita uma função de transição que descreve um processo simples de difusão. Nessa função de transição, se uma célula tem mais de um vizinho no estado vivo, então ela vive:

```
difusao :: [s] -> (s->s->bool)-> s
difusao w p c
  | v > 0 = vive c
  | otherwise = c
  where
    v = vivos r
    r = filter (\x -> p x c) w
```

Para este exemplo, o espaço de entrada foi um conjunto de polígonos lidos de um banco de dados espacial, e a relação utilizada foi o predicado espacial de intersecção. O resultado dessa função de transição para quatro iterações é mostrado na Figura 10:

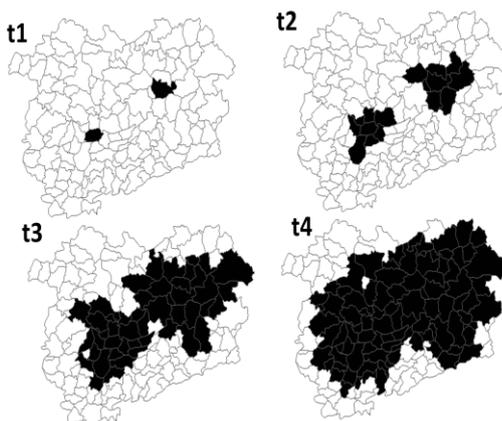


Figura 8. Resultado do modelo de difusão

Estes exemplos tiveram apenas objetivos didáticos, mostrando a viabilidade de usar uma abordagem puramente funcional para simulação de modelos espaciais dinâmicos.

4. Considerações finais

Existem diversos trabalhos que argumentam em prol do emprego de programação funcional em sistemas de informação geográfica. Entretanto, ainda nenhum trabalho considerou o seu emprego em modelos espaciais dinâmicos, como mudanças de uso e cobertura da terra. Neste trabalho foi mostrado a partir de exemplos simples que o uso dessa abordagem possibilita a construção de modelos mais próximos das suas definições formais e matemáticas. Além disso, a abordagem proposta permitiu a construção de autômatos celulares que possam ser aplicados sobre espaços não homogêneos, vizinhanças não estacionárias e regras de transição não universais. Contudo, programas funcionais tendem a consumir mais recursos computacionais, como memória e processamento. Deste modo, ainda é necessário a construção de modelos reais e mais testes para avaliar sua viabilidade operacional.

Referências

Aguiar, A. P. D. Modeling land use change in the Brazilian Amazon: exploring intra-regional heterogeneity. INPE, São José dos Campos, 2006. 204 p.

Aguiar, A. P. D., G. Câmara, *et al.* Modeling Spatial Relations by Generalized Proximity Matrices. GeoInfo 2003 - V Brazilian Symposium on Geoinformatics. Campos do Jordao, 2003. p.

Almeida, C. M. D., A. M. V. Monteiro, *et al.* Empiricism and Stochastics in Cellular Automaton Modeling of Urban Land Use Dynamics. Computers, Environment and Urban Systems, v.27, n.5, p.481-509. 2003.

Barros, J. X. Urban Growth in Latin American Cities: Exploring urban dynamics through agent-based simulation. Bartlett School of Graduate Studies, University of London, 2004.

Batty, M. Modeling urban dynamics through GIS-based cellular automata. Computers, Environment and Urban Systems, v.23, p.205-233. 1999.

Briassoulis, H. Analysis of Land Use Change: Theoretical and Modeling Approaches: Regional Research Institute, West Virginia University 2000.

Câmara, G., D. Palomo, *et al.* Towards a generalized map algebra: principles and data types. Workshop Brasileiro de Geoinformática. Campos do Jordão, SP. **Anais Eletrônicos ...** Curitiba: SBC. Nov. 2005, 2005. p.

Castella, J.-C., S. Boissau, *et al.* Agrarian transition and lowland-upland interactions in mountain areas in northern Vietnam: application of a multi-agent simulation model. Agricultural Systems, v.86, n.3, p.312-332. 2005.

Costa, S. S., A. P. Aguiar, *et al.* Common Concepts to Development of the Top-Down Models of Land Changes. XIV SBSR Simpósio Brasileiro de Sensoriamento Remoto. Natal, RN, 2009. p.

Costa, S. S., G. Câmara, *et al.* TerraHS: Integration of Functional Programming and Spatial Databases for GIS Application Development. In: (Ed.). Advances in Geoinformatics, 2007. TerraHS: Integration of Functional Programming and Spatial Databases for GIS Application Development, p.127-149 %U http://dx.doi.org/10.1007/978-3-540-73414-7_8

Couclelis, H. From Cellular Automata to Urban Models: New Principles for Model Development and Implementation. Environment and Planning B: Planning and Design, v.24, p.165-174. 1997.

_____. Space, Time, Geography. In: P. Longley, M. Goodchild, *et al* (Ed.). Geographical Information Systems. New York: John Wiley, 1999. Space, Time, Geography, p.29-38

Daume, H. Yet another haskell tutorial. 2006 2004.

Egenhofer, M. e J. Herring. Categorizing binary topological relationships between regions, lines, and points in geographic databases. Orono, ME: Department of Surveying Engineering, University of Maine. 1991

- Huigen, M. e G. Fischer. Agent Based Modelling in Land Use and Land Cover Change Studies. Interim Repor, 2003. p.
- Kok, K. e A. Veldkamp. Evaluating impact of spatial scales on land use pattern analysis in Central America. . Agriculture, Ecosystems and Environonment, v. 85, p.205–221. 2001.
- Matthews, R., N. G. Gilbert, *et al.* Agent-based land-use models: a review of applications. Landscape Ecology, n.Volume 22, Number 10 / December, 2007, p.1447-1459. 2005.
- O'sullivan, D. Graph-cellular automata: a generalised discrete urban and regional model. Environment and Planning B: Planning and Design, v.28, p.687-705. 2001.
- Parker, D. C., T. Berger, *et al.* Report and Review of the International Workshop. Agent-Based Models of Land-Use /Land-Cover Change. Irvine, California, USA. 2002, 2001. p.
- Parker, D. C., Daniel G. Brown, *et al.* Illustrating a new 'conceptual design pattern' for agent-based models of land use via five case studies—the MR POTATOHEAD framework. In: (Ed.), 2006. Illustrating a new 'conceptual design pattern' for agent-based models of land use via five case studies—the MR POTATOHEAD framework
- Peyton Jones, S. Haskell 98 Language and Libraries The Revised Report 2002.
- Peyton Jones, S., J. Hughes, *et al.* Haskell 98: A Non-strict, Purely Functional Language. 2006 1999.
- Robinson, D. T., D. G. Brown, *et al.* Comparison of Empirical Methods for Building Agent-Based Models in Land Use Science. Journal of Land Use Science, v.2, n.1, p.31-55. 2007.
- Santé, I., A. M. García, *et al.* Cellular automata models for the simulation of real-world urban processes: A review and analysis. Landscape and Urban Planning, v.96, p.108-122. 2010.
- Soares-Filho, B., G. Cerqueira, *et al.* DINAMICA – a stochastic cellular automata model designed to simulate the landscape dynamics in an Amazonian colonization frontier. Ecological modelling, v.154, n.3, p.217 – 235. 2002.
- Takeyama, M. e H. Couclelis. Map dynamics: Integrating cellular automata and GIS through geo-algebra. International Journal of Geographical Information Science, v.11, p.73-91. 1997.
- Thompson, S. Haskell:The Craft of Functional Programming. Harlow, England: Pearson Education. 1999
- Tomlin, C. D. A Map Algebra. Harvard Computer Graphics Conference. Cambridge, MA. 1983, 1983. p.
- Valbuena, D., P. Verburg, *et al.* A method to define a typology for agent-based analysis in regional land-use research. Agriculture, Ecosystems & Environment. 2008.
- Veldkamp, A. e L. O. Fresco. CLUE: a conceptual model to study the Conversion of Land Use and its Effects. Ecological modelling, v.85, p.253-270. 1996.
- Veldkamp, A. e E. Lambin. Predicting land-use change. Agriculture, Ecosystems and Environonment, v.85, p.1-6. 2001.

Verburg, P., A. Veldkamp, *et al.* Simulation of changes in the spatial pattern of land use in China. Applied Geography, v.19 p.211–233. 1999.

Verburg, P. H., P. P. Schot, *et al.* Land use change modelling: current practice and research priorities. GeoJournal, v.61, n.4, p.309-324. 2004.

Verburg, P. H., W. Soepboer, *et al.* Modeling the Spatial Dynamics of Regional Land Use: The CLUE-S Model. Environmental Management, v.30, n.3, p.391-405. 2002.

Wadler, P. Comprehending monads. Proceedings of the 1990 ACM conference on LISP and functional programming Nice, France: ACM Press, 1990. 61-78 p.

White, R. e G. Engelen. High-resolution integrated modelling of the spatial dynamics of urban and regional systems. Computer, Environment and Urban Systems, v.24, p.383-400. 2000.

White, R., G. Engelen, *et al.* The Use of Constrained Cellular Automata for High-resolution Modelling of Urban Land Use Dynamics. Environment and Planning B: Planning and Design, v.24, p.323-343. 1997.