



20 e 21 de outubro
Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE
São José dos Campos - SP

Turbulência em Cosmologia: Análise de dados simulados utilizando computação de alto desempenho

Renata S. R. Ruiz¹, Haroldo F. Campos Velho¹, Cesar A. Caretta², Andrea S. Charão³

¹Programa de Doutorado em Computação Aplicada – CAP, INPE

²Departamento de Astronomia – Universidad de Guanajuato
Guanajuato, México.

³Departamento de Eletrônica e Computação – Universidade Federal de Santa Maria
(UFSM) – Santa Maria, RS – Brasil

{renata,haroldo}@lac.inpe.br, caretta@astro.ugto.mx, andrea@inf.ufsm.br

Abstract. *A recent proposal, which attempt to explain the origin and evolution of large-scale structure of the Universe, suggests that the cosmological evolution may have similarities with the dynamics of a turbulent fluid. In this work we present an assessment of this proposal by analyzing the gravitational potential energy spectra at different redshifts, for dark matter halos of galaxies from the Virgo consortium. To meet the demand of computational resources, we have developed a parallel version of the percolation method Friends-of-Friends (FoF), for identifying internally connected structures, and implemented a computational grid for Astrophysics.*

Resumo. *Uma proposta recente, que busca explicar a origem e evolução das estruturas em grande escala do Universo, sugere que a evolução cosmológica pode possuir similaridades com a dinâmica de um fluido turbulento. Assim, neste trabalho, apresentamos uma avaliação desta proposta por meio da análise do espectro de energia potencial gravitacional de halos de galáxias, em diferentes redshifts, usando dados de simulação de matéria escura, provenientes do consórcio Virgo. Para atender a demanda de recursos computacionais, desenvolvemos versões paralelas dos algoritmos utilizados e implementamos uma infra-estrutura de grade computacional para a Astrofísica.*

Palavras-chave: *Computação em grade, Simulação de N-corpos, Turbulência e Cosmologia.*

1. Introdução

O entendimento sobre a formação das grandes estruturas no Universo (galáxias, aglomerados, superaglomerados, filamentos, etc.) é uma questão relevante da Astrofísica moderna. O modelo padrão de formação dessas estruturas é baseado no critério de instabilidade de Jeans. Segundo tal critério, perturbações de densidade tendem a aumentar sua amplitude com o tempo (ou seja, tornar-se mais densas) em um processo conhecido como colapso gravitacional. Estas instabilidades criam concentrações de matéria que evoluem para formar estrelas, galáxias, aglomerados de galáxias, superaglomerados de galáxias e assim por diante [Tatekawa 2005, Hawley e Holcomb 2005]. Como a componente dominante, em termos de massa, nessas concentrações é supostamente a matéria escura, os efeitos viscosos, turbulentos e de difusividades não são considerados.

Uma abordagem proposta em 1989 [Shandarin e Zeldovich 1989] sugere que a dinâmica da evolução cosmológica possui similaridades com a dinâmica de um fluido turbulento. Uma verificação desta hipótese foi realizada em [Caretta et. al, 2008], utilizando dados da simulação de escala intermediária [Jenkins et al. 1998] proveniente do Consórcio Virgo. Neste estudo foi analisado o espectro de energia potencial gravitacional de halos de matéria escura de galáxias e aglomerados de galáxias. Os resultados indicaram que, para halos de galáxias, este espectro pode ser bem descrito por uma lei de potência do tipo $-5/3$ em um intervalo de 15 a 50 h^{-1} Mpc. Isto é uma evidência de um comportamento turbulento, uma vez que essa potência coincide com a lei de Kolmogorov de 1941 [Frisch 1995]. Porém, nesta primeira análise, a simulação considerada tinha pouca resolução de massa ($M_{\min} = 2 \times M_{\text{part}} \approx 1.4 \times 10^{11} h^{-1} M_{\odot}$) e apenas uma parte do volume foi analisada. Para dar uma conclusão mais definitiva é necessário aprofundar os estudos, pelo menos em duas direções: uma maior resolução nas simulações e utilização de dados observacionais. Este tipo de análise demanda recursos computacionais intensivos. Desta forma, versões paralelas dos algoritmos foram desenvolvidas e implementadas numa infra-estrutura de grade computacional para a Astrofísica. Neste trabalho apresentamos uma análise do desempenho desta grade, na obtenção do espectro de energia para o conjunto total da simulação de escala intermediária. Uma análise mais profunda e detalhada considerando dados da Simulação Milênio e também dados reais (observacionais) provenientes da base de dados *Sloan Digital Sky Survey* (SDSS) serão apresentados em trabalhos futuros.

As demais seções deste trabalho estão divididas da seguinte maneira: A Seção 2 apresenta algumas características da turbulência em cosmologia, bem como, uma breve descrição do algoritmo de percolação *Friends-of-Friends*, utilizado na identificação de estruturas ligadas gravitacionalmente. Na Seção 3 descrevemos a metodologia e os dados utilizados no presente trabalho, enquanto os resultados obtidos são apresentados na Seção 4. Finalmente, a Seção 5 é reservada as considerações finais.

2. Turbulência em Cosmologia

O modelo padrão da Cosmologia para a formação e evolução de estruturas considera que, em um estado primordial homogêneo, surgiram pequenas flutuações de densidade (os mecanismos para a geração dessas flutuações ainda não são compreendidos) [Kolb e Turner 1990, Hawley e Holcomb 2005]. Com a expansão do espaço-tempo essas flutuações podem crescer ou desaparecer, dependendo de seu contraste de densidade,

sua composição (em matéria escura, matéria bariônica e radiação) e das propriedades cosmológicas do Universo em cada momento. Se uma dessas instabilidades atinge um valor crítico ela deixa de expandir-se com o Universo e entra em colapso gravitacional. A evolução dessa instabilidade de aí em diante será dominada por processos não-lineares. Tal modelo, quando aplicado a matéria escura contida no Universo usando simulações de N-corpos, parece ser capaz de reproduzir as estruturas observadas. No regime não-linear da evolução cosmológica, no qual entram mais rapidamente as estruturas de escalas menores (contrastes de densidades mais altas), modelos gravitacionais semi-analíticos mostram certas analogias com modelo de turbulência em fluidos [Shandarin e Zeldovich 1989].

Uma das principais características da turbulência é a existência de uma cascata de energia cinética. Em um escoamento turbulento plenamente desenvolvido em fluidos, o comportamento do espectro de energia turbulenta para o subdomínio inercial (região do espectro que está afastada da região do ingresso de energia no sistema associada a baixos números de onda, bem como da região de dissipação viscosa associada aos mais altos números de onda) é expressa por uma lei de potência de $-5/3$. Esta é conhecida como a lei de Kolmogorov de 1941 [Frisch 1995], conforme Equação 2.1.

$$E(k) = c_2 \varepsilon^{2/3} k^{-5/3} \quad (2.1)$$

em que $E(k)$ é o espectro de energia turbulenta, k é o número de onda, ε é uma função dissipação e c_2 é uma constante determinada por experimentos (supostamente universal).

Entretanto, é difícil obter um espectro de energia cinética para o caso de dados cosmológicos. Conforme Caretta et al. (2008), a energia que pode produzir um comportamento similar ao turbulento na evolução dinâmica do Universo é a energia potencial gravitacional. Assim, uma vez identificados os *halos* de estruturas, o espectro de energia potencial gravitacional pode ser obtido estimando para cada *halo* e em esferas concêntricas, a energia potencial gravitacional devido aos outros *halos*, como dado a seguir:

$$U_j = \frac{1}{2} G m_j \sum \frac{m_i}{r_{ij}} \quad (2.2)$$

em que G é a constante gravitacional, r_{ij} é a distância entre os *halos* i e j , m_i e m_j são as massas dos *halos* i e j respectivamente. Assim, o primeiro passo na obtenção do espectro de energia potencial gravitacional é identificar no domínio espacial e em diferentes escalas de tempo, os *halos* de matéria escura. Neste trabalho utilizamos o algoritmo de percolação *Friends-of-Friends* (FoF) [Huchra e Geller 1982], escolhido por suas propriedades como simplicidade, robustez e capacidade de detectar *halos* de qualquer forma (independente da geometria). Porém, para analisar uma grande quantidade de dados em tempo hábil, desenvolvemos uma versão paralela do FoF [Ruiz et al. 2009].

A idéia básica deste algoritmo FoF é a seguinte: Considere uma esfera de raio R ao redor de cada partícula do conjunto total, se dentro desta esfera existirem outras partículas, elas serão consideradas pertencentes ao mesmo grupo e serão chamadas de amigas. Em seguida, toma-se uma esfera ao redor de cada amiga e continua-se o procedimento usando a regra “qualquer amigo de meu amigo é meu amigo”. O procedimento pára quando nenhuma amiga nova pode ser adicionada ao grupo. Em

outras palavras, o algoritmo FoF agrupa partículas que são separadas por um certo tamanho de ligação l . Este tamanho é dado freqüentemente por b vezes a separação média entre as partículas, os valores de b e l dependem da natureza da aplicação [Caretta et al., 2008]. Os grupos resultantes são limitados por uma superfície de densidade constante de aproximadamente:

$$\frac{n}{\bar{n}} = \frac{2}{(4/3)\pi l^3} \frac{1}{\bar{n}} = \frac{3}{2\pi l^3} \bar{l}^3 = \frac{3}{2\pi} \frac{1}{b^3} \approx \frac{1}{2b^3} \quad (2.3)$$

em que n é o número de objetos e \bar{n} é o número médio de partículas na região considerada.

3. Dados Utilizados e Metodologia

Os dados utilizados nesse trabalho são provenientes da simulação de N-Corpos.

3.1 Simulações de N-corpos do Consórcio Virgo

A simulação de N-corpos exerce um papel fundamental no estudo da formação da estrutura cósmica. Nesta metodologia, calcula-se a evolução das estruturas (normalmente de matéria escura) a partir de uma época distante no passado, cuja distribuição de matéria é produzida pela evolução linear de flutuações primordiais. Os resultados obtidos são normalmente validados pela comparação com dados observacionais [Efstathiou et al. 1985, Bertschinger 1998, Jenkins et al. 1998].

O projeto Virgo realizou várias simulações ao longo de duas décadas. Para validar o processamento de alto desempenho desenvolvido neste trabalho, reproduzimos os resultados de [Caretta et al. 2008] para as simulações de escala intermediária, porém considerando o volume total da simulação. Quatro modelos de evolução da matéria escura são apresentados nessas simulações, dos quais foi escolhido o modelo Λ -CDM (Λ : constante cosmológica; CDM: Cold Dark Matter). Os parâmetros numéricos que caracterizam essa simulação são: um cubo com $239.5 h^{-1} \text{ Mpc}$ de lado e 256^3 partículas com massa individual de $6.86 \times 10^{10} h^{-1} M_{\odot}$, e os parâmetros cosmológicos são: $(\Omega_M, \Omega_{\Lambda}, h, \sigma_8) = (0.3, 0.7, 0.7, 0.9)$.

Uma simulação com dados mais recentes (de maior resolução e volume) é a Simulação Milênio [Springel et al. 2005]. Essa simulação começa em aproximadamente 379 000 anos após o Big Bang (o qual ocorreu cerca de 13.7 bilhões de anos atrás), quando o Universo era extremamente quente e denso. Nesse tempo, o Universo consistia de um plasma de elétrons, fótons e bárions e estava submerso em um fluxo de radiação. Com o Universo se expandido e resfriando, ele chega a uma temperatura crítica de cerca de 3000 K quando começam a desacoplar-se radiação e matéria. Este evento produziu a radiação cósmica de fundo, que hoje apresenta uma temperatura de aproximadamente 2.7 K [Madsen 1996]. Devido as observações detalhadas da radiação cósmica de fundo, os astrofísicos têm uma boa idéia sobre o estado do Universo no instante da dissociação, essas informações são usadas como condições iniciais na simulação. A Simulação Milênio é uma das maiores simulações da evolução do Universo. Emprega 2160^3 partículas de matéria em uma região cúbica com $L = 500 h^{-1} \text{ Mpc}$ a partir do *redshift* $z = 127$ até o presente ($z = 0$).

3.2 Computação em Grade para a Astrofísica

A tecnologia de computação em grade fornece mecanismos para compartilhar e coordenar o uso de diversos recursos computacionais (supercomputadores, clusters, dados, espaço de armazenamento, entre outros) distribuídos geograficamente em diferentes instituições, de modo a criar um único computador virtual capaz de alcançar elevada taxa de processamento e armazenamento [Foster 2003, Foster e Kesselman 2004].

Quando se pretende explorar de forma eficiente um ambiente de grade computacional, Asadzadeh et al. (2005) destaca alguns desafios que devem ser considerados, são eles: **Heterogeneidade**, que surge devido a multiplicidade de recursos e a grande variedade de tecnologias que constituem a grade. **Multiplicidade de domínios administrativos**, uma vez que os recursos da grade estão distribuídos geograficamente entre diferentes organizações e assim pertencem a diferentes proprietários. **Escalabilidade**, já que o aumento no tamanho da grade pode causar perda de desempenho na execução das tarefas. Por último, a **natureza dinâmica** desse ambiente, pois, falhas na rede de comunicação alteram a disponibilidade dos recursos.

Levando em conta os desafios anteriormente citados, Foster et al. (2001) propõem um modelo de arquitetura em grade organizado em camadas, conforme Figura 1.



Figura 1. Camadas que constituem a arquitetura da grade. Fonte: (Foster et al., 2001).

As camadas **Conectividade**, **Recursos** e **Coletivos**, fazem parte de um nível da arquitetura de grade também conhecido como *middleware*. Os sistemas *middlewares* têm papel fundamental e devem ser adaptados dinamicamente de modo a prover o uso efetivo e eficiente dos serviços e recursos disponíveis na grade computacional [Asadzadeh et al. 2005]. Existem na literatura vários desenvolvimentos de *middlewares* aptos a explorar de forma eficaz o potencial da grade. Dentre estes desenvolvimentos podemos citar: Globus Toolkit [Foster e Kesselman 1998], considerado um modelo padrão para a tecnologia de computação em grade, CIGRI/OAR [Capit et al., 2005] e a arquitetura OurGrid [Andrade et al., 2003].

Neste trabalho estamos utilizando a versão 3.3.1 do *middleware* OurGrid, disponível para download em: <http://www.ourgrid.org/>. A seguir apresentamos uma breve descrição deste *middleware*.

3.3.1 Middleware OurGrid

De acordo com Andrade et al. (2003), a plataforma OurGrid é baseada em um modelo de recursos compartilhados que procura fornecer recursos às aplicações paralelas cujas tarefas são conhecidas como aplicações Bag-of-Tasks (BoT). BoT são aplicações paralelas compostas por um conjunto de tarefas independentes, ou seja, que não necessitam de comunicação durante a execução.

A plataforma OurGrid foi desenvolvida para trabalhar como uma rede Peer-to-Peer de recursos pertencentes a comunidade de usuários da grade. Assim, ela é composta de vários sites que têm interesse em trocar favores computacionais entre si. Esta rede Peer-to-Peer de troca de favores permite que os recursos ociosos de um site sejam fornecidos. A plataforma OurGrid é formada por três componentes principais: MyGrid, OurGrid Peer e Worker ou UserAgent. O componente MyGrid é a interface para o uso da grade computacional, ou seja, é aquele que durante o processamento de tarefas (jobs) atua como o coordenador da grade, sincronizando a execução dessas tarefas e fazendo toda a transferência de dados necessária [Cirne et al. 2003]. O OurGrid Peer tem como principal função organizar e fornecer trabalhadores que pertencem ao mesmo domínio administrativo. Do ponto de vista de usuário, um Peer é um fornecedor de trabalhadores, ou seja, uma rede de serviços que dinamicamente fornece trabalhadores para a execução de tarefas. Do ponto de vista administrativo um Peer determina como e quais máquinas podem ser usadas como trabalhadores. Finalmente, o Worker é responsável por executar tarefas para os usuários da grade. Quando um Worker recebe a tarefa para processar, ele cria uma máquina virtual para executá-la. Como resultado, todos os processos da grade são executados nesta máquina virtual e assim, as máquinas da grade são protegidas do uso indevido ou malicioso.

Uma vez que todos os componentes estão instalados e ativos na grade, a submissão de tarefas é feita através de scripts. Nestes scripts implementam-se diversas funções, como por exemplo, a leitura e execução dos respectivos programas do problema, transferência de dados, entre outras. Para o experimento realizado neste trabalho utilizamos recursos computacionais do Laboratório Associado de Computação e Matemática Aplicada – LAC, da Divisão de Astrofísica – DAS, ambos do INPE e do Departamento de Eletrônica e Computação, da Universidade Federal de Santa Maria – UFSM. Posteriormente, serão incorporados à grade recursos provenientes do Departamento de Astronomia da Universidade de Guanajuato – México.

4. Resultados obtidos

Nesta seção apresentamos o espectro de energia potencial gravitacional obtido a partir de dados de simulação de matéria escura do projeto Virgo de escala intermediária e o desempenho da grade implementada. Os halos de matéria escura foram obtidos para nove diferentes *redshifts*, utilizando a versão paralela do algoritmo de percolação FoF [Ruiz et al. 2009], sendo que os 9 *redshifts* analisados foram distribuídos nos 3 clusters pertencentes a grade computacional. Definindo T_s como sendo o tempo total correspondente a execução seqüencial do conjunto de tarefas e T_G o tempo total gasto na

execução de todos os jobs simultaneamente na grade, o *speed-up* (S) é definido como sendo a razão entre T_S e T_G . Conforme se verifica na Tabela 1, considerando os 3 clusters utilizados, $T_S = 40.43 h$ e $T_G = 14.53 h$, logo $S = \frac{T_S}{T_G} = \frac{40.43}{14.53} = 2.78$. Outra

maneira de medir o desempenho da grade pode ser obtida se consideramos o melhor e o pior caso, em que se avalia o tempo médio gasto na execução de cada job no cluster mais rápido e no cluster mais lento. Conforme a Tabela 1, o tempo médio gasto para cada job no cluster mais rápido foi de 2.9 horas, então para os 9 jobs teremos

$T_S = 26.1 h$, portanto $S = \frac{T_S}{T_G} = \frac{26.1}{14.53} = 1.80$. Já para o pior caso, o tempo médio gasto

por cada job foi de 11.95 horas, logo para os 9 jobs teremos $T_S = 107.55 h$, e assim

$S = \frac{T_S}{T_G} = \frac{107.55}{14.53} = 7.40$. Todas as medidas apresentadas aqui foram extraídas do

arquivo de log do OurGrid que registra o início e o fim de cada job.

Tabela 1. Tempo acumulado para cada cluster usado na grade.

Clusters	Jobs	T_t (hh:mm)	T_t /Jobs (hh:mm)
C-PAD/INPE	5	14:32	02:54
LAC/INPE	3	13:57	04:39
Computação/UFSM	1	11:57	11:57
Total	9	40:26	

Na Figura 2 tem-se o espectro de energia potencial gravitacional para um cubo com $239.5 h^{-1} \text{ Mpc}$ de lado, podemos observar que o espectro segue a escala $-5/3$ no intervalo 0.01 e 0.06 ($17 a 100 h^{-1} \text{ Mpc}$), confirmando os resultados previamente obtidos em [Caretta et al. 2008].

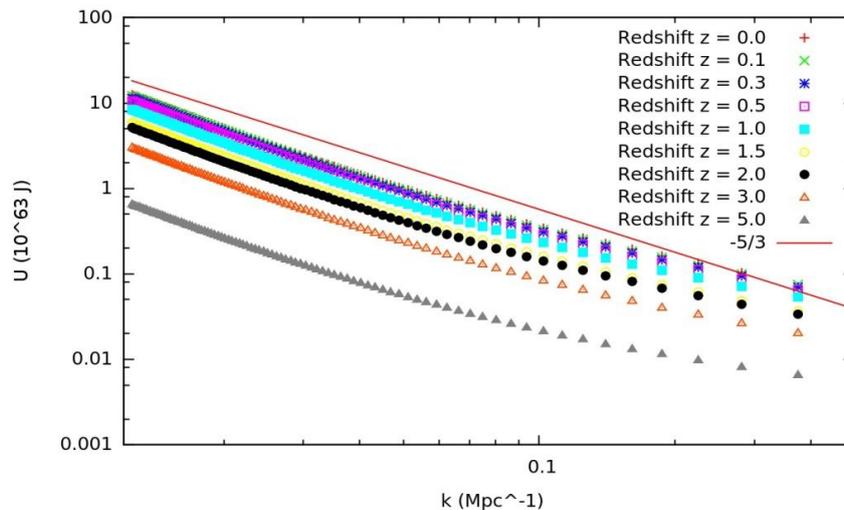


Figura 2. Espectro de energia potencial gravitacional para halos de galáxias considerando um cubo com $239.5 h^{-1} \text{ Mpc}$ de lado.

5. Considerações Finais

Neste trabalho apresentamos os primeiros testes realizados em uma grade computacional de astrofísica que será utilizada no aprofundamento do estudo da caracterização da evolução do Universo como uma dinâmica turbulenta, por meio da análise de escala da lei de Kolmogorov - Equação 2.1.

O experimento realizado mostrou a viabilidade na implementação de uma grade computacional para a Astrofísica brasileira. Através da análise do tempo gasto na execução das tarefas podemos ver que realizar a tarefa em cada instituição separadamente demandará um tempo de 26.1 h no melhor caso (cluster mais rápido) e 107.55 h no pior caso (cluster mais lento). Por meio do uso compartilhado de recursos computacionais entre as instituições, utilizando a tecnologia da grade computacional, o tempo gasto foi de 14.53 h, uma redução significativa no tempo de execução.

O espectro de energia obtido considerando o volume total da simulação de escala intermediária do projeto Virgo segue uma lei de potência do tipo $-5/3$, indicando um possível comportamento turbulento na evolução cósmica.

Como trabalhos futuros, vamos realizar a análise do espectro para dados da Simulação Milênio e também para dados da astronomia observacional.

Agradecimentos. Os autores agradecem ao Consórcio Virgo pelo fornecimento dos dados de simulação utilizados. A autora R.S.R. Ruiz agradece a FAPESP pela bolsa de doutorado processo nº: 2007/54133 – 0 e a CAPES pela bolsa de doutorado sanduiche processo nº: 4541/08-1.

7. Referências

- Andrade, N., Cirne, W., Brasileiro, F., Roisenberg, P. (2003) Ourgrid: An approach to easily assemble grids with equitable resource sharing. *Proceeding of the 9th Workshop on Job Scheduling Strategies for Parallel Processing*, v. 9, p. 61 – 86.
- Capit, N., Costa, G., Georgiou, Y., Huard, G., Martin, C., Mounie, G., Neyron, P., Richard, O. (2005) A batch scheduler with high level components. *Clusters computing and the grid - CCGrid 2005*, v. 2, p. 776 – 783.
- Asadzadeh, P.; Buyya, R.; Kei, C. L.; Nayar, D.; Venugopal, S. (2005) Global grids and software toolkits: A study of four grid middleware technologies. *High Performance Computing: Paradigm and Infrastructure*, p. 431 – 458.
- Bertschinger, E. (1998). Simulations of Structure Formation in the Universe. *Annu. Rev. Astron. Astrophys.*, v. 36, p. 599 -654.
- Caretta, C., Rosa, R. R., Campos Velho, H. F. , Ramos, F., Makler, M. (2008) Evidence of turbulence-like universality on the formation of galaxy-sized dark matter haloes. *Astronomy & Astrophysics*, v. 487, p. 445 – 451.
- Cirne, W., Paranhos, D., Costa, L., Santos Neto, E., Brasileiro, F., Sauv e, J., Silva, F. A. B. da, Barros, C. O., Silveira, C. (2003) Running bag-of-tasks applications on computational grids: The mygrid approach. In: *Proceedings of the ICCP 2003 - International Conference on Parallel Processing*.

- Efstathiou, G., Davis, M., White, S. D. M., Frenk, C.S. (1985). Numerical techniques for large cosmological N-corpos simulations. *Astrophysical Journal Supplement Series*, v. 57, p. 241-260.
- Frisch, U. *Turbulence: The legacy of A.N. Kolmogorov*. (1995) New York: Cambridge University Press.
- Foster, I., Kesselman, C. (1998) The globus project: A status report. *IPPS/SPDP '98 Heterogeneous Computing Workshop*, p. 4 - 18.
- Foster, I., Kesselman, C., Tuecke, S. (2001) The anatomy of the grid: Enabling scalable virtual organizations. *International Journal of High Performance Computing Applications*, v. 15 (3), p. 200 – 222.
- Foster, I. (2003) The Grid: A New Infrastructure for 21st century science. *Physics Today*, v. 55, p. 51 – 63.
- Foster, I, Kesselman, C. (2004) *The Grid: Blueprint for a New Computing Infrastructure*. 2. Ed. San Francisco, USA: Morgan-Kaufmann.
- Hawley, J. F., Holcomb, K. A. (2005) *Foundations of Modern Cosmology*. 2. ed. Oxford NewYork: Oxford University Press.
- Huchra, J. P. e Geller, M., J. (1982). Groups of Galaxies I. Nearby groups . *The astrophysical*, v. 257, p. 423 – 437.
- Jenkins, A., Frenk, C. S., Pearce, F. R., et al. (1998). Evolution of Structure in Cold Dark Matter Universe. *The Astrophysical Journal*, v. 499, p. 20 – 40.
- Kolb, E. W., Turner, M. S. (1990) *The Early Universe*. New York: addison-wesley publishing company.
- Madsen, M., S. (1996). *The Dynamic Cosmos – Exploring the Physical Evolution of the Universe*. 1. ed. New York, NY, USA: Chapman & Hall, 144 p.
- Ruiz, R. S. R., Campos Velho, H. F., Caretta, C. A. (2009). Paralelização do Algoritmo Friends-of-Friends para Identificar Halos de Matéria Escura. *IX Workshop do Curso de Computação Aplicada do INPE*.
- Shandarin, S. F., Zeldovich, Y. (1989) The large-scale of the universe: Turbulence, intermittency, structures in a self-gravitating medium. *Reviews of Modern Physics*, v. 61, p. 185 - 220.
- Springel, V., Simon, D. W., Jenkins, A., Frenk, C. S., Yoshida, N., Gao, L., Navarro, J., Thacker, R., Croton, D., Helly, J., Peacock, J. A., Cole, S., Thomas , P., Couchman, H., Evrard, A., Colbergm, J., Pearce, F.(2005). Simulating of the formation, evolution and clustering of galaxies and quasars. *Nature*, v. 435, p. 629 - 636.
- Tatekawa, T. (2005) Langrangian perturbation theory in newtonian cosmology. arXiv:astro-ph/0412025v4.