



20 e 21 de outubro
Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE
São José dos Campos - SP

Rede de Osciladores de Fase

Rosângela Follmann¹, Elbert E. N. Macau²

¹Programa de Doutorado em Computação Aplicada – CAP
Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais – INPE

²Laboratório Associado de Computação e Matemática Aplicada – LAC
Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais – INPE

{rosangela, elbert}@lac.inpe.br

Abstract. *Synchronization is everywhere. Some examples include pacemaker cells in the heart, nervous system, epileptic seizures and Parkinson diseases, information transmission, mechanical systems as pendulum clocks. The concept of synchronization, beyond the interest of the dynamic problem has a fundamental importance for the understanding of these physical, chemical and ecological systems. In this work we present a network of phase oscillators with associative memory that allows storage of dynamic patterns.*

Resumo. *Sincronização é um fenômeno que está presente em todo o lugar, nas células do corpo humano, no cérebro, em doenças como epilepsia e parkinson, na transmissão de informações, em sistemas mecânicos como relógio de pendulo, etc. O conceito de sincronização, além do interesse dinâmico do problema, é de fundamental importância para o entendimento destes sistemas físicos, químicos e ecológicos. Neste trabalho é apresentada uma rede de osciladores de fase com memória associativa que permite o armazenamento dinâmico de padrões.*

Palavras-chave: *Sincronização, Caos, Redes de osciladores, Memória associativa*

1. Introdução

Uma importante característica do nosso mundo é a tendência à alcançar ritmos comuns em comportamentos mútuos, ou seja, a tendência à sincronização. Este fenômeno está presente no corpo humano, nas células marcapasso no coração [Torre 1976]; nas células secretoras de insulina no pâncreas [Sherman et al. 1988]; durante as crises epiléticas [Kandel et al. 2000, Engel and Pedley 2008]; na doença de parkinson [Hammond et al. 2007], na transmissão de informações [VanWiggeren and Roy 1998, Chen et al. 2003], em sistemas mecânicos como relógio de pendulo [Huygens 1673], etc. O conceito de sincronização, além do interesse relacionado a compreensão da dinâmica

do problema, é de fundamental importância para o entendimento destes sistemas físicos, químicos e ecológicos.

A representação da informação e o seu processamento no cérebro ainda recebem grande foco em estudos da neurociência. Acredita-se que a informação é processada via evolução de padrões de atividade auto-sustentada, formada por redes neuronais devido à atividade oscilatória local dos neurônios, e pela complexa arquitetura das conexões sinápticas [Llinás 2001]. E sendo a memória associativa um dos melhores exemplos de como uma rede neural pode efetivamente memorizar a informação, e recuperá-la a partir de informações parciais.

A modelagem da rede de Hopfield com estados binários e regra Hebbiana de aprendizagem propiciaram ensaios fundamentais no problema de computação neural com padrões [Hopfield 1982]. Neste modelo, a rede de neurônios assume valores discretos (por exemplo, -1 e 1) e um conjunto de padrões é armazenado tal que, quando é apresentado um novo padrão, a rede responde produzindo um padrão armazenado que mais se assemelhe ao novo padrão. O significado físico do trabalho de Hopfield reside na sua proposta da função de energia e sua ideia de que memórias são atratores dinamicamente estáveis. A capacidade de armazenamento, número de padrões memorizados por neurônios (n), da rede de Hopfield com recuperação livre de erro dos padrões é $1/\log(n)$.

Baseados nos princípios computacionais da rede de Hopfield, modelos oscilatórios com memória associativa são foco de diversos estudos [Ishii et al. 1996, Aonishi 1998, Nishikawa et al. 2004, Xiu et al. 2004, Dehmer 2008, Zhao et al. 2008]. Tal interesse, se deve à recentes descobertas de sincronização de fase nas atividades oscilatórias dos neurônios durante o processo de codificação e recuperação da informação [Sporns et al. 2004, Axmacher et al. 2006, Sauseng and Klimesch 2008, Sauseng et al. 2008]. No presente trabalho será analisada uma rede de osciladores de fase com memória associativa para armazenar e recuperar padrões.

2. Modelo Oscilador de Fase

Nos modelos de redes oscilatórias a informação pode ser codificada usando as oscilações de fase. Um dos modelos matemáticos mais usados é o modelo de Kuramoto, o qual é composto por um conjunto de osciladores não lineares fracamente acoplados [Kuramoto 1984]. Supondo uma rede constituída de elementos idênticos, a dinâmica dos osciladores pode ser reduzida a análise das equações em função da fase

$$\dot{\theta}_i = \sum_{j=1}^N C_{ij} \sin(\theta_j - \theta_i), \quad i = 1, \dots, N, \quad (1)$$

onde C_{ij} é a intensidade de acoplamento do oscilador j para i . Cada elemento da matriz de acoplamento dada pela regra de Hebb

$$C_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{\mu=1}^p \xi_i^\mu \xi_j^\mu \quad (2)$$

onde $\xi^\mu = (\xi_1^\mu, \dots, \xi_N^\mu)$, $\xi_i^\mu = \pm 1$ para $\mu = 1, \dots, p$, $i = 1, \dots, N$, representa um conjunto de p padrões a ser memorizado.

A capacidade de armazenamento desta rede é $1/n$, que é menor do que a capacidade da rede de Hopfield. Com o propósito de aumentar a capacidade deste tipo de rede, [Nishikawa et al. 2004] acrescentou um novo termo, de intensidade ϵ , na função de acoplamento. Com este termo a capacidade da rede é de ao menos $2\epsilon^2/\log n$. A equação para o movimento da nova rede de N osciladores com segundo modo da expansão de Fourier é dada por:

$$\dot{\theta}_i = \sum_{j=1}^N C_{ij} \sin(\theta_j - \theta_i) + \frac{\epsilon}{N} \sum_{j=1}^N \sin 2(\theta_j - \theta_i). \quad (3)$$

Estas equações são invariantes sob translação constante, indicando que existe ao menos uma direção no espaço de fase em que a solução é neutralmente estável. A Equação 3 possui 2^N soluções ponto fixo, correspondendo a todos os possíveis padrões binários de tamanho N .

Seja $I = (I_1, \dots, I_N)^T$ um vetor N -dimensional de 1 s e -1 s um destes padrões binários, então existe uma solução única $\theta(I)$ correspondente ao padrão I , que é caracterizada por

$$|\theta_i - \theta_j| = \begin{cases} 0 & \text{se } I_i = I_j \\ \pi & \text{se } I_i \neq I_j \end{cases} \quad (4)$$

Sendo assim, os padrões binários são codificados nos desvios de fase travada dos osciladores. A simetria da matriz C nas conexões garante que Equação 3 pode ser escrita como um sistema gradiente com função de Lyapunov (energia)

$$L(\theta; \epsilon, C) = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^N C_{ij} \cos(\theta_j - \theta_i) - \frac{\epsilon}{4N} \sum_{j=1}^N \cos 2(\theta_j - \theta_i). \quad (5)$$

A dinâmica da rede é tal que a solução movimenta-se na direção dos mínimos de energia do sistema. Assim quando a evolução das energias parciais de cada elemento da rede estabilizar num mínimo, o padrão é recuperado. A função de energia por oscilador pode ser rescrita em função dos padrões armazenados

$$\bar{L}(\theta; \epsilon, \Xi) = \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^p m_{\mu}^2 - \frac{\epsilon}{2} q^2, \quad (6)$$

onde $\Xi = (\xi^1, \dots, \xi^p)$ é uma matriz $n \times p$ e os parâmetros são definidos como:

$$m_{\mu}(\theta) = \left| \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \xi_j^{\mu} e^{i\theta_j} \right|, \quad \mu = 1, \dots, p, \quad (7)$$

$$q(\theta) = \left| \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{2i\theta_j} \right|. \quad (8)$$

O parâmetro m_{μ} é chamado de sobreposição ou *overlap* e mede a proximidade da solução com o padrão memorizado ξ^{μ} . Se $m_{\mu} \approx 1$ os padrões são praticamente idênticos, e se $m_{\mu} \approx 0$ eles são totalmente diferentes. O parâmetro q revela a proximidade da solução com o padrão binário mais próximo.

3. Recuperação da Informação

Um conjunto de quatro padrões bipolares foram armazenados na rede de osciladores. Na Figura 1 podem ser visualizados estes padrões na forma de imagens 10x10.

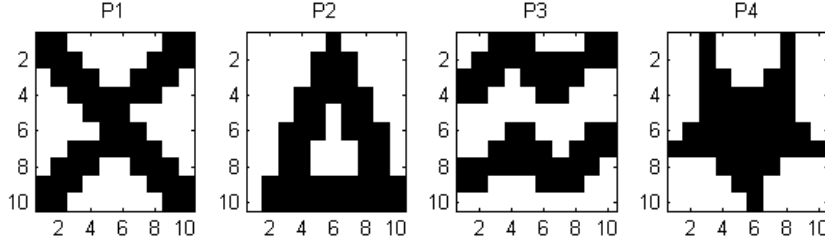


Figura 1. Conjunto de padrões armazenados na rede de osciladores.

Dado o vetor de entrada I N -dimensional de 1 's e -1 's, a fase inicial $\theta_0(I_i)$ de cada oscilador da rede é dada por:

$$\theta_0(I_i) = \begin{cases} 0 & \text{se } I_i = 1 \\ \pi/2 & \text{se } I_i = -1 \end{cases} \quad (9)$$

Primeiramente, o padrão P1 é apresentado para a rede com *overlap* inicial de 0.8, na pratica isto significa que o padrão foi apresentado com 20% dos bits trocados. Na Figura 2 é mostrada a evolução do padrão a cada 20 iterações, e cada célula representa um oscilador. Em $t=1$ tem-se o padrão inicial apresentado para a rede, após 821 iterações tem-se a recuperação perfeita do padrão P1.

A evolução da função energia ao longo do tempo é mostrada na Figura 3(a) e em (b) é ilustrada a evolução da diferença de fase ($\Delta\theta_i = |\theta_i - \theta_j|$) entre os elementos da rede. Onde observa-se que a medida que os osciladores evoluem para os mínimos de energia, os desvios de fase tornam-se travados em 0 ou π .

Na Figura 4 é mostrada a recuperação perfeita do padrão P2, com $m_{inicial} = 0.7$, neste caso foram escolhidos 30 bits aleatoriamente e trocados, como pode ser visto em $t=1$. Da mesma forma, na Figura 5 pode ser vista a evolução dos osciladores de fase para os mínimos de energia, e os desvios de fase tornam-se travados.

Para analisar a proximidade necessária da condição inicial com o padrão armazenado, de modo que a rede consiga evoluir para os desvios de fase travada que codificam o padrão, será observada a relação entre *overlaps* final e inicial de θ . Na figura 6(a) é mostrado o *overlap* final (m_{final}) em função do *overlap* inicial ($m_{inicial}$), para uma rede de 100 osciladores e 4 padrões armazenados (P1, P2, P3 e P4, Figura 1). O m_{final} é a média sobre as soluções de 10 condições iniciais diferentes, as quais possuem o mesmo *overlap* inicial. Para valores pequenos do *overlap* inicial, isto é, para condições iniciais distantes dos padrões armazenados, a solução da rede também apresenta um *overlap* final pequeno. A partir de um valor crítico do *overlap* inicial, em torno de 0.6, o *overlap* final adquire valores próximos de 1 (recuperação perfeita). Este valor crítico do *overlap* inicial marca a fronteira da bacia de atração da solução de cada padrão armazenado.

A fim de avaliar a influência do segundo termo na performance da rede, é calculado o *overlap* final máximo sobre 10 condições iniciais diferentes, com $m_{inicial} = 0.7$

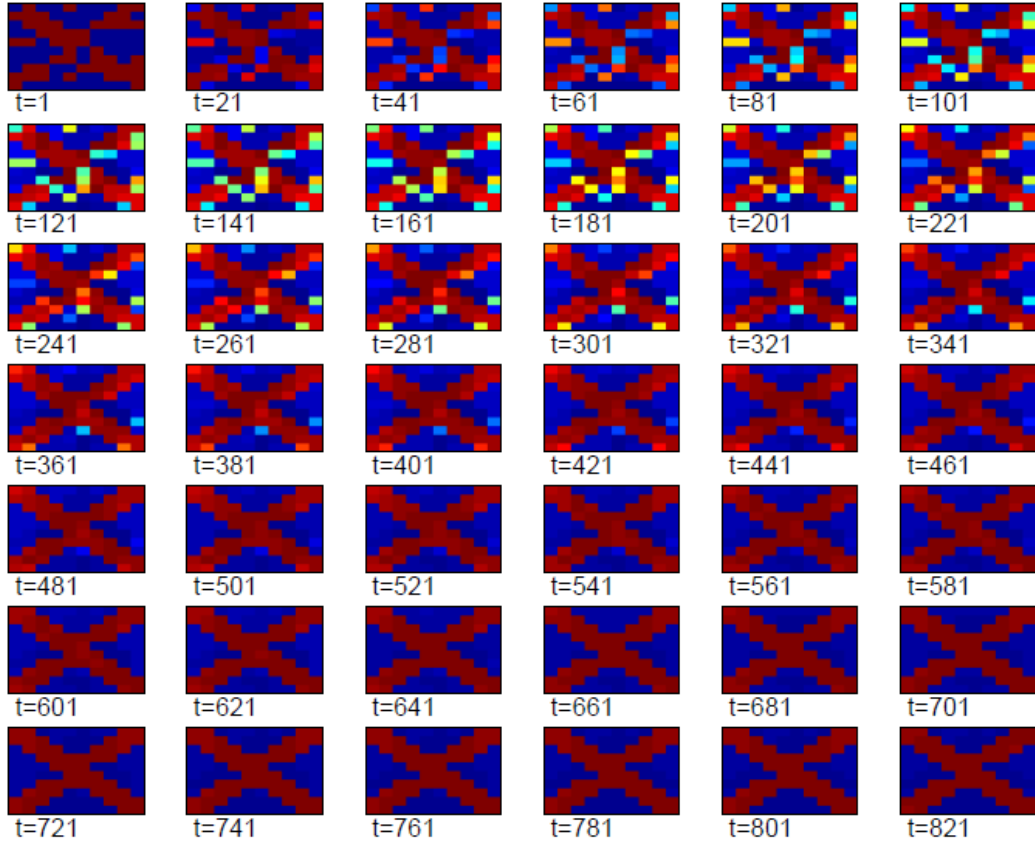


Figura 2. Evolução da rede de osciladores de fase durante a recuperação de P1 com $m_{inicial} = 0.8$.

versus a variação do parâmetro ϵ . Os resultados podem ser vistos na Figura 6(b), onde observa-se que quase todas as soluções convergem para os padrões armazenados quando $\epsilon < 0.6$. Após este ponto, ϵ estabiliza a solução codificando outro padrão, que não está armazenado.

4. Considerações Finais

No presente trabalho foi apresentada uma rede de osciladores de fase com memória associativa para armazenar e recuperar padrões. Neste tipo de rede a informação é armazenada nos desvios de fase travada do conjunto de osciladores. A recuperação dos padrões P1 e P2 com 20% e 30% de bits trocados, respectivamente, foi perfeita. Mostrou-se, por meio de simulação numérica, que a proximidade necessária da condição inicial com o padrão armazenado para recuperação perfeita é $m_{inicial} = 0.6$. A influência do segundo termo também foi avaliada, e obteve-se que todas as soluções convergem para os padrões armazenados para valores de ϵ menores 0.6.

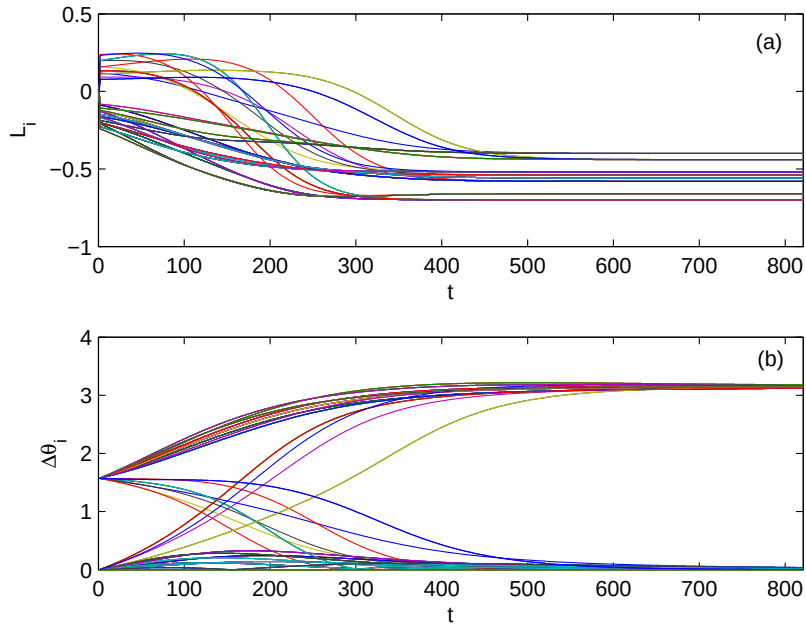


Figura 3. Recuperação do padrão P1 com $m_{inicial} = 0.8$. (a) Evolução da função de energia para cada oscilador; (b) Evolução das diferenças de fase.

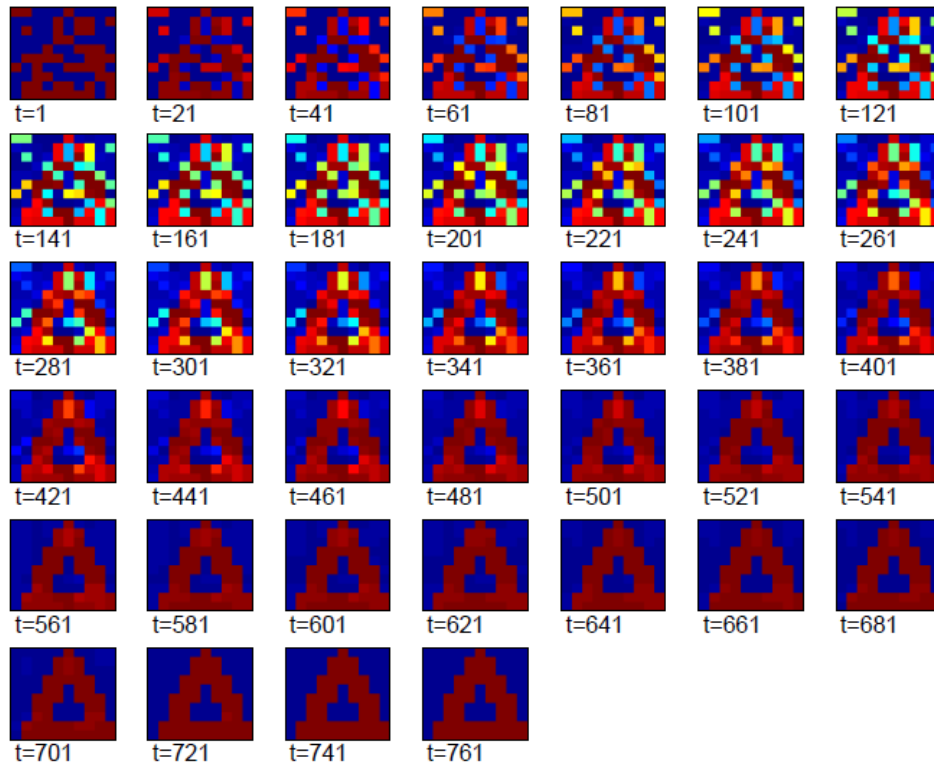


Figura 4. Evolução da rede de osciladores de fase durante a recuperação de P2 com $m_{inicial} = 0.7$.

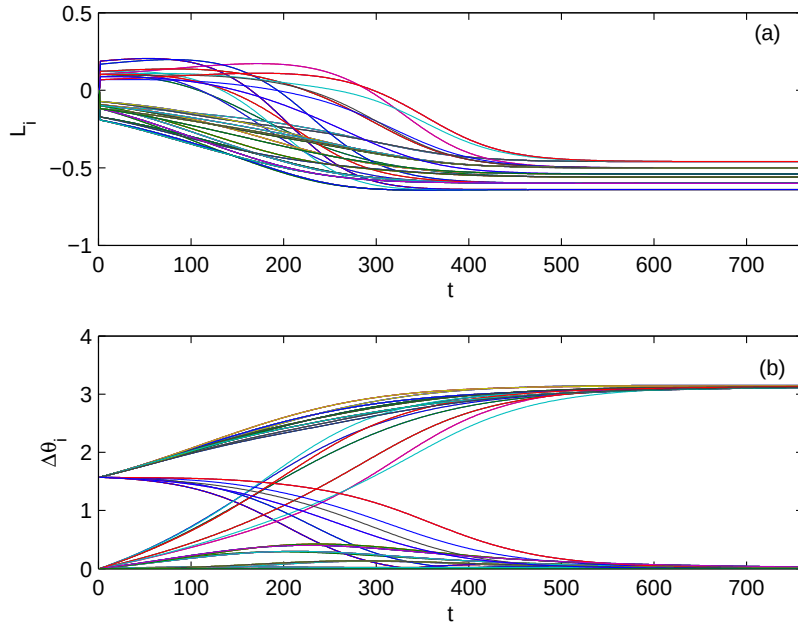


Figura 5. Recuperação do padrão P3 com $m_{inicial} = 0.7$. (a) Evolução da função de energia para cada oscilador; (b) Evolução das diferenças de fase.

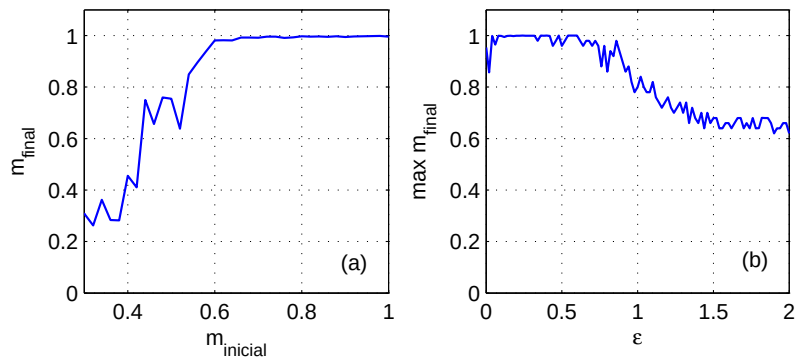


Figura 6. (a) *overlap* final como função do *overlap* inicial para $N=100$, $p=4$ e $\epsilon = 0.2$. (b) *overlap* final máximo em função do parâmetro ϵ .

Referências

- Aonishi, T. (1998). Phase transitions of an oscillator neural network with a standard hebb learning rule. *Phys. Rev. E*, 58(4):4865–4871.
- Axmacher, N., Mormann, F., Fernández, G., Elger, C. E., and Fell, J. (2006). Memory formation by neuronal synchronization. *Brain Research Reviews*, 52(1):170 – 182.
- Chen, J. Y., Wong, K. W., Cheng, L. M., and Shuai, J. W. (2003). A secure communication scheme based on the phase synchronization of chaotic systems. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 13(2):508–514.
- Dehmer, M. (2008). Information processing in complex networks: Graph entropy and information functionals. *Applied Mathematics and Computation*, 201(1-2):82 – 94.
- Engel, J. and Pedley, T. A. (2008). *Epilepsy: a comprehensive textbook*. Copyright, Philadelphia, 2nd edition.
- Hammond, C., Bergman, H., and Brown, P. (2007). Pathological synchronization in parkinson’s disease: networks, models and treatments. *Trends in Neurosciences*, 30(7):357–364.
- Hopfield, J. J. (1982). Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities. *Proc. NatL Acad. Sci.*, 79:2554–2558.
- Huygens, C. (1673). *Horologium Oscillatorium*. Apud F. Muguet, Parisis.
- Ishii, S., Fukumizu, K., and Watanabe, S. (1996). A network of chaotic elements for information processing. *Neural Networks*, 9(1):25–40.
- Kandel, E. R., Schwartz, J. H., and Jessell, T. M. (2000). *Principles of Neural Science*. McGraw-Hill, New York, 4th edition.
- Kuramoto, Y. (1984). *Chemical Oscillations, Wave and Turbulence*. Springer-Verlag, Berlin.
- Llinás, R. R. (2001). *I of Vortex: From Neurons to Self*. MIT Press, Cambridge, MA.
- Nishikawa, T., Lai, Y.-C., and Hoppensteadt, F. C. (2004). Capacity of oscillatory associative-memory networks with error-free retrieval. *Phys. Rev. Lett.*, 92(10):108101.
- Sauseng, P. and Klimesch, W. (2008). What does phase information of oscillatory brain activity tell us about cognitive processes? *Neuroscience and Biobehavioral Reviews*, 32(5):1001 – 1013.
- Sauseng, P., Klimesch, W., Gruber, W. R., and Birbaumer, N. (2008). Cross-frequency phase synchronization: A brain mechanism of memory matching and attention. *NeuroImage*, 40(1):308 – 317.
- Sherman, A., Rinzel, J., and Keizer, J. (1988). Emergence of organized bursting in clusters of pancreatic beta-cells by channel sharing. *Biophysical Journal*, 54(3):411–425.
- Sporns, O., Chialvo, D. R., Kaiser, M., and Hilgetag, C. C. (2004). Organization, development and function of complex brain networks. *Trends in Cognitive Sciences*, 8(9):418–425.

- Torre, V. (1976). A theory of synchronization of heart pace-maker cells. *Journal of Theoretical Biology*, 61(1):55 – 71.
- VanWiggeren, G. D. and Roy, R. (1998). Communication with chaotic lasers. *Science*, 279(5354):1198–1200.
- Xiu, C., Liu, X., Tang, Y., and Zhang, Y. (2004). A novel network of chaotic elements and its application in multi-valued associative memory. *Physics Letters A*, 331(3-4):217 – 224.
- Zhao, L., Cupertino, T. H., and Jr., J. R. B. (2008). Chaotic synchronization in general network topology for scene segmentation. *Neurocomputing*, 71(16-18):3360 – 3366. Advances in Neural Information Processing (ICONIP 2006) / Brazilian Symposium on Neural Networks (SBRN 2006).