



20 e 21 de outubro
Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE
São José dos Campos - SP

Caracterização da dinâmica caótica em séries temporais

Laurita dos Santos¹ e Elbert E. N. Macau²

¹Programa de Doutorado em Computação Aplicada – CAP
Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais – INPE

²Laboratório Associado de Computação e Matemática Aplicada – LAC
Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais – INPE

{laurita.santos,elbert}@lac.inpe.br

Abstract. *This paper aims to present methods that assist in determining the presence of chaotic dynamics in systems from time series. The methods discussed are: analysis of time series (stationarity and determinism), Takens method to reconstruct the state space and Wolf method for estimating the Lyapunov exponents. These methods were used in a series of variable x of the Lorenz system and were efficient and may contribute to determining the dynamics of a chaotic system.*

Resumo. *A principal característica ligada a um sistema que possui dinâmica caótica é sua sensibilidade à variação das condições iniciais, ou seja, uma pequena variação nas condições iniciais faz com que o sistema evolua de forma imprevisível. Relacionado ao estudo da presença de dinâmica caótica em sistemas com características similares às encontradas na natureza pode-se citar Lorenz, que estudou um modelo simplificado de convecção e detectou a sensibilidade desse sistema à variação das condições iniciais. Para analisar a presença de dinâmica caótica de um sistema natural, pode-se estudar certas propriedades que conduzem a fortes evidências dessa presença através de séries temporais. Para tal, espera-se que o sistema seja determinístico, apresente um comportamento com características de estacionariedade e apresente sensibilidade à variação nas condições iniciais. Este trabalho tem por objetivo apresentar métodos que auxiliam na determinação da presença da dinâmica caótica em sistemas a partir de séries temporais. Os métodos abordados são: análise da série temporal (determinismo e estacionariedade), método de Takens para reconstrução do espaço de estados e método de Wolf para estimação dos expoentes de Lyapunov. Estes métodos foram utilizados em séries da variável x do sistema de Lorenz e mostraram-se eficientes podendo contribuir para a determinação da dinâmica caótica de um sistema.*

Palavras-chave: *Caracterização da Dinâmica Caótica, Séries Temporais, Reconstrução do Espaço de Estados*

1. Introdução

A principal característica ligada a um sistema que possui *dinâmica caótica* é sua *sensibilidade à variação das condições iniciais*, ou seja, uma pequena variação nas condições iniciais faz com que o sistema evolua de forma imprevisível [Lorenz 1963, Kantz and Schreiber 2004]. A descoberta da existência desse tipo de dinâmica está ligado ao trabalho pioneiro de Henri Poincaré em o “Problema Planar Restrito dos Três Corpos” [Poincaré 1892]. Nesse trabalho ele introduziu três hipóteses simplificadoras: *apenas três corpos se deslocam num plano; dois corpos com massa finita e um com massa desprezível e condição inicial favorável para os corpos de massa não desprezível se deslocarem em um movimento circular uniforme em torno do centro de massa do sistema* [Poincaré 1892]. Tentando caracterizar a estabilidade desse problema, Poincaré chegou a um tipo de dinâmica que pode estar presente em um *sistema determinístico* e que resulta em movimentos tão “complexos” que ele deixou a caracterização destes para gerações futuras.

Analisando sistemas com características similares às encontradas na Natureza, o trabalho do meteorologista Edward Lorenz [Lorenz 1963] foi o grande divisor de águas. Estudando um modelo simplificado de um sistema de convecção, encontrou a característica da *sensibilidade à variação das condições iniciais*, denominado por ele de *Efeito Borboleta*¹, propriedade presente no seu *Atrator de Lorenz*. Esse trabalho lançou as bases para que se aventasse a possibilidade da existência da dinâmica caótica em sistemas naturais.

A partir do trabalho de Lorenz (1963) deu-se início a análise da dinâmica de outros sistemas. Quando se estudam sistemas naturais, o comportamento do sistema é caracterizado através de medidas feitas de sensores adequadamente posicionados [Monteiro 2006]. O resultado das medidas, ao longo do tempo, provenientes dos sensores é uma seqüência discreta de pontos denominado *série temporal*. Dada uma série temporal experimental, a questão demandada para analisar esse sistema é se essa série apresenta ou não dinâmica caótica.

Embora saber se o sistema apresenta ou não dinâmica caótica seja ainda inconclusivo, uma vez que o conceito de dinâmica caótica está ligado a se demonstrar a existência de certas propriedades em um sistema, e desejando-se um índice de confiança de 100%, ao longo dos anos, técnicas foram desenvolvidas permitindo que um experimentalista tenha “fortes evidências” da presença da dinâmica caótica em seu sistema sob análise. Para tal, espera-se que o sistema seja determinístico, apresente um comportamento com características de *estacionariedade* e apresente sensibilidade à variação nas condições iniciais. Mas como determinar a presença dessas características em uma série temporal?

Esse trabalho tem por objetivo verificar um possível caminho a ser seguido, a partir de séries temporais, para responder a essa questão. Dada uma série temporal obtida através de apenas um observável $x(t_i)$, $i = 1, 2, \dots$ quer-se analisar: 1– a presença de estacionariedade da série; 2– se ela é regida por uma dinâmica determinística; 3– a

¹Efeito Borboleta: alusão feita para explicar o fenômeno da sensibilidade a pequenas variações nas condições iniciais. Segundo Lorenz, pequenas perturbações causadas pelo bater de asas de uma borboleta no Brasil pode provocar o surgimento de um tornado no Texas. Esta metáfora foi feita por Lorenz em um seminário apresentado em 1972 intitulado *Predictability: Does the Flap of a Butterfly's Wings in Brasil Set off a Tornado in Texas?*.

caracterização dinâmica e a sensibilidade à variação das condições iniciais (através da reconstrução do atrator e dos expoentes de Lyapunov).

Através do emprego desses métodos objetiva-se inferir a presença ou não da dinâmica caótica de um sistema, utilizando-se séries temporais. A partir dessa inferência pode-se elaborar um modelo do sistema analisado para prever o comportamento deste ao longo do tempo. Caso seja constatada dinâmica caótica, detectada pelas medidas, estas só possuem validade por um tempo dado pelo inverso do expoente de Lyapunov de maior valor [Ott 1994, Kantz and Schreiber 2004].

Sabe-se que, essa questão acerca da determinação da dinâmica caótica e um eventual atrator caótico associado a um sistema (a partir de séries temporais) ainda está aberta, aguardando novos experimentos e métodos inovadores. Como por exemplo, tem-se trabalhos que negam a existência de atratores caóticos na atmosfera, nenhum indício foi encontrado por [Weber et al. 1995]; e Lorenz (1963) afirma que em um sistema dinâmico complexo, tal como o clima, não há um atrator de baixa dimensão associado (obtendo-se valores da dimensão de correlação de um conjunto de subsistemas e não do sistema completo).

Para finalizar, com esse trabalho, espera-se contribuir de alguma forma focando a discussão em torno do tema de determinação da presença de dinâmica caótica a partir de séries temporais.

2. Sistemas dinâmicos e séries temporais

Segundo Monteiro (2006) um sistema é “um conjunto de objetos agrupados por alguma interação ou interdependência, de modo que existam relações de causa e efeito nos fenômenos que ocorrem com os elementos desse conjunto”. Alguns exemplos de sistemas podem ser o planeta Júpiter e seus satélites naturais, os órgãos do corpo humano, o ecossistema de uma floresta, equações que descrevem um determinado comportamento, etc. Um sistema pode ser considerado *dinâmico* quando esse possui grandezas relacionadas aos objetos constituintes que variam no tempo (Leibniz primeiramente aplicou o termo *dinâmica* nesse contexto).

Determinar a evolução temporal das grandezas de um sistema é importante pois possibilita estudar um sistema que ainda não existe fisicamente, por exemplo, um satélite artificial a ser construído. Por outro lado, pode-se também, tentar compreender características de um sistema já existente, por exemplo, questões da Biologia ligadas a organismos vivos na tentativa de evitar etapas de experimentos muito caras ou perigosas [Aguirre 2007].

Considerando a variável temporal, um sistema dinâmico pode ser de tempo discreto ou contínuo. *Sistemas dinâmicos discretos* são aqueles onde o tempo t é um número inteiro não negativo ($t \in \mathbb{Z}_+$). Usa-se um modelo discreto quando é necessário esperar um intervalo de tempo finito para que o valor de x possa variar. A evolução do sistema dinâmico discreto é governada por *equações de diferenças* (equação que relacionam iterativamente o valor de x no instante t a outros instantes ($t + 1, t + 2, \dots$)) [Monteiro 2006]:

$$x_{t+1} = f(x_t) \tag{1}$$

onde $x \in R^m$ corresponde aos estados do sistema e $x(0)$ é a condição inicial do sistema dinâmico.

Sistemas dinâmicos contínuos são aqueles onde o tempo t é um número real não negativo ($t \in R_+$). Usa-se um modelo contínuo quando x pode variar num intervalo tão pequeno quanto se queira (infinitesimal). Mas o fato de t variar continuamente não implica que $x(t)$ seja uma função contínua, por outro lado, $x(t)$ pode ser descrito por equações diferenciais sendo, então, contínuo. A evolução do sistema dinâmico contínuo é governada por uma ou mais equações diferenciais (escrita em termos de derivadas da variável x) [Monteiro 2006]:

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t)) \quad (2)$$

Se f for constituída de m funções contínuas lineares, então o sistema dinâmico é *linear* ou, do contrário, é *não linear*. Se f depende explicitamente do tempo t , então o sistema dinâmico é não autônomo, caso contrário, é autônomo.

Outra classificação possível de um sistema dinâmico é se esse é *determinístico* ou *estocástico*. Sistema dinâmico determinístico é aquele onde as variáveis e parâmetros são ditos determinísticos, ou seja, não são variáveis aleatórias. Sistema dinâmico estocástico é aquele onde as variáveis e parâmetros são aleatórios. Nesse estudo, saber, a partir de seus dados de entrada e saída, se um sistema é determinístico ou estocástico pode vir a representar um grande desafio, para o qual não existe um método geral e conclusivo.

Um sistema dinâmico também pode ser caótico. Isso ocorre, entre outros sistemas, em *sistemas dissipativos determinísticos*² e que apresentam movimento não periódico podendo estar limitado no espaço de estados (essas regiões limitadas são denominadas de *atratores*, para as quais as trajetórias convergem). Em outras palavras, pode-se dizer que um sistema dinâmico possui comportamento caótico quando: 1— há imprevisibilidade no comportamento do sistema, ou seja, não é possível imediatamente, prever o estado do sistema para um tempo futuro a partir de medidas obtidas de suas saídas, devido a presença de incertezas de medição e não acuracidade de sensores e 2— as órbitas devem ser não-periódicas, limitadas e com sensibilidade às condições iniciais, ou seja, uma pequena alteração na condição inicial do sistema o conduz para trajetórias diferentes das geradas com outra condição inicial similar (provocando o efeito anterior).

Uma série temporal pode ser entendida estatisticamente como uma coleção de observações feitas ao longo do tempo. Em experimentos, quando não se conhece todo o sistema, pode-se usar a série temporal para inferir características do sistema analisado. Para aplicar ferramentas de sistemas dinâmicos, nesse contexto, uma fundamental característica é classificar a série temporal como estacionária ou não estacionária através do teste da estacionariedade.

2.1. Estacionariedade

Segundo [Kantz and Schreiber 2004] para a existência de estacionariedade os parâmetros relevantes para a dinâmica do sistema analisado devem ser constantes durante o período

²Sistemas dinâmicos dissipativos determinísticos são aqueles onde os pontos de um dado volume se movem e com o passar do tempo esse volume se contrai [Monteiro 2006].

mensurado (esses parâmetros devem ser os mesmos também em experimentos).

Uma série temporal é denominada estacionária se a probabilidade de encontrar o sistema em algum momento em um determinado estado e posteriormente em outro estado é independente do tempo de observação, isto é, quando calculado a partir dos dados. Isso inclui a constância dos parâmetros relevantes, mas também é necessário que o fenômeno por trás da dinâmica contenha uma série temporal com certa frequência, tal que a probabilidade e demais características possam ser inferidas corretamente. Se um sinal é muito regular quase todo o tempo, mas contém uma região irregular muito grande, então a série temporal deve ser considerada não estacionária. Sinais não estacionários são comumente encontrados em fenômenos culturais e da natureza [Kantz and Schreiber 2004].

2.1.1. Teste de estacionariedade

O teste de estacionariedade em séries temporais usa-se o método de Janelas Móveis conforme descrito em [Campanharo 2006]. Dado uma série temporal, definem-se janelas móveis todos os subconjuntos de dados possíveis de tamanho L . A finalidade desse teste é analisar as propriedades, como média e variância, ao longo da série temporal conforme a relação:

$$\begin{aligned}\mu_t - \sigma_t &\leq \mu_p \leq \mu_t + \sigma_t \\ \sigma_t^2 - \sigma_t &\leq \sigma_p^2 \leq \sigma_t^2 + \sigma_t\end{aligned}\tag{3}$$

sendo μ_t , σ_t e σ_t^2 média, desvio padrão e variância da série total e μ_p e σ_p^2 média e variância da janela móvel (parcial).

O sistema abordado nesse trabalho é o sistema de Lorenz. O sistema de Lorenz é um sistema de equações diferenciais ordinárias: $dx(t)/dt = \sigma(y(t) - x(t))$, $dy(t)/dt = x(t)(\rho - z(t)) - y(t)$ e $dz(t)/dt = x(t)y(t) - \beta z(t)$. Para os parâmetros $\sigma = 10$, $\rho = 28$ e $\beta = 8/3$ apresenta um atrator caótico no seu espaço de estados, com condições iniciais do sistema ($x(0) = 5, y(0) = 5$ e $z(0) = 5$). Sempre que possível nesse trabalho usa-se a componente x desse sistema que é obtida a partir da solução numérica com o método de Runge-Kutta de quarta ordem. A variável x desse sistema é usada para o teste de estacionariedade. Usando janelas móveis de $L = 200$ e passo de $\Delta_L = 100$ (intervalo entre as janelas móveis) pontos da série (permitindo-se sobreposição) todas as relações estabelecidas anteriormente são satisfeitas, portanto, pode-se dizer que a série é estacionária.

2.2. Surrogate de séries temporais

A análise estatística de séries temporais experimentais de sistemas não lineares geralmente envolvem testes de hipótese nula³ baseados em alguma medida não linear. Tais medidas, como por exemplo, dimensão de correlação ou expoentes de Lyapunov requerem

³Hipótese nula é uma hipótese a respeito dos dados analisados dita verdadeira até que provas estatísticas mostrem o contrário.

análises com dados "substitutos" (*surrogate*) para verificar se as séries são oriundas ou não de um sistema determinístico [Dolan and Spano 2001].

A forma mais simples de obter uma série *surrogate* é através do processo de embaralhamento aleatório. Esse simples algoritmo consiste na permutação aleatória dos dados originais. Os dados originais são incluídos na nova série completamente fora da ordem temporal no qual se apresentavam anteriormente. Esse método garante que a série *surrogate* possui a consistência de acordo com a hipótese nula de um processo aleatório, pois preserva a distribuição dos dados originais (caso a hipótese nula seja verdadeira) [Fujimoto and Iokibe 2000]. Algumas análises realizadas a partir desse simples tipo de *surrogate* são apresentadas na Seção 5. Outras formas de obter uma série *surrogate* dá-se através de transformadas de Fourier que preservam características, como a distribuição das séries originais [Dolan and Spano 2001].

3. Reconstrução do espaço de estados

O espaço de estados pode ser utilizado para caracterizar um sistema conhecido de equações ou observado em experimentos. O conceito básico envolvendo a reconstrução do espaço de estados está associado ao fato que a evolução temporal do sistema (por exemplo séries temporais) fornece informações sobre variáveis não observáveis e que podem estimar o estado presente [Packard et al. 1980].

A idéia da heurística por trás do método de reconstrução, por exemplo, considerando o sistema de Lorenz, é que para especificar o estado deste sistema tridimensional para um determinado instante de tempo, a medição de quaisquer três quantidades independentes deve ser suficiente para estimar o comportamento do sistema.

3.1. Método de Takens

O teorema de Takens ou método de Takens fornece a base teórica para análise de séries temporais geradas a partir de sistemas dinâmicos determinísticos não lineares. Esse teorema tem estimulado sua vasta aplicação na análise da dinâmica de fluídos em diversas áreas como Engenharia Elétrica, Medicina, Biologia, Física, etc, introduzindo o novo ramo da análise não linear denominado como Análise de Séries Temporais Caóticas [Stark 1999].

Simplificadamente, esse teorema permite reconstruir a dinâmica do sistema analisado e desconhecido a partir de uma série temporal observada através da elaboração de um "novo" espaço de estados, recuperando a possível estrutura geométrica imersa nesse espaço. Essa estrutura geométrica é denominada atrator reconstruído, está imersa no espaço denominado espaço de imersão e é considerada equivalente ao atrator original do sistema dinâmico de equações [Campanharo 2006].

Considerando uma série temporal $\{x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_N)\}$, N o tamanho da série, o espaço de estados formado pelas coordenadas de tempo de atraso pode ser escrito como os vetores ξ_i (representa a posição do ponto no espaço de imersão) [Baker and Gollub 1998]:

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= (x(t_1), x(t_1 + \tau), x(t_1 + 2\tau), \dots, x(t_1 + (m-1)\tau)), \\
\xi_2 &= (x(t_2), x(t_2 + \tau), x(t_2 + 2\tau), \dots, x(t_2 + (m-1)\tau)), \\
&\vdots \\
\xi_i &= (x(t_i), x(t_i + \tau), x(t_i + 2\tau), \dots, x(t_i + (m-1)\tau)), \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{4}$$

onde i varia de 1 a N , $(t_{i+1} - t_i) = \Delta t$ para $\tau = \Delta t$, m está relacionado a dimensão requerida (dimensão de imersão) e τ é o tempo de atraso.

Para a reconstrução do espaço de estados é necessário a escolha adequada do (τ) , conforme descrito em [Baker and Gollub 1998]. A escolha do atraso τ apropriado é importante para a reconstrução do espaço de estados.

3.1.1. Determinação do tempo de atraso

Um dos fatores importantes para reconstrução adequada do espaço de estados está relacionada ao τ . Se τ é muito pequeno, então as coordenadas $\{x(t_i), x(t_i + \tau), x(t_i + 2\tau), \dots\}$ de um vetor ξ_i são quase iguais ficando muito próximas à diagonal no espaço de estados e a reconstrução será inútil. Em contrapartida, se τ é muito grande então as coordenadas são tão distantes quanto consideradas correlacionadas. Podem ocorrer dobras e esticamentos sem real relação causal entre os dados usados para formar as demais coordenadas de um ponto no espaço de estados [Baker and Gollub 1998, Stark 1999].

Há alguns métodos de escolha do tempo de atraso podendo ser citados a informação mútua [Fraser and Swinney 1986] e a função de autocorrelação abordada nesse estudo. A autocorrelação é uma abordagem que examina a correlação entre pares de pontos de uma mesma série temporal como uma função do tempo de separação [Kantz and Schreiber 2004].

A função de autocorrelação $A(\tau)$ de uma série temporal descrita é:

$$A(\tau) = \frac{1}{N - \tau} \sum_{n=1}^{N-\tau} \frac{(x_n - \bar{x})(x_{n+\tau} - \bar{x})}{\sigma^2} \tag{5}$$

onde N é a quantidade de pontos da série temporal, \bar{x} representa a média e σ^2 a variância [Campanharo 2006].

3.1.2. Determinação da dimensão de imersão

Após a escolha adequada do tempo de atraso τ faz-se necessário a determinação da dimensão do atrator reconstruído [Ott 1994]. Entre os métodos existentes para estimar a dimensão do sistema, nesse estudo verifica-se a forma mais difundida que é

a dimensão de correlação (D). A dimensão de correlação dada é introduzida por [Grassberger and Procaccia 1983] (algoritmo de Grassberger e Procaccia (G-P)) segundo a relação:

$$D = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log C(\epsilon)}{\log \epsilon} \quad (6)$$

onde a soma da correlação ou função de correlação integral ($C(\epsilon)$) para a coleção de pontos x_n em algum espaço vetorial para ser uma fração de todos os possíveis pares de pontos que são próximos a uma determinada distância ϵ em uma norma particular. A fórmula básica utilizada é:

$$C(\epsilon) = \frac{2}{N(N-1)} \sum_{i,j=1}^N H(\epsilon - \|\xi_i - \xi_j\|), \quad i \neq j \quad (7)$$

onde N é o número de pontos do atrator reconstruído, $H(x)$ é a função de Heaviside, $H(x) = 1$ se $x > 0$ e $H(x) = 0$ se $x \leq 0$, ϵ é o parâmetro de distância e $\|\cdot\|$ é a distância entre dois vetores reconstruídos, que é calculada usando a norma euclidiana. Espera-se que a Equação 3.7 se comporte como uma lei de potência para ϵ pequenos, $C(\epsilon) \propto \epsilon^D$ [Kantz and Schreiber 2004].

Usualmente estima-se o coeficiente angular da região linear obtido através do gráfico $\log(C(\epsilon))$ versus $\log \epsilon$. Esse coeficiente angular é então considerado uma estimativa da dimensão de correlação $D(m)$ da projeção do atrator original no espaço reconstruído m -dimensional. Para considerar a estimativa de $D(m)$ como se fosse a dimensão do sistema é necessário usar um número grande de valores de m , seguindo a relação na Equação 3.4 [Wang and Chen 2001]. A dimensão D é uma das principais ferramentas para identificar a existência de dinâmica caótica. No caso de sinais determinísticos, esse valor de D atinge um valor máximo devido a natureza de baixa dimensão do sistema.

4. O método de Wolf et al [1985]

Esse método realiza a estimativa do maior expoente de Lyapunov (λ_1) de um sistema. Segundo Wolf et al [1985], dado uma série temporal $x(t)$, um espaço de estados m -dimensional é reconstruído com coordenadas de atraso (conforme descrito anteriormente), um ponto sobre o atrator é dado por $\{x(t), x(t + \tau), \dots, x(t + (m - 1)\tau)\}$. Um vizinho próximo é localizado (por distância euclidiana, por exemplo) ao ponto inicial $\{x(t_0), \dots, x(t_0 + (m - 1)\tau)\}$ e denotado a distância entre esses dois pontos $L(t_0)$.

Em outras palavras, considerando uma trajetória de referência (fiducial) $y(t_0), y(t_1), \dots$ e $z_0(t_0)$ como o vizinho mais próximo no atrator reconstruído de $y(t_0)$, $L(t_0)$ é definido como $L(t_0) = |y(t_0) - z_0(t_0)| < \epsilon$. Portanto, $z_0(t_0)$ está dentro da hipersfera de raio ϵ em centrada em $y(t_0)$ [Campanharo 2006]. Em um instante de tempo t_1 , a distância entre os dois pontos excede ϵ , (L'_0), logo substitui-se z_0 por outro vizinho próximo a $y(t_1)$ de tal forma que satisfaça dois critérios: sua distância $L(t_1)$ do ponto fiducial evoluído seja pequena (respeitando ϵ) e a separação angular θ entre os pontos evoluído e repostado também seja pequeno (ver Figura 1).

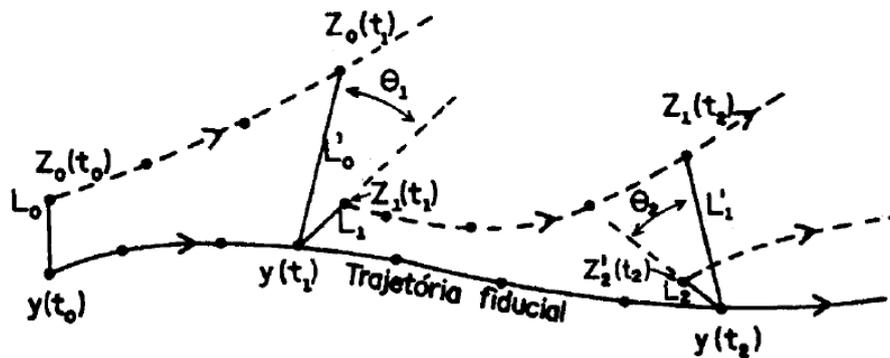


Figura 1. Representação do método de [Wolf et al. 1985]. O maior expoente de Lyapunov é calculado a partir do crescimento dos elementos L_i . Quando a distância dos vetores entre os dois pontos excede ϵ , um novo ponto é escolhido próximo a trajetória de referência, minimizando a distância L e o ângulo θ . FONTE: adaptada de [Wolf et al. 1985].

5. Análise de resultados preliminares

Para analisar se os métodos descritos nas Seções anteriores são capazes de detectar presença de dinâmica caótica a partir de séries temporais foram usadas séries com diferentes tamanhos. As séries temporais são geradas a partir da variável x do sistema de Lorenz. Nesse estudo o tamanho da série temporal foi um parâmetro considerado importante para verificar os métodos estudados, uma vez que, quando trata-se de séries temporais experimentais pode-se obter séries de tamanhos variados, dependendo da quantidade de observações realizadas.

5.1. Comportamento das séries temporais

A Figura 2 mostra a série original e a série *surrogate* obtida a partir do embaralhamento aleatório conforme descrito na Figura 2.2. Destaca-se que para uma análise mais robusta usando séries *surrogate* torna-se necessária a geração dessas séries usando demais métodos, como citados em [Theiler et al. 1992]. Observa-se que há perda da característica da série original. Uma das possíveis formas para verificar a rejeição à hipótese nula é pelo cálculo da autocorrelação da série original e da *surrogate* (conforme 3).

Analisando o comportamento da função de autocorrelação apresentado pelas duas séries temporais na Figura 3 evidencia-se uma separação entre estas, indicando uma rejeição a hipótese nula. Mas essa análise explicita apenas a diferença entre as duas séries destacando a relação temporal presente na série original e que não é destacado na série *surrogate*. Para analisar a dinâmica caótica da série original são necessárias mais medidas [Campanharo 2006].

5.2. Reconstrução do espaço de estados

5.2.1. Determinação do tempo de atraso

O tempo de atraso τ é estimado a partir da autocorrelação da série (conforme Equação 3.5). Nesse estudo o τ corresponde a $1/6$ do primeiro zero apresentado pela

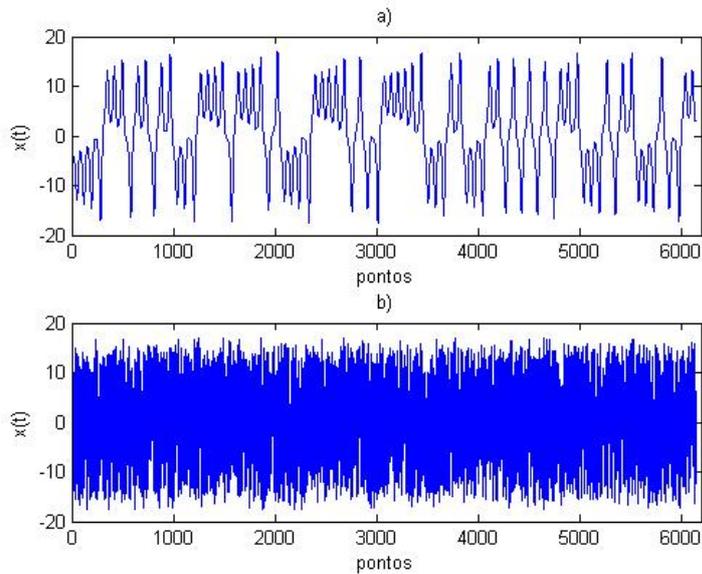


Figura 2. a) Séries original com 6144 pontos. b) Série *surrogate* obtida a partir da série original.

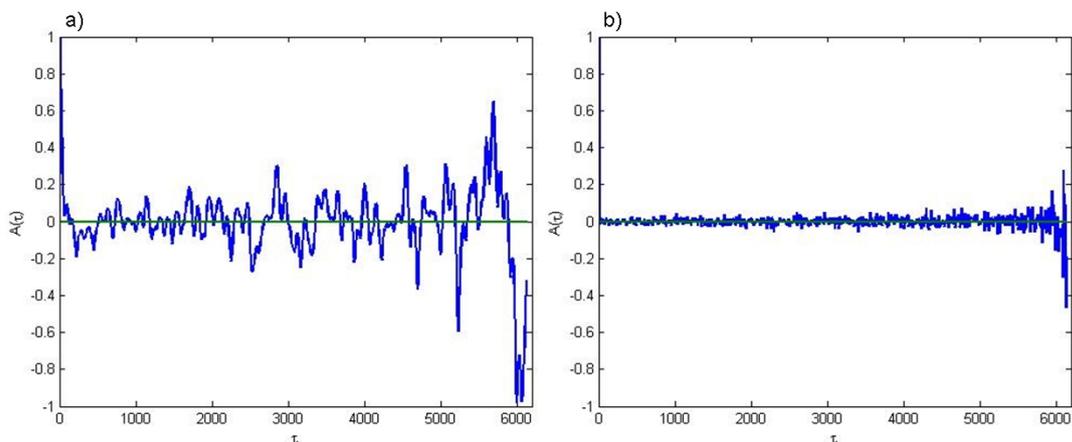


Figura 3. a) Autocorrelação da série temporal original. b) Autocorrelação da série *surrogate* gerada do embaralhamento aleatório da série original.

autocorrelação (essa correspondência foi estimada empiricamente). Para as séries temporais da variável x usadas nesse estudo tem-se $\tau = 10$. Este valor é preservado conforme o tamanho da série temporal é incrementado, uma vez que, o Δt é mantido constante.

5.2.2. Determinação da dimensão de imersão

Após estimar o tempo de atraso adequado para análise das séries, a reconstrução do espaço de estados foi realizada a partir do cálculo da correlação integral (conforme Figura 3.1.2). Para esta estimativa foi usada o pacote **d2** do software livre TISEAN [Schreiber and A.Schmitz 1999, Kantz and Schreiber 2004]. Foram testadas nessa etapa 8 séries temporais geradas a partir da variável x do sistema de Lorenz com 512, 1024,

2048, 3072, 4096, 5120, 6144 e 7168 pontos⁴. Para a reconstrução do espaço de estados a partir de cada série foram geradas $m = 9$ dimensões. A Tabela 1 mostra os valores médios obtidos para dimensão de correlação ($\langle D \rangle$) de cada série.

Tabela 1. Valores D para séries temporais da variável x do sistema de Lorenz de diferentes tamanhos. Cada valor corresponde ao valor médio dado por $m = 1$ a 10.

Tamanho da série	$\langle D \rangle$
512 pontos	1.95 ± 0.49
1024 pontos	2.04 ± 0.50
2048 pontos	1.94 ± 0.46
3072 pontos	2.03 ± 0.51
4096 pontos	2.07 ± 0.54
5120 pontos	2.06 ± 0.55
6144 pontos	2.10 ± 0.57
7168 pontos	2.14 ± 0.60

Segundo [Lorenz 1963] a dimensão de correlação do sistema de Lorenz é 2.02. Observa-se que mesmo variando o tamanho das séries, na maioria dos casos, os valores obtidos se mantêm próximo ao valor dado como referência.

5.3. Expoente de Lyapunov

A presença de pelo menos um expoente de Lyapunov positivo pode ser um indício de dinâmica caótica no sistema analisado. Para analisar o maior expoente de Lyapunov das séries descritas acima (nos seus diferentes tamanhos) foi utilizado o algoritmo descrito em [Wolf et al. 1985] que estima-o a partir de séries temporais. A Figura 2 mostra o valor de λ_1 para as diferentes séries.

Tabela 2. Valores λ_1 para séries temporais da variável x do sistema de Lorenz de diferentes tamanhos.

Tamanho da série	λ_1
512 pontos	0.90 ± 0.15
1024 pontos	1.93 ± 0.34
2048 pontos	1.28 ± 0.39
3072 pontos	1.55 ± 0.28
4096 pontos	1.42 ± 0.22
5120 pontos	1.44 ± 0.20
6144 pontos	1.49 ± 0.06
7168 pontos	1.43 ± 0.10

Observa-se na Tabela 2 que os valores de λ_1 de cada série divergem entre si, mas todas apresentam um expoente de Lyapunov positivo.

⁴O sistema de Lorenz que gerou as séries temporais de diferentes tamanhos, usadas para análise da determinação da dimensão de imersão, possui condições iniciais [5 5 5] e foi integrado com o método de Runge Kutta de quarta ordem com $\Delta t = 0.01$.

6. Considerações finais

Quando há o interesse de se estudar sistemas naturais, o comportamento do sistema pode ser caracterizado através de observações (por exemplo medidas de sensores) que ao longo do tempo resultam nas séries temporais. A questão toda é se há possibilidades de detectar dinâmica caótica a partir de séries temporais. Um possível meio para atingir esse objetivo foi estudado nesse trabalho. Para tal, foram analisados: a presença de estacionariedade da série, se é regida por determinismo, a caracterização dinâmica e a sensibilidade à variação das condições iniciais através da reconstrução do atrator e os expoentes de Lyapunov.

Verificou-se, nesse trabalho, que as séries da variável x do sistema de Lorenz são estacionárias, respeitando a relação apresentada na Subseção 2.1.1 (para os parâmetros usados). A análise inicial da série *surrogate* obtida através do embaralhamento aleatório da série original indica a possível relação temporal existente na série original que não está presente na série *surrogate*, rejeitando-se portanto, a hipótese nula (dados oriundos de um processo aleatório linear). Para avaliar com mais precisão essas informações seriam necessárias análises de outras séries *surrogate* de outros métodos, como as obtidas de transformada de Fourier.

Para a caracterização dinâmica das séries, nesse trabalho, verificou-se o método de Takens (1980) para a reconstrução do espaço de estados e o cálculo do maior expoente de Lyapunov (usando-se apenas o algoritmo proposto por [Wolf et al. 1985]) a partir de séries temporais (variável x do sistema de Lorenz). Esses métodos proporcionam informações quanto a dinâmica da série temporal analisada. Usando-se séries temporais com diferentes tamanhos, verificou-se que os valores da dimensão de correlação obtidos mantêm-se próximo ao valor de referência fornecido por [Lorenz 1963]. Portanto, pode-se inferir que esse método apresenta uma razoável robustez quando varia-se o tamanho da série analisada (para esse estudo).

Em relação aos expoentes de Lyapunov, detectou-se que apesar da variação apresentada pelas séries de diferentes tamanhos, todas, possuem o expoente de maior valor sendo positivo. Sabe-se que pelo menos a presença de um expoente de Lyapunov positivo é um indício da presença de dinâmica caótica no sistema.

Para finalizar, de um modo geral, pode-se dizer que esses métodos podem contribuir para a determinação da dinâmica caótica de um sistema, estudando-se séries temporais. Para o aperfeiçoamento desse trabalho, como perspectivas futuras, seriam necessárias o estudo de outras estratégias para o emprego desses métodos, como por exemplo, analisar séries *surrogate* geradas de outros métodos (que não o embaralhamento aleatório); adotar outros critérios para a determinação do valor de τ para a reconstrução do atrator, como a informação mútua e além dos expoentes de Lyapunov pode-se avaliar a entropia de Kolmogorov-Sinai.

Referências

- Aguirre, L. A. (2007). *Introdução à identificação dos sistemas: técnicas lineares e não lineares aplicadas a sistemas reais*. Editora UFMG.
- Baker, G. L. and Gollub, J. P. (1998). *Chaotic dynamics: an introduction*. Cambridge University Press.

- Campanharo, A. S. L. O. (2006). Análise de sinais turbulentos na copa da floresta amazônica: em busca de comportamento caótico e estruturas coerentes. ((INPE-14604-TDI/1184).
- Dolan, K. T. and Spano, M. L. (2001). Surrogate for nonlinear time series analysis. *Physical Review E*, 64:1–6.
- Fraser, A. M. and Swinney, H. L. (1986). Independent coordinates for strange attractors from mutual information. *Physical Review A*, 33(2):1134–1140.
- Fujimoto, Y. and Iokibe, T. (2000). Evaluation of deterministic property of time series by the method of surrogate data and the trajectory parallel measure method. *IEICE TRANS. FUNDAMENTALS*, E83-A(2):343–349.
- Grassberger, P. and Procaccia, I. (1983). Measuring the strangeness of strange attractors. *Physica D*, 9:189–208.
- Kantz, H. and Schreiber, T. (2004). *Nonlinear time series analysis*. Cambridge University Press.
- Lorenz, E. N. (1963). Deterministic non-periodic flow. *Journal of Atmospheric Science*, 26:130–136.
- Monteiro, L. H. A. (2006). *Sistemas dinâmicos*. Editora Livraria da Física.
- Ott, E. (1994). *Chaotic in Dynamical Systems*. Cambridge University Press.
- Packard, N. H., Crutchfield, J. P., Farmer, J. D., and Shaw, R. S. (1980). Geometry from a time series. *Physical Review Letters*, 45(9):712–716.
- Poincaré, H. (1892). *Les méthodes nouvelles de la mécanique celeste*. Gauthier-Villars, Paris.
- Schreiber, T. and A.Schmitz (1999). Surrogate time series. *Physica D*, 142:346–382.
- Stark, J. (1999). Delay embeddings for forced systems. i. deterministic forcing. *Journal Nonlinear Science*, 9:255–332.
- Theiler, J., Eubank, S., Longtin, A., Galdrikian, B., and Farmer, J. D. (1992). Testing for nonlinearity in time series: the method of surrogate data. *Physica D*, 58:77–94.
- Wang, W. J. and Chen, J. (2001). Estimation and application of correlation dimension of experimental time series. *Journal of Vibration and Control*, 4(9):973–977.
- Weber, R. O., Talkner, P., Stefanicki, G., and Arvisais, I. (1995). Search for finite dimensional attractor in atmospheric turbulence. *Boundary-Layer Meteorology*, 73:1–14.
- Wolf, A., Swift, J. B., Swinney, H. L., and Vastano, J. A. (1985). Determining lyapunov exponents from a time series. *Physica 16D*, (3).