



20 e 21 de outubro
Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE
São José dos Campos - SP

Desenvolvimento de algoritmo para segmentação de imagens SAR polarimétricas

Marcus F. S. Saldanha¹, Dra. Corina da Costa Freitas¹, Dr. Sidnei J. S. Sant'Anna¹

¹Divisão de Processamento de Imagens – Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE)

Av. dos Astronautas, 1758 – 12.227-010 – São José dos Campos – SP – Brasil.

marcus@dpi.inpe.br, corina@dpi.inpe.br, sidnei@dpi.inpe.br

Abstract. *The growing availability of polarimetric SAR images and its potential use for various applications have generated the need for developing automated techniques for processing and analysis. Among these techniques can be highlight the segmentation, responsible for the automatic extraction of features from a scene for a future task. As the majority of algorithms developed to segment SAR images do not use polarimetric complex data, several studies are beginning to emerge in this area. Given the small amount of similar work and the relevance of the segmentation process of complex polarimetric SAR images for remote sensing applications, this paper aims to present the design and part of implementing a segmentation of polarimetric SAR data, according to appropriate statistical modeling.*

Resumo. *A crescente disponibilidade de imagens SAR polarimétricas e seu potencial de uso para várias aplicações têm gerado a necessidade de desenvolvimento de técnicas automáticas de processamento e análise. Dentre essas técnicas destaca-se a segmentação, responsável pela extração automática de feições a partir de uma cena para uma tarefa posterior. Como a grande maioria dos algoritmos desenvolvidos para segmentar imagens SAR não utiliza dados polarimétricos complexos, começam a surgir diversos estudos nesta área. Dada a escassez de trabalhos similares desenvolvidos no país e a relevância do processo de segmentação de imagens SAR polarimétricas complexas para as aplicações de sensoriamento remoto, este trabalho tem como objetivo apresentar a concepção e parte da implementação de um segmentador de dados SAR polarimétricos, de acordo com a modelagem estatística apropriada.*

Palavras-chave: Algoritmo, Segmentação, imagens SAR polarimétricas, matriz de covariância complexa, distribuição de Wishart.

1. Introdução

Atualmente as principais fontes de informações para a obtenção de dados espaciais da superfície terrestre são oriundas de técnicas de sensoriamento remoto, que envolvem o emprego de sensores ativos e passivos. Dentre os tipos de sensores ativos disponíveis destaca-se o SAR polarimétrico ou simplesmente PolSAR (*Polarimetric Synthetic Aperture Radar*), pela sua capacidade de gerar imagens em praticamente qualquer condição climática e pelo fato das informações polarimétricas complexas (amplitude e fase), oriunda de tal sensor, permitir a decomposição e a identificação de diferentes mecanismos elementares de espalhamento contidos nos alvos da superfície terrestre [Correia, 2009].

Recentemente tem havido uma crescente disponibilidade de imagens SAR polarimétricas. Isto, associado ao potencial de uso deste tipo de dado para diversas aplicações tem ocasionado o aumento de uso dessas imagens. Esta situação tem motivado o desenvolvimento de técnicas automáticas de processamento e análise apropriadas ao tipo de dado, tais como a segmentação. Como a grande maioria dos algoritmos existentes, para executar a segmentação de imagens SAR, não estão preparados para lidar com informações polarimétricas complexas já começam a surgir no meio científico alguns estudos voltados para a segmentação de tal tipo de dado [Hänsch et al., 2008; Yang et al., 2008].

Dentro desse contexto, este trabalho tem como objetivo apresentar a maneira como foi concebido e parte do desenvolvimento de um segmentador de dados SAR polarimétricos, de acordo com a modelagem estatística apropriada. Além disso, apresenta alguns resultados preliminares obtidos com a aplicação de módulos de processamento já desenvolvidos, sobre dados reais.

2. Dados PolSAR

Atualmente os sistemas PolSAR (*Polarimetric SAR*), transmitem e recebem o retorno do sinal da radiação de micro-ondas polarizada no sentido horizontal (h) ou vertical (v). Isso permite medir a amplitude e a fase relativa de todas as configurações das antenas de transmissão e recepção hh , vv , vh e hv , para todos os elementos de resolução de uma cena [Ulaby e Elachi, 1990]. Estes sinais formam a matriz de espalhamento complexa que relaciona os campos elétrico incidente e espalhado [Van Zyl e Ulaby, 1990].

O *speckle* inerente nos dados SAR pode ser reduzido por uma média espacial à custa de perda de resolução espacial. Dessa forma, os dados SAR polarimétricos são freqüentemente processados em multi-look [Lee et al., 1994b], o que requer a média de várias matrizes de covariância de 1-look independentes. Assim, a partir de uma variável aleatória representada pelo vetor $\mathbf{Z}(k)$, que representa a k -ésima amostra de 1-look, podemos obter a variável aleatória denominada matriz de covariância para n -looks, dada por [Lee et al., 1995]:

$$\mathbf{Z}^{(n)} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbf{Z}(k) \cdot \mathbf{Z}^{*T}(k) = \begin{bmatrix} \langle |S_{hh}|^2 \rangle & \langle S_{hh} S_{hv}^* \rangle & \langle S_{hh} S_{vv}^* \rangle \\ \langle S_{hv} S_{hh}^* \rangle & \langle |S_{hv}|^2 \rangle & \langle S_{hv} S_{vv}^* \rangle \\ \langle S_{vv} S_{hh}^* \rangle & \langle S_{vv} S_{hv}^* \rangle & \langle |S_{vv}|^2 \rangle \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

onde n é o número de *looks*, o sobrescrito *T denota complexo conjugado e transposto e $\langle . \rangle$ denota a média. A matriz $\mathbf{Z}_c^{(n)}$ é Hermitiana positiva semi-definida, significando que seus autovalores são reais e maiores ou iguais a zero [Hellman, 2001]. Além disso, levando em conta a reciprocidade, que normalmente se aplica aos alvos naturais, e adotando-se a convenção de alinhamento denominada BSA (*Backscattering Alignment*), tem-se que $S_{hv} = S_{vh}$ [Ulaby et al., 1990].

2.1. Modelagem Estatística

O modelo comumente adotado na explicação do comportamento estatístico de dados obtidos com o SAR é o multiplicativo [Yanasse et al., 1995], o qual supõe, sob certas circunstâncias [Tur et al., 1982], que o valor observado em cada *pixel* é a ocorrência de uma variável aleatória Z dada por,

$$Z = X \cdot Y \quad (2.2)$$

onde X é a variável aleatória que modela o *backscatter* e Y é a variável aleatória que modela o *speckle*.

Quando se utilizam dados SAR polarimétricos complexos multi-look, os estudos realizados mostram que o *speckle*, definido a partir da matriz de covariância complexa, pode se apresentar de acordo com uma distribuição de Wishart.

Dependendo da região de estudo, assim como acontece com dados em canais individuais, a variável aleatória X , conforme o grau de homogeneidade do alvo, pode ser modelada de diferentes formas, acarretando modelagens diferentes para a distribuição associada ao retorno Z . Para o algoritmo em desenvolvimento, entretanto, a variável aleatória X é modelada como uma constante, ou seja, as regiões existentes em uma imagem são consideradas homogêneas.

Se o radar ilumina uma área de uma superfície contendo muitos espalhadores elementares, o vetor de espalhamento $\mathbf{Z}$ pode ser modelado por uma distribuição Gaussiana complexa multivariada [Goodman, 1963], isto é

$$\mathbf{Z} = [S_{hh}, S_{hv}, S_{vv}]^T \in N_c(0, \mathbf{C}) \quad (2.3)$$

sendo sua função densidade de probabilidade dada por:

$$f(\mathbf{z}) = \frac{1}{\pi^3 |\mathbf{C}|} \exp\{-\mathbf{z}^{*T} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{z}\} \quad (2.4)$$

onde $\mathbf{C}$ é a matriz de covariância complexa de $\mathbf{Z}$, $|\cdot|$ denota determinante e o sobrescrito -1 denota a inversa de uma matriz.

Segundo Srivastava (1963) e Goodman (1963), se a matriz $\mathbf{Z}^{(n)}$ definida na equação 2.1, de dimensão $q \times q$, tem n números de *looks*, então a matriz Hermitiana $\mathbf{B} = n \cdot \mathbf{Z}^{(n)}$ possui uma distribuição Wishart complexa multivariada $W_c(q, n, \mathbf{C})$ com uma matriz de covariância média $\mathbf{C}$ e função densidade de probabilidade dada por [Lee et al., 1994]:

$$f(b) = \frac{|b|^{n-q} e^{-\text{tr}(\mathbf{C}^{-1}b)}}{\pi^{(1/2)q(q-1)} \cdot \prod_{j=1}^n \Gamma(n-j+1) |\mathbf{C}|^n}, \quad (2.5)$$

onde, $\text{tr}(\cdot)$ denota o traço de uma matriz, e $\Gamma(\cdot)$ é a função Gama de Euler.

É interessante observar que, embora na literatura e neste trabalho estejamos denominando $\mathbf{Z}^{(n)}$ e $\mathbf{C}$ de matriz de covariância, a primeira trata-se de uma variável aleatória, enquanto que a segunda é o parâmetro da distribuição.

O estimador do parâmetro $\mathbf{C}$ para uma região com M pixels representados por $\mathbf{Z}^{(n)}(k)$ para $k=1, \dots, M$, obtido pelo método dos momentos é dado por:

$$\hat{\mathbf{C}} = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \mathbf{Z}^{(n)}(k). \quad (2.6)$$

Neste caso, $M \cdot \hat{\mathbf{C}}$ possuirá distribuição de Wishart $W_c(q, Mn, \mathbf{C})$.

2.2. Teste de igualdade de matrizes de covariância

Sendo $\mathbf{Z}_1^{(n)}$ e $\mathbf{Z}_2^{(m)}$ duas variáveis aleatórias representando matrizes de covariância, computadas pela equação 2.3. Conradsen et al. (2003) desenvolveram um teste estatístico baseado na suposição que $n\mathbf{Z}_1^{(n)}$ e $m\mathbf{Z}_2^{(m)}$ possuem distribuição de Wishart complexa, $W_c(q, n, \mathbf{C}_1)$ e $W_c(q, m, \mathbf{C}_2)$, respectivamente. O teste de razão de verossimilhança é usado para testar a igualdade das matrizes de covariância $\mathbf{C}_1$ e $\mathbf{C}_2$, ou seja,

$$H_0 : \mathbf{C}_1 = \mathbf{C}_2 \text{ contra } H_1 : \mathbf{C}_1 \neq \mathbf{C}_2 \quad (2.7)$$

Os estimadores de $\mathbf{C}_1$ como $\mathbf{C}_2$ podem ser calculados, respectivamente, por

$$\hat{\mathbf{C}}_1 = \mathbf{Z}_1^n, \text{ e} \quad (2.8)$$

$$\hat{\mathbf{C}}_2 = \mathbf{Z}_2^m. \quad (2.9)$$

O teste estatístico de razão de verossimilhança é dado por

$$Q = \frac{(n+m)^{q(n+m)}}{n^{qn} m^{qm}} \cdot \frac{|\mathbf{Z}_1^{(n)}|^n |\mathbf{Z}_2^{(m)}|^m}{|\mathbf{Z}_1^{(n)} + \mathbf{Z}_2^{(m)}|^{n+m}} \quad (2.10)$$

onde n e m são respectivamente, o números equivalentes de *looks* de $\mathbf{Z}_1^{(n)}$ e $\mathbf{Z}_2^{(m)}$, q representa o número de polarizações e $|\cdot|$ denota determinante. A distribuição assintótica da variável aleatória $L = -2\rho \ln Q$ é dada por

$$P\{L \leq z\} \cong P\{\chi^2(q^2) \leq z\} + \varpi_2 [P\{\chi^2(q^2 + 4) \leq z\} - P\{\chi^2(q^2) \leq z\}] \quad (2.11)$$

em que $\chi^2(l)$ representa uma variável aleatória com distribuição χ^2 com l graus de liberdade, e os parâmetros ρ e ϖ_2 são definidos por

$$\rho = 1 - \frac{2q^2 - 1}{6q} \cdot \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m} - \frac{1}{n+m} \right), \quad (2.12)$$

$$\varpi_2 = -\frac{q^2}{4} \left(1 - \frac{1}{\rho} \right)^2 + \frac{q^2(q^2 - 1)}{24\rho^2} \cdot \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{m^2} - \frac{1}{(n+m)^2} \right). \quad (2.13)$$

A variável aleatória L é limitada a $[0, \infty[$, com $L = 0$ para $\mathbf{C}_1 = \mathbf{C}_2$ e $n = m$.

3. Concepção

A característica principal levada em conta para a concepção do algoritmo de segmentação foi que o mesmo deveria trabalhar com dado SAR polarimétrico complexo (multi-look), representado na forma de matriz de covariância $\mathbf{Z}^{(n)}$ conforme definido na equação 2.1. O que permite o uso de informações polarimétricas, tais como, as diferenças de fase, as quais são descartadas por outros algoritmos de segmentação de dados SAR.

Para a representação das feições existentes na imagem, foi adotado o modelo *cartoon* [Oliver e Quegan, 2004], o que implica estatisticamente em supor que $n\mathbf{Z}^{(n)}$ possua uma distribuição de Wishart. Dessa forma, foi adotado como teste estatístico para a comparação entre matrizes de covariância o teste de hipóteses apresentado no item 2.3.

No que diz respeito à realização da segmentação propriamente dita, optou-se pela técnica de segmentação por crescimento de regiões com limite de crescimentos. Esta escolha foi feita tomando por base o fato de esta técnica adequar-se bem ao modelo *cartoon* e não exigir a suavização previa da imagem por meio de filtros como ocorre com a maioria das técnicas de detecção de bordas. Já a limitação de crescimento, foi adotada para impedir que algumas regiões cresçam demais em detrimento de outras existentes na imagem.

Outra característica adotada para o algoritmo é que a realização da segmentação fosse realizada seguindo o critério hierárquico de pirâmide [Jain et al., 1995]. Dessa forma, o resultado da segmentação, realizada em um nível de compressão acima, é usado no nível imediatamente inferior, e assim por diante, para auxiliar numa melhor definição dos segmentos finais.

Além dessas características, dois pré-requisitos considerados importantes, para o desenvolvimento de ferramentas para segmentação de imagens SAR, segundo Oliver e Quegan (2004), foram considerados: 1) Processamento automático, sem intervenção do operador, para que desta forma seja possível avaliar a velocidade e os resultados obtidos; e, 2) Ausência de ajustes específicos para uma imagem em particular, permitindo, entretanto, modificação de parâmetros globais, tal como índice de confiança para os testes estatísticos, com a finalidade de melhorar o resultado para uma determinada aplicação.

A concepção do algoritmo prevê a realização do processamento em três etapas, as quais são divididas em blocos conforme ilustrado na Figura 3.1. Dentro desta

estrutura estão embutidos cinco testes distintos: teste para crescimento de regiões, teste de ajuste de bordas, teste de homogeneidade para regiões, teste para agrupar regiões e teste de área mínima.

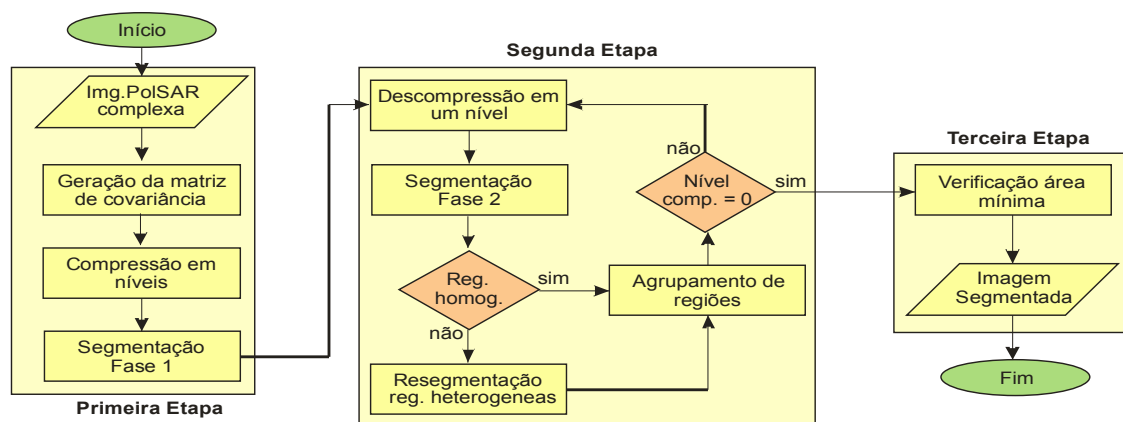


Figura 01 – Estrutura de processamento do algoritmo proposto para segmentação de imagens SAR polarimétricas.

A primeira etapa é dividida em quatro módulos: Entrada de dados, onde é carregada a imagem SAR polarimétrica (polarizações que dão origem a matriz de covariância), calculado o número máximo de compressões possíveis e solicitado ao usuário que entre com os parâmetros a serem usados na segmentação; Geração da matriz de covariância (Z_c''), cujos elementos são armazenados em canais individuais; Compressão em níveis, realizada conforme o nível selecionado pelo usuário; e, a Segmentação Fase 1, que consiste no crescimento de regiões a partir de *pixels* da imagem selecionados aleatoriamente.

A segunda etapa está dividida em quatro módulos: Descompressão da imagem em um nível; Segmentação Fase 2, onde as regiões segmentadas no nível superior são submetidas a dois testes. O primeiro é o teste de ajuste de bordas e o segundo um teste, para verificar se após descompressão os segmentos ainda se mantêm homogêneos (os segmentos considerados não homogêneos são segmentados novamente); e, Agrupamento de regiões homogêneas, onde um segmento é agrupado a outro adjacente se este passar em um teste de igualdade. Este fluxo de processamento se repete até que o nível de compressão seja o nível da imagem de entrada.

A terceira etapa está dividida somente em dois módulos: Verificação de área mínima, que tem por finalidade identificar regiões com áreas menores (em termos de pixels), conforme definida pelo usuário, atribuindo-as ao segmento vizinho que possuir maior probabilidade de igualdade; e, Saída de dados, o qual tem por objetivo gerar os dados do resultado da segmentação.

4. Desenvolvimento

O algoritmo está sendo desenvolvido em linguagem de programação IDL (*Interactive Data Language*), por esta ser a linguagem de programação usada pelo grupo de RADAR do INPE. Até o presente momento foi implementado a primeira etapa de processamento e alguns módulos das outras duas etapas (Agrupamento de regiões e Saída de dados). Por meio do uso dos módulos da primeira etapa de processamento em conjunto com os demais módulos, foi possível realizar alguns testes preliminares de

segmentação com uma imagem SAR polarimétrica disponível. A seguir é apresentado um dos testes realizados.

4.1. Teste preliminar

Para testar o funcionamento dos módulos de processamento já desenvolvidos, está sendo usada uma imagem do sistema aerotransportado R99-B (SIVAM-CENSIPAM), o qual é um sistema SAR interferométrico e opera com duas frequências: banda-L (1,27GHz/23,9cm de comprimento de onda) e banda-X (9,88GHz/3,1cm de comprimento de onda).

A imagem em *slant-range* usada no teste do algoritmo (banda-L), foi obtida em outubro de 2005, a partir de uma altitude de aproximadamente 12.300,00 m, com ângulos de incidência variando entre 63,19° a 71,2° e possui um número equivalente de *look* igual a 1. A região da superfície imageada pertence ao município de Paulínea, no estado de São Paulo, situa-se a noroeste da área urbanizada e é delimitada, de modo aproximado, pelas coordenadas geográficas de 22°40'14"S a 22°40'40"S e 47°05'19"W a 47°07'30"W. A imagem usada é ilustrada na Figura 02, que apresenta em composição colorida as polarizações em formato de amplitude, por meio da associação aos canais R (*hh*) G(*hv*) B(*vv*).

Antes de realizar a segmentação da imagem, esta foi submetida à compressão até nível 2, onde cada *pixel* da imagem comprimida passa a ser representado pela média aritmética de 16 *pixels* da imagem original. Nessa situação o número equivalente de *look* (*nel*) calculado para a imagem comprimida assumiu um valor de 3,52.

A imagem comprimida foi então segmentada por meio do uso do Módulo Segmentação, sendo o resultado deste processamento submetido ao Módulo Agrupamento de Segmentos. Ambos os processamentos foram realizados usando o teste de hipótese apresentado no item 2.2. Os níveis de significância usados foram de 20% para segmentação e 10% para o agrupamento dos segmentos gerados. Além disso, foi utilizado um limite de 10 ciclos de crescimento para a segmentação, para evitar o crescimento exagerado de certas regiões em detrimento das demais e 5 ciclos de agrupamento para junção de segmentos adjacentes. A Figura 3 mostra o resultado da imagem após o processamento.

A fim de avaliar preliminarmente o desempenho do segmentador foram geradas informações com relação ao tempo de processamento e ao número de segmentos obtidos na segmentação e no agrupamento de segmentos adjacentes (Tabela 01). Cabe lembrar, que uma completa avaliação de desempenho deve envolver informações quantitativas e qualitativas a respeito de imagens de áreas testes distintas, o que envolve trabalhos de campo e o uso de métricas adequadas. Como no momento o algoritmo ainda não está finalizado esta avaliação ainda não foi realizada, apesar de já ter sido prevista para a fase de validação do algoritmo.

Conforme pode ser visto na Tabela 01, o resultado do processamento da segmentação gerou 49.324 segmentos em um tempo de 96,630 segundos, enquanto o resultado do processamento do agrupamento reduziu o número destes segmentos para 7.220 em um tempo de 129,497 segundos. Tendo em mente que cada *pixel* da matriz de covariância inicialmente pode ser considerado como uma região, o resultado obtido mostra que houve uma redução da quantidade de regiões de 140.000 para 7.220, após o processamento.

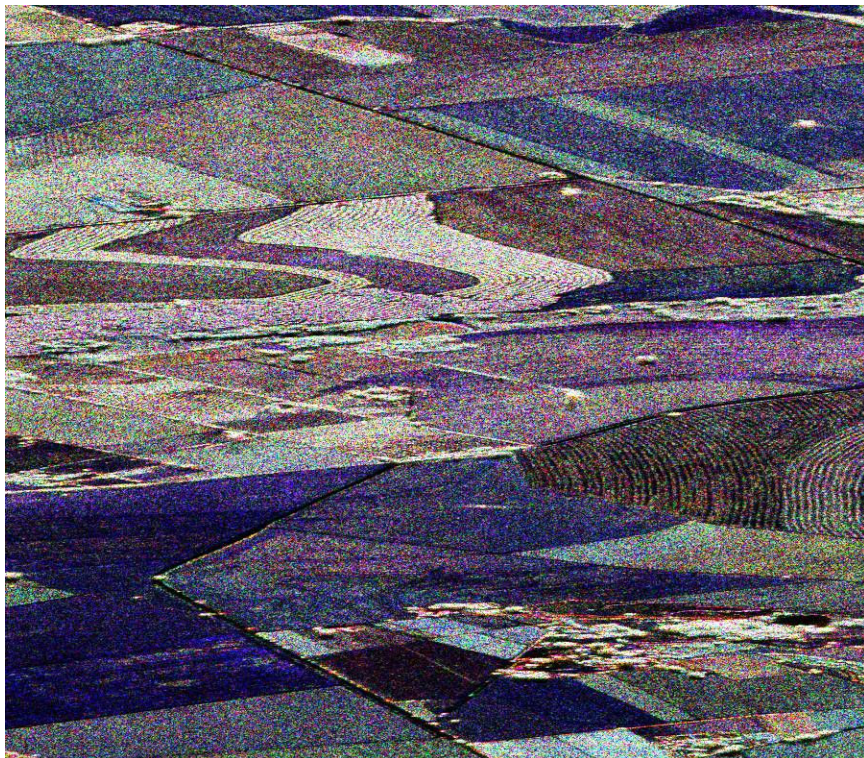


Figura 02 – Composição colorida $R(hh)$, $G(hv)$ e $B(vv)$, com as amplitudes da imagem usada no teste do algoritmo.

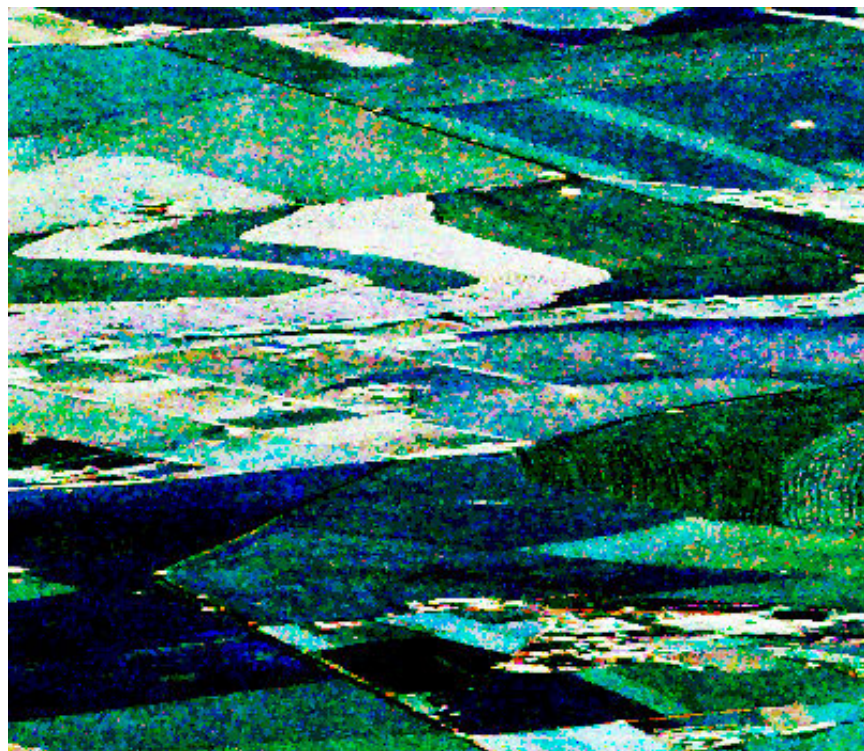


Figura 03 – Composição colorida, $R(hh)$, $G(hv)$ e $B(vv)$, com as intensidades médias dos segmentos obtidos no processamento da imagem.

Tabela 01 – Resultados do processamento

Dimensões da matriz de covariância comprimida	400 x 350 x 6 * (140.000 <i>pixels</i>)	
Segmentação	Número de regiões	49.324
	Tempo computado	96,630 seg
Agrupamento de segmentos	Número de regiões	7.220
	Tempo computado	129,497 seg

* Os seis canais da matriz de covariância correspondem aos elementos da diagonal principal e superiores a estes.

5. Conclusões

Este trabalho procurou apresentar alguns detalhes de como foi concebido e esta sendo desenvolvido um algoritmo de segmentação de dados SAR polarimétricos, usando uma abordagem estatística voltada para este tipo de dado. Apresentou também, com o intuito de mostrar a viabilidade do trabalho que esta sendo realizado, um teste preliminar realizado com dados reais, dos módulos de processamento já programados.

O resultado do processamento executado, apesar de apresentar uma hiper-segmentação da imagem SAR, mostrou que o teste estatístico usado como critério de decisão para a segmentação e agrupamento de regiões pode gerar resultados satisfatórios. Espera-se que com a conclusão do desenvolvimento do algoritmo o problema de hiper-segmentação seja minimizado. Esta constatação se deve pelo fato de ainda não terem sido implantados os módulos responsáveis pela execução dos testes de ajuste de bordas, de homogeneidade para regiões e teste de área mínima.

6. Referências

- Conradsen, K.; Nielsen, A. A.; Schou, J.; Skriver, H. (2003), "A test statistic in the complex Wishart distribution and its application to change detection in polarimetric SAR data". IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, v. 41, n. 1, p. 4-19.
- Correia, A. H. (2009), "Método automático para calibração polarimétrica de imagens SAR". 2009. 307 p. (INPE-16349-TDI/1557). Tese (Doutorado em Sensoriamento Remoto) – Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos.
- Goodman, N. R. (1963), "Statistical analysis based on a certain multivariate complex Gaussian distribution". Annals of Mathematical Statistics, v. 34, n. 1, p. 152-177.
- Hänsch, R.; Jäger, M.; Hellwich, O. (2008), "Clustering by deterministic annealing and Wishart based distance measures for fully-polarimetric SAR-data". In: 7th European Conference on Synthetic Aperture Radar (EUSAR 2008), Graf-Zeppelin-Haus, Friedrichshafen, Germany. Proceedings... EUSAR'08: 7th European Conference on Synthetic Aperture Radar, 02-05 June p. 419-422.

- Hellman, M. (2009), "SAR Polarimetry Tutorial (Beta version 0.1a)". Epsilon.Nought: Rennes, France, 2001. Disponível em: <<http://epsilon.nought.de/>>. Acesso em: 02 Set 2009
- Jain, R.; Kasturi, R.; SCHUNCK, B. G. (1995), Machine vision. New York: McGraw-Hill, 1995. 549 p.
- Lee, J. S.; Du, L.; Schuler, D. L.; Grunes, M. R. (1995), "Statistical analysis and segmentation of multi-look SAR imagery using partial polarimetric data". In: International Geoscience and Remote Sensing Symposium IGARSS'95. 'Quantitative Remote Sensing for Science and Applications'. Firenze, Italy. v. 3: Piscataway: IEEE, p. p.1422-1424.
- Lee, J. S.; Grues, M. R.; Kwok, R. (1994), "Classification of multi-look polarimetric SAR imagery based on complex Wishart distribution". International Journal of Remote Sensing, v. 15, n. 11, p. 2299-2311.
- Lee, J. S.; Hoopel, K. W.; Mango, S. A.; Miller, A. R. (1994b), "Intensity and phase statistics of multi-look polarimetric and interferometric SAR imagery". IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, v. 32, n. 5, p. 1017-1028.
- Oliver, C.; Quegan, S. (2004), Understanding Synthetic Aperture Radar Images. Raleigh, North Carolina: SciTech Publishing, Inc., 479 p.
- Srivastava, M. S. (1963), "On the complex Wishart distribution". Annals of Mathematical Statistics, v. 36, n. 1, p. 313-315.
- Tur, M.; Chin, K. C.; Goodman, J. W. (1982), "When is speckle noise multiplicative?". Applied Optics, v. 21, n. 7, p. 1157-1159,.
- Ulaby, F. T.; Elachi, C. (1990), Radar polarimetry for geoscience applications. Norwood, Massachusetts: Artech House. 364 p.
- Yanasse, C. C. F.; Frery, A. C.; Sant'anna, S. J. S. (1995), "Stochastic distributions and the multiplicative model: relations, properties, estimators and applications to SAR image analysis". São José dos Campos: INPE. (INPE-5630-NTC/318).
- Yang, J.; Ran, Y.; Li, S.; S., Y. S.; Q., Q. (2008), "A Novel Edge-Detection Based Segmentation Algorithm for Polarimetric SAR Images". In: The International Archives of the Photogrammetry, Remote Sensing and Spatial Information Sciences (ISPRS 2008), Beijing, China. Proceedings of Commission VII... ISPRS: Congress Beijing 2008, 3-11 july. p. 141-144.