



Ministério da  
Ciência e Tecnologia



INPE-14441-TDI/1136

## SIMULAÇÃO NUMÉRICA DA INTERAÇÃO ONDA-ONDA INDUZIDA POR ONDA DE LANGMUIR NO SISTEMA SOLAR

Rodrigo Andrés Miranda Cerda

Dissertação de Mestrado do Curso de Pós-Graduação em Geofísica Espacial,  
orientada pelos Drs. Abraham Chian-Long, e Érico Luiz Rempel, aprovada em 23  
de novembro de 2005.

Registro do documento original:

<<http://urlib.net/sid.inpe.br/mtc-m19@80/2010/03.10.15.17>>

INPE  
São José dos Campos  
2006

**PUBLICADO POR:**

Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE

Gabinete do Diretor (GB)

Serviço de Informação e Documentação (SID)

Caixa Postal 515 - CEP 12.245-970

São José dos Campos - SP - Brasil

Tel.:(012) 3208-6923/6921

Fax: (012) 3208-6919

E-mail: pubtc@sid.inpe.br

**CONSELHO DE EDITORAÇÃO:****Presidente:**

Dr. Gerald Jean Francis Banon - Coordenação Observação da Terra (OBT)

**Membros:**

Dr<sup>a</sup> Inez Staciarini Batista - Coordenação Ciências Espaciais e Atmosféricas (CEA)

Dr<sup>a</sup> Maria do Carmo de Andrade Nono - Conselho de Pós-Graduação

Dr<sup>a</sup> Regina Célia dos Santos Alvalá - Centro de Ciência do Sistema Terrestre (CST)

Marciana Leite Ribeiro - Serviço de Informação e Documentação (SID)

Dr. Ralf Gielow - Centro de Previsão de Tempo e Estudos Climáticos (CPT)

Dr. Wilson Yamaguti - Coordenação Engenharia e Tecnologia Espacial (ETE)

Dr. Horácio Hideki Yanasse - Centro de Tecnologias Especiais (CTE)

**BIBLIOTECA DIGITAL:**

Dr. Gerald Jean Francis Banon - Coordenação de Observação da Terra (OBT)

Marciana Leite Ribeiro - Serviço de Informação e Documentação (SID)

Deicy Farabello - Centro de Previsão de Tempo e Estudos Climáticos (CPT)

**REVISÃO E NORMALIZAÇÃO DOCUMENTÁRIA:**

Marciana Leite Ribeiro - Serviço de Informação e Documentação (SID)

Yolanda Ribeiro da Silva Souza - Serviço de Informação e Documentação (SID)

**EDITORAÇÃO ELETRÔNICA:**

Vivéca Sant´Ana Lemos - Serviço de Informação e Documentação (SID)



Ministério da  
Ciência e Tecnologia



INPE-14441-TDI/1136

## SIMULAÇÃO NUMÉRICA DA INTERAÇÃO ONDA-ONDA INDUZIDA POR ONDA DE LANGMUIR NO SISTEMA SOLAR

Rodrigo Andrés Miranda Cerda

Dissertação de Mestrado do Curso de Pós-Graduação em Geofísica Espacial,  
orientada pelos Drs. Abraham Chian-Long, e Érico Luiz Rempel, aprovada em 23  
de novembro de 2005.

Registro do documento original:

<<http://urlib.net/sid.inpe.br/mtc-m19@80/2010/03.10.15.17>>

INPE  
São José dos Campos  
2006

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

---

Miranda Cerda, Rodrigo Andrés.

M673si Simulação numérica da interação onda-onda induzida por onda de Langmuir no sistema solar / Rodrigo Andrés Miranda Cerda. – São José dos Campos : INPE, 2006.  
166 p. ; (INPE-14441-TDI/1136)

Dissertação (Mestrado em Geofísica Espacial) – Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 2005.

Orientadores : Drs. Abraham Chian-Long, e Érico Luiz Rempel.

1. Ondas de plasma. 2. Caos. 3. Plasmas espaciais. 4. Sistemas não-lineares. 5. Intermittência. I. Título.

CDU 523.3

---

Copyright © 2006 do MCT/INPE. Nenhuma parte desta publicação pode ser reproduzida, armazenada em um sistema de recuperação, ou transmitida sob qualquer forma ou por qualquer meio, eletrônico, mecânico, fotográfico, reprográfico, de microfilmagem ou outros, sem a permissão escrita do INPE, com exceção de qualquer material fornecido especificamente com o propósito de ser entrado e executado num sistema computacional, para o uso exclusivo do leitor da obra.

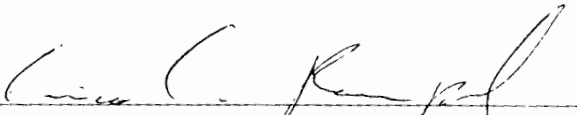
Copyright © 2006 by MCT/INPE. No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted in any form or by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording, microfilming, or otherwise, without written permission from INPE, with the exception of any material supplied specifically for the purpose of being entered and executed on a computer system, for exclusive use of the reader of the work.

Aprovado (a) pela Banca Examinadora  
em cumprimento ao requisito exigido para  
obtenção do Título de Mestre em  
**Geofísica Espacial**

Dr. Alexandre Alvares Pimenta

  
Presidente / INPE / SJC Campos - SP

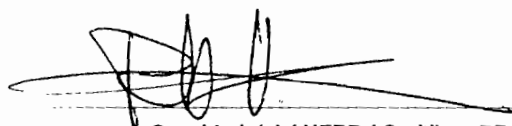
Dr. Erico Rempel

  
Orientador(a) / ITA / SJC Campos - SP

Dr. Abraham Chian Long-Chian

  
Orientador(a) / INPE / SJC Campos - SP

Dr. Ricardo Luiz Viana

  
Convidado(a) / UFPR / Curitiba - PR

Dra. Emília Correia

  
Convidado(a) / CRAAM / São Paulo - SP

Aluno (a): **Rodrigo Andrés Miranda Cerda**

São José dos Campos, 23 de novembro de 2005



*“Los amigos son la familia que elegimos tener”.*





*A Daniel, mi hermano. Nunca te conocí. Siempre vives  
en mi corazón.*



## AGRADECIMENTOS

Quero expressar a minha gratidão a todas as pessoas que me apoiaram durante a realização deste trabalho.

Aos meus orientadores Abraham Chian-Long Chian e Erico Luiz Rempel, pela valiosa orientação e incentivo durante estes dois anos.

Ao Dr. Ricardo Monreal, pelo constante apoio na continuação de meus estudos.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro oferecido através da bolsa de mestrado.

Aos membros da Banca Examinadora pelos valiosos comentários.

A meus amigos Wanderson Santana e Sérgio Placência, pelas proveitosas discussões e sugestões para a confecção deste trabalho.

Aos meus pais e meu irmão, porque sempre acreditaram em mim.

E a todos os meus colegas da Divisão de Geofísica Espacial e Aeronomia, pela sincera amizade que me ofereceram desde o primeiro dia que cheguei. O espaço nesta folha é limitado, porém, todos os meus amigos estão contidos neste parágrafo.



## RESUMO

Este trabalho tem por objetivo estudar a dinâmica da interação onda-onda não linear através de simulações numéricas usando Teoria de Caos. Dois tipos de processos são analisados: o processo de três ondas não linear, e o processo modulacional sub-sônico de quatro ondas, nos quais a onda indutora é suposta linearmente instável, e as outras ondas linearmente amortecidas. É feita uma revisão dos conceitos básicos da Teoria de Caos, ondas em plasmas, instabilidades e interação onda-onda. Uma série de evidências observacionais de interações onda-onda não-lineares no espaço interplanetário e em magnetosfera planetária, que motivam o presente estudo, são apresentados. A análise da dinâmica não-linear dos modelos teóricos estudados é feita por meio do estudo de dois tipos de intermitência via *bifurcação sela-nó* e *crise interior* observada, que exibem séries temporais caóticas. Finalmente, discute-se a aplicação desta análise tanto para o estudo de emissões de rádio em plasmas espaciais como para o estudo e controle de plasmas de fusão em laboratório.



# NUMERICAL SIMULATIONS OF WAVE-WAVE INTERACTIONS INDUCED BY LANGMUIR WAVES IN THE SOLAR SYSTEM

## ABSTRACT

The aim of this work is to study the dynamics of nonlinear wave-wave interactions by numerical simulations using Chaos Theory. Two types of processes are analyzed: the three-wave process, and the sub-sonic modulational process. In both cases the pump wave is assumed linearly unstable, and the other waves linearly damped. A brief review of the concepts of Chaos Theory, plasma waves, instabilities and wave-wave interactions is presented. Observational evidence of nonlinear wave-wave interactions in the interplanetary space and in the planetary magnetosphere, which is the main motivation of this study, is also presented. The nonlinear dynamics analysis of the models is performed based on the study of two types of intermittency via the *saddle-node bifurcation* and the *interior crisis*, which exhibit chaotic time series. Applications for radio emissions on space plasmas and the control of fusion plasmas in laboratory are discussed.





## SUMÁRIO

Pág.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

LISTA DE SÍMBOLOS

CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO	27
CAPÍTULO 2 - CONCEITOS FUNDAMENTAIS DE CAOS, ONDAS, INSTABILIDADES E INTERAÇÕES ONDA-ONDA	31
2.1 - Introdução à teoria de Caos . . . . .	31
2.1.1 - Revisão histórica . . . . .	31
2.1.2 - Sistemas dinâmicos . . . . .	33
2.1.3 - Plano de Poincaré e pontos fixos . . . . .	35
2.1.4 - Ordem e caos . . . . .	38
2.1.5 - Diagramas de bifurcação . . . . .	40
2.2 - Relações de dispersão lineares de ondas em plasmas . . . . .	42
2.2.1 - Ondas de Langmuir . . . . .	42
2.2.2 - Ondas ion-acústicas . . . . .	43
2.2.3 - Ondas eletromagnéticas . . . . .	44
2.3 - Mecanismos de excitação e amortecimento de ondas em plasmas . . . . .	45
2.3.1 - Relação de dispersão para ondas eletrostáticas instáveis . . . . .	45
2.4 - Conceitos de interação onda-onda . . . . .	49
2.4.1 - Teoria linear . . . . .	51
2.4.2 - Teoria não linear . . . . .	52
2.5 - Exemplos de interações onda-onda . . . . .	54
2.5.1 - Processo de três ondas $L \rightleftharpoons W + KAW$ na coroa solar . . . . .	54
2.5.2 - Processo de três ondas $L \rightleftharpoons l + W$ no vento solar . . . . .	59
2.5.3 - Processo de três ondas $L \rightleftharpoons W + A$ na magnetosfera terrestre . . . . .	64
2.5.4 - Processo de quatro ondas $L \rightleftharpoons L^+ + L^- + S^*$ . . . . .	69

<b>CAPÍTULO 3 - OBSERVAÇÃO DE FENÔMENOS DE INTERAÇÃO ONDA-ONDA NO SISTEMA SOLAR</b>	<b>77</b>
3.1 - Introdução . . . . .	77
3.2 - Emissões de rádio provenientes de explosões solares . . . . .	77
3.3 - Observações de interações onda-onda no vento solar . . . . .	81
3.3.1 - Observações durante eventos solares de tipo III . . . . .	81
3.3.2 - Observações em buracos magnéticos . . . . .	84
3.4 - Observações de interações onda-onda na magnetosfera terrestre . . . . .	87
3.4.1 - Observações durante eventos LAW aurorais . . . . .	87
3.4.2 - Observações durante reconexões magnéticas na magnetopausa . . . . .	88
<b>CAPÍTULO 4 - TEORIA DE CAOS PARA INTERAÇÃO NÃO LINEAR DE TRÊS ONDAS</b>	<b>97</b>
4.1 - Modelo de três ondas quadrático . . . . .	97
4.2 - Diagramas de Bifurcação . . . . .	98
4.3 - Bifurcação sela-nó . . . . .	102
4.4 - Crise interior . . . . .	110
4.5 - Determinação de variedades para sistemas de 4 dimensões . . . . .	117
<b>CAPÍTULO 5 - TEORIA DE CAOS PARA INTERAÇÃO NÃO LINEAR DE QUATRO ONDAS</b>	<b>121</b>
5.1 - Modelo de quatro ondas cúbico . . . . .	121
5.2 - Análise não linear do modelo simplificado ( $\nu_1 = \nu_2$ ) . . . . .	122
5.3 - Análise não linear com $\nu_1 \neq \nu_2$ . . . . .	124
5.3.1 - Diagramas de bifurcação . . . . .	124
5.3.2 - Bifurcação sela-nó . . . . .	128
5.3.3 - Crise interior . . . . .	132
<b>CAPÍTULO 6 - CONCLUSÃO</b>	<b>137</b>
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>	<b>141</b>
<b>APÊNDICE A - EQUAÇÕES DE ZAKHAROV E SCHRÖDINGER NÃO LINEAR</b>	<b>147</b>
A.1 - Derivação das equações de Zakharov . . . . .	147
A.2 - Derivação da equação Schrödinger não linear, e seu formalismo de interações onda-onda . . . . .	154

## LISTA DE FIGURAS

	<u>Pág.</u>
2.1 Órbita de um corpo de massa pequena, ao redor de outros dois corpos massivos . . . . .	32
2.2 Atrator de Rössler, com $a = b = 0.1$ e $c = 14$ . . . . .	34
2.3 Esquema de plano de Poincaré no espaço de fase . . . . .	35
2.4 Esquema de plano de Poincaré no espaço de fase, e um ciclo limite . . . .	36
2.5 Estabilidade de pontos fixos no plano de Poincaré . . . . .	37
2.6 Evolução do atrator de Rössler para diferentes valores de $c$ . . . . .	38
2.7 Evolução de uma esfera unitária de condições iniciais para uma elipsóide após um tempo $t$ . . . . .	39
2.8 Esquema representando sensibilidade às condições iniciais . . . . .	41
2.9 Diagrama de bifurcação do sistema de Rössler . . . . .	42
2.10 Introdução de uma perturbação unidimensional num plasma . . . . .	43
2.11 Diagramas de dispersão para ondas ion-acústicas e ondas de Langmuir .	44
2.12 Diagramas de dispersão de ondas eletromagnéticas e ondas de Langmuir	45
2.13 Função de distribuição Maxwelliana das velocidades das partículas num plasma não magnetizado . . . . .	47
2.14 Decomposição do campo elétrico de uma onda em componentes circularmente polarizadas à esquerda e à direita . . . . .	49
2.15 Diagrama de acoplamento de fase do processo $L \rightarrow L' + S$ . . . . .	51
2.16 Exemplo de cinemática dos vetores de onda $\mathbf{k}_L$ , $\mathbf{k}_W$ , e $\mathbf{k}_A$ para o processo $L \rightarrow W + KAW$ . . . . .	56

2.17	Taxa de crescimento não linear $\gamma_{NL}$ em função do comprimento de onda normalizado $Z = k_{Lz}\lambda_D$ para o decaimento $L \rightarrow W + KAW$ . . . . .	58
2.18	Diagrama de acoplamento de fase para o processo $L \rightleftharpoons l + W$ . . . . .	60
2.19	Simulações numéricas da interação não linear de três ondas $L \rightleftharpoons l + W$ .	63
2.20	Diagrama de bifurcação para o sistema 2.94-2.96 (Processo $L \rightleftharpoons W + A$ ). . . . .	68
2.21	Séries temporais da amplitude da onda whistler para diferentes valores do parâmetro de controle (processo $L \rightleftharpoons W + A$ ) . . . . .	70
2.22	Séries temporais para diferentes valores do parâmetro de controle (Processo $L \rightleftharpoons W + A$ ) . . . . .	70
2.23	Interação entre as ondas de Langmuir e as perturbações na densidade num plasma . . . . .	73
2.24	Resumo dos possíveis comportamentos assintóticos do sistema 2.110-2.112	74
2.25	Séries temporais de $a_1(t)$ , para o modelo simplificado do processo modulacional sub-sônico . . . . .	76
3.1	Geração de emissões de rádio através de instabilidades de feixe-plasma .	78
3.2	Fase inicial de uma explosão solar . . . . .	79
3.3	Espectro dinâmico observado durante o evento do dia 12 de Abril de 2001, pelos radiospectrógrafos Potsdam e Ondřejov . . . . .	80
3.4	Dados obtidos pelo radiopolarímetro Trieste para o evento do 12 de Abril de 2001 . . . . .	81
3.5	Espectros de potência observacionais obtidos das emissões de rádio do evento no dia 12 de Abril de 2001. . . . .	82
3.6	Representação esquemática da geração de ondas de Langmuir e emissão de rádio de tipo III no meio interplanetário a partir de um feixe de elétrons devido a uma explosão solar. . . . .	83

3.7	Observações de ondas de Langmuir e ondas whistler detectadas pela sonda Ulysses durante o evento de tipo III no dia 14 de Julho de 1991 . . .	85
3.8	Observação de ondas nas regiões dos buracos magnéticos no vento solar pela sonda Ulysses perto do plano eclíptico, no dia 26 de Novembro de 1990 . . . . .	86
3.9	Observação de ondas de Langmuir, ion-acústicas e eletromagnéticas em buracos magnéticos em altas latitudes heliosféricas ( $-80.2^\circ$ ), para o dia 14 de Setembro de 1994 . . . . .	87
3.10	Observação simultânea de ondas de Langmuir, whistler e Shear Alfvén usando instrumentação abordo de um foguete, lançado em Poker Flat, Alaska . . . . .	89
3.11	Observação de ondas de Langmuir, whistler e Shear Alfvén similar a mostrada na Figura 3.10, desta vez realizada em Groenlândia o dia 23 de janeiro de 1985 . . . . .	90
3.12	Esquema do processo de reconexão entre o campo magnético terrestre e o campo magnético interplanetário na magnetopausa . . . . .	91
3.13	Evidência de ondas de Langmuir excitadas na região de correntes paralelas às separatrizes da reconexão . . . . .	92
3.14	Localização do conjunto de satélites CLUSTER na magnetosfera terrestre, marcada com uma barra de cor preta, no dia 4 de Março de 2002, às 9:35 UT . . . . .	93
3.15	Observação de ondas de Langmuir e ondas whistler feita pelo satélite CLUSTER-3 na região da reconexão magnética da magnetopausa, no dia 4 de Março de 2002 . . . . .	94
4.1	Diagrama de bifurcação geral, e máximo expoente de Lyapunov para o modelo da interação não-linear de três ondas . . . . .	99

4.2	Diagrama de bifurcação da janela periódica de período-3, máximo expo- nente de Lyapunov, e a evolução das selas caóticas em banda e envolvente para o modelo da interação não-linear de três ondas . . . . .	101
4.3	Esquema representando uma sela caótica como um conjunto caótico de pontos de sela (os pontos dentro do retângulo) e as suas variedades estável ( $W^S$ ) e instável ( $W^U$ ), num espaço de fase bidimensional. . . . .	102
4.4	Séries temporais e órbitas no espaço de fase para valores do parâmetro de controle antes e depois da bifurcação sela-nó, para o modelo da interação não-linear de três ondas . . . . .	103
4.5	Mapas de retorno para três valores do parâmetro de controle, para o modelo da interação não-linear de três ondas . . . . .	105
4.6	Sela caótica (verde) no espaço de fase ( $a_0, a_1$ ) para $\nu_2 = 4.7641 > \nu_{\text{SNB}}$ , e suas variedades estável (azul) e instável (vermelha) . . . . .	106
4.7	Ponto de sela $p$ com suas variedades estável e instável, e o segmento ( $a$ , $b$ ) que corta a variedade estável . . . . .	108
4.8	Conjuntos invariantes na bifurcação sela-nó, projetados no espaço de fase ( $a_0, a_1$ ) . . . . .	109
4.9	Tempo característico $\tau$ entre estouros (quadrados pretos) em função da “distância” entre $\nu_2$ e $\nu_{\text{SNB}}$ no regime caótico prévio à bifurcação sela-nó .	110
4.10	Séries temporais e órbitas no espaço de fase para valores do parâmetro de controle antes e depois da crise interior, para o modelo da interação não-linear de três ondas . . . . .	111
4.11	Sela caótica envolvente no regime prévio à crise, $\nu_2 = 4.9150 < \nu_{\text{IC}}$ , e suas variedades estável (azul) e instável (vermelho) . . . . .	113
4.12	Detalhe da colisão entre o atrator caótico (CA) e o contorno da variedade estável da órbita mediadora (SM), prévio à crise interior ( $\nu_2 = 4.9150 < \nu_{\text{IC}}$ )	114
4.13	Conjuntos invariantes na crise interior, no espaço de fase ( $a_0, a_1$ ) . . . . .	115
4.14	Órbita acopladora no atrator caótico pós-crise ( $\nu_2 = 4.93$ ) . . . . .	116

4.15	Tempo característico $\tau$ entre estouros em função da "distância" entre $\nu_2$ e $\nu_{IC}$ no regime caótico pós-crise . . . . .	117
4.16	Sela caótica envolvente no espaço de fase tridimensional $(a_0, a_1, \phi)$ (verde), e suas projeções nos planos $\phi = \text{cte.}$ , e $a_1 = \text{cte.}$ (preto), para $\nu_2 = 4.7641$ . . . . .	118
4.17	Sela caótica projetada no plano $(a_0, \phi)$ (verde), e a curva obtida da regressão cúbica (vermelho). . . . .	119
4.18	Grade de condições iniciais no espaço de fase $(a_0, a_1, \phi)$ usando três perspectivas distintas. . . . .	119
5.1	Diagrama de bifurcação e máximo expoente de Lyapunov para o modelo simplificado do processo modulacional sub-sônico . . . . .	123
5.2	Séries temporais de $a_0$ mostrando a ocorrência da intermitência Pomeau-Manneville de tipo I . . . . .	125
5.3	Séries temporais de $a_0$ mostrando intermitência induzida pela crise . . . . .	126
5.4	Diagrama de bifurcação geral e máximo expoente de Lyapunov do sistema 5.1-5.4 . . . . .	127
5.5	Diagrama de bifurcação mostrando a janela periódica de período-3, o máximo expoente de Lyapunov, e a evolução das selas caóticas em banda e envolvente . . . . .	128
5.6	Mapas de retorno para três valores do parâmetro de controle, para o modelo da interação não linear de quatro ondas . . . . .	130
5.7	Séries temporais e órbitas no espaço de fase para valores do parâmetro de controle antes e depois da bifurcação sela-nó, para o modelo da interação não-linear de quatro ondas . . . . .	131
5.8	Tempo característico $\tau$ de duração das fases laminares nas séries temporais em função da "distância" entre o valor do parâmetro de controle e o momento da bifurcação sela-nó . . . . .	131

5.9	Séries temporais e órbitas no espaço de fase para valores do parâmetro de controle antes e depois da crise interior, para o modelo da interação não-linear de quatro ondas . . . . .	133
5.10	Sela caótica envolvente (verde) e as suas variedades estável (azul) e instável (vermelho), com o atrator caótico em bandas (preto), e a órbita mediadora (cruzes) para $\nu_2 = 6.5074 < \nu_{IC}$ . . . . .	134
5.11	Coexistência do atrator caótico, selas caóticas e órbitas acopladoras no espaço de fase, para $\nu_2 = 6.515$ . . . . .	135
5.12	Tempo característico $\tau$ em função da diferença entre o valor do parâmetro de controle e $\nu_2 = 6.5075 \approx \nu_{IC}$ . . . . .	136



## LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

BCS	–	Sela caótica de bandas (Band Chaotic Saddle)
BR	–	Região de banda (Band Region)
CA	–	Atrator caótico (Chaotic Attractor)
IC	–	Crise interior (Interior Crisis)
KAW	–	Onda de Alfvén Cinética (Kinetic Alfvén Wave)
MPO	–	Órbita periódica mediadora (Mediating Periodic Orbit)
SCS	–	Sela caótica de fundo (Surrounding Chaotic Saddle)
SLC	–	Ciclo limite simples (Simple Limit Cycle)
SM	–	Variedade Estável (Stable Manifold)
SNB	–	Bifurcação sela-nó (Saddle-Node Bifurcation)
SPO	–	Órbita periódica estável (Stable Periodic Orbit)
SR	–	Região envolvente (Surrounding Region)
UA	–	Unidade Astronômica
UM	–	Variedade instável (Unstable Manifold)
UPO	–	Órbita periódica instável (Unstable Periodic Orbit)



## LISTA DE SÍMBOLOS

- $a$  – Variação lenta da amplitude real da onda:  
0 - indutora  
1 - primeira induzida  
2 - segunda induzida
- B** – Campo magnético
- $c$  – Velocidade da luz
- $c_A$  – Velocidade de Alfvén
- $c_s$  – Velocidade do som
- E** – Campo elétrico
- J** – Densidade de corrente
- $k$  – Número de onda. O subíndice especifica o tipo:  
0 - indutora  
1 - primeira induzida  
2 - segunda induzida
- $m$  – Massa. O subíndice especifica o tipo:  
e - elétrons  
i - íons
- $m_i$  – Autovalores da matriz Jacobiana de fluxo
- $n$  – Densidade numérica. O subíndice especifica o tipo:  
0 - não perturbada  
1 - termo perturbativo  
e - elétrons  
i - íons
- $P$  – Plano de Poincaré
- $q$  – Carga. O subíndice especifica o tipo:  
e - elétrons  
i - íons
- $v_{th}$  – Velocidade. O subíndice especifica o tipo:  
0 - não perturbada  
1 - termo perturbativo  
e - elétrons  
i - íons  
th - térmica dos elétrons
- $W$  – Variedade de um ponto de sela. O superíndice indica o tipo:  
s - estável  
u - instável
- $\mathbf{x}_0$  – Condição inicial
- $\bar{\mathbf{x}}$  – Ponto fixo
- $\gamma_e$  – Razão dos calores específicos dos elétrons

$\Gamma$	– Taxa de crescimento da instabilidade
$\xi$	– Variação lenta da amplitude complexa da onda: 0 - indutora 1 - primeira induzida 2 - segunda induzida
$\varepsilon_0$	– Permissividade dielétrica do vácuo
$\lambda_i$	– Expoente de Lyapunov
$\nu$	– Frequência de crescimento ou amortecimento. O subíndice indica o tipo: e - elétrons i - íons
$\phi$	– Fase real da onda. O subíndice especifica o tipo: 0 - indutora 1 - induzida 2 - induzida
$\phi_t(\mathbf{x}_0)$	– Trajetória, órbita ou fluxo de um sistema de equações diferenciais
$\Phi_T(\bar{\mathbf{x}})$	– Matriz Jacobiana de fluxo
$\omega$	– Frequência de onda. O subíndice especifica o tipo: 0 - indutora 1 - primeira induzida 2 - segunda induzida
$\omega_{pe}$	– Frequência eletrônica de plasma
$\Omega_e$	– Frequência ciclotrônica dos elétrons

## CAPÍTULO 1

### INTRODUÇÃO

O 99% da matéria do universo é composta por plasma (NICHOLSON, 1983). O interior das estrelas, as nebulosas de gases, o hidrogênio e o vento solar encontram-se no estado de plasma. Na escala do sistema solar, no interior do Sol, no vento do sistema solar e nos cinturões de radiação de Van Allen podemos achar exemplos do chamado “quarto estado da matéria”. No nosso dia a dia, os exemplos não são tão abundantes quanto ao cenário espacial e astrofísico, porém, podemos achar plasma na forma de um raio durante uma tempestade elétrica, e no gás condutor no interior das lâmpadas fluorescentes ou de néon.

O plasma é um gás ionizado, composto de partículas carregadas, que cumpre com as condições de quase neutralidade de cargas e comportamento coletivo. “Quase neutralidade” quer dizer que as cargas vão tender a cancelar qualquer concentração local de cargas dentro do plasma. O comportamento coletivo representa a influência de uma carga sobre as outras através das forças coulombianas. É este comportamento que dá ao plasma a possibilidade de manter uma grande variedade de tipos de ondas, que podem ser caracterizadas através de uma relação de dispersão, que é uma relação funcional em termos da frequência da onda  $\omega$  e seu número de onda  $k$ .

Enquanto se propaga pelo plasma, a amplitude de uma onda pode crescer até atingir uma amplitude limiar, a partir da qual outros modos deixam o nível de ruído e começam a crescer; esta situação tem sido bem abordada pelo estudo das instabilidades paramétricas, onde uma onda decai em outros modos naturais do plasma. Se a onda indutora é suposta linearmente instável (ou seja, a sua amplitude cresce linearmente) e o resto dos modos linearmente amortecidos, então a dinâmica temporal das amplitudes destes modos torna-se muito complexa. Neste cenário a aplicação da teoria de Caos facilita a análise numérica da evolução temporal desta interação onda-onda.

A teoria de Caos é uma ferramenta útil para a análise de sistemas não-lineares determinísticos capazes de apresentar comportamento aparentemente errático e aleatório. Exemplos de sistemas de dinâmica complexa podem ser achados nos mais diversos cenários, por exemplo na natureza (variações climáticas relacionadas como fenômeno de El Niño, modelos de população predador-presa (KAPLAN; GLASS, 1995)), na

economia (evolução temporal de modelos econômicos e ciclos de negócios (CHIAN *et al.*, 2005)), na medicina (impulsos elétricos cerebrais, ritmo do batimento cardíaco (GLASS; MACKEY, 1998)), em diversos experimentos de laboratório usando torneiras gotejantes (SARTORELLI *et al.*, 1994), circuitos elétricos (ALLIGOOD *et al.*, 1996), e assim por diante. A aplicação da teoria de Caos nesta áreas tem demonstrado a sua utilidade para a previsão e controle dos diversos estados num sistema.

Existem evidências de acoplamentos não lineares de três ondas e ocorrências de eventos intermitentes obtidas durante experimentos com plasmas turbulentos em laboratorios. Por exemplo, Hidalgo *et al.* (1993) usaram análise biespectral para demonstrar o alto grau do acoplamento de três ondas nas fronteiras do confinamento do plasma, e a dependencia destes acoplamentos com as condições do plasma, por exemplo, a temperatura dos elétrons  $T_e$ . Usando uma combinação das análises biespectral e *wavelet*, Milligen *et al.* (1995) mostraram a ocorrência de eventos intermitêntes de curta duração nos dados obtidos de sondas Langmuir inseridas no plasma de fusão. Estes dois estudos foram feitos usando o acelerador ATF (do inglês *Advanced Toroidal Facility*), no Laboratorio Nacional de *Oak Ridge*, ubicado em Tennessee, EUA.

A presente dissertação de Mestrado está organizada nos próximos quatro capítulos da seguinte forma:

No capítulo 2 será apresentada uma breve introdução à Teoria de Caos, e as principais ferramentas utilizadas no estudo de sistemas não lineares. Logo, serão revisados os conceitos principais de ondas, instabilidades em plasmas, e processos de interação onda-onda não lineares. Alguns exemplos de interações onda-onda não lineares serão apresentados.

No capítulo 3 serão apresentadas evidências observacionais de interações onda-onda obtidas por experimentos em sondas em três regiões do sistema solar: na coroa do Sol, no vento solar, e na magnetosfera terrestre.

No capítulo 4 vai ser estudada a dinâmica não linear de um modelo que representa a dinâmica das amplitudes de três ondas acopladas, supondo uma das ondas linearmente instável, e as outras linearmente amortecidas (WERSINGER *et al.*, 1980). A não-linearidade é suposta ser suficientemente fraca para que sejam considerados apenas termos quadráticos. Dois tipos de transições de ordem para caos serão apre-

sentados em detalhe, mostrando o fenômeno de intermitência observado nas séries temporais obtidas durante as simulações.

No capítulo 5 será estudada a dinâmica não linear de um modelo apresentado por Russell e Ott (1981) que representa a interação não linear de quatro ondas no processo modulacional sub-sônico. Seguindo a análise do capítulo 4, serão estudados dois tipos de transições de ordem para caos, fazendo a caracterização da intermitência obtida nas séries temporais.

Finalmente, no capítulo 6 serão discutidos os resultados obtidos, e suas possíveis aplicações.





## CAPÍTULO 2

### CONCEITOS FUNDAMENTAIS DE CAOS, ONDAS, INSTABILIDADES E INTERAÇÕES ONDA-ONDA

A dinâmica das partículas num plasma leva à existência de uma grande quantidade de tipos de ondas. Elas são capazes de transportar energia de uma região para outra, excitando outras partículas, oferecendo informação aos observadores externos do que está ocorrendo dentro do plasma. Podem perder estabilidade ao crescerem enquanto se propagam e, no caso dos plasmas obtidos em laboratórios, atingir amplitudes capazes de romper o confinamento do plasma.

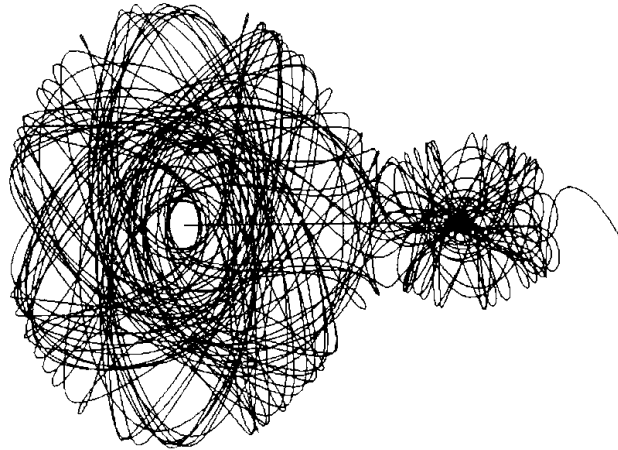
As interações onda-onda não lineares podem mudar a forma em que a energia e a informação são propagadas através do plasma. Uma onda gerada numa região de instabilidade pode excitar outros modos que possuem propriedades de dispersão e propagação diferentes do modo original, e que são capazes de transportar a energia para distâncias maiores, numa forma totalmente distinta do esperado da onda original. A interação é não linear quando o efeito de esgotamento da onda indutora é considerado (ou seja, a amplitude dela varia com o tempo).

Na seção 2.1 serão introduzidos os conceitos básicos da teoria de Caos e algumas das principais ferramentas utilizadas neste trabalho de dissertação. Na seção 2.2 serão apresentadas as relações de dispersão para três tipos básicos de ondas em plasmas: ondas de Langmuir, ion-acústicas e eletromagnéticas. Os mecanismos de excitação e amortecimento destas ondas serão descritos na seção 2.3, enquanto que os conceitos de interação onda-onda serão apresentados na seção 2.4, junto com as equações que descrevem a evolução temporal destas interações usando as teorias linear e não linear. Finalmente, na seção 2.5 será feito uma pequena revisão de alguns modelos teóricos de interações onda-onda para diferentes condições de plasma.

#### 2.1 Introdução à teoria de Caos

##### 2.1.1 Revisão histórica

Usualmente, a primeira tentativa do estudo de sistemas caóticos é atribuída a Henri Poincaré, no ano 1889. Para comemorar o 60º aniversário do Rei Oscar II da Suécia e Noruega, foi organizada uma competição científica, para estabelecer se a dinâmica do sistema solar é estável ou não. Isto envolve o estudo do problema de N corpos, que



**FIGURA 2.1** - Órbita de um corpo de massa pequena, ao redor de outros dois corpos massivos fixos no sistema de referencia. Os dois corpos massivos encontram-se nos extremos da linha horizontal.

FONTE: Alligood *et al.* (1996)

é a aplicação da lei gravitacional de Newton para mais de dois corpos, um problema que não tem solução analítica e que é muito difícil de ser analisado.

Fazendo uma série de restrições (considerando os três corpos movendo-se num plano, a massa e um deles muito menor em comparação aos outros dois, estabelecendo um sistema de referência que gire junto com os outros dois corpos, de maneira que permaneçam fixos neste referencial, etc) Poincaré apresentou um artigo cheio de idéias novas. Uma delas simplificou a análise da dinâmica dos três corpos. A Figura 2.1 mostra a trajetória do terceiro corpo (que pode representar um asteróide sob a ação das forças gravitacionais de duas estrelas), sem dúvida complexa de ser analisada usando as ferramentas disponíveis no final do século XIX. Mas, Poincaré notou que a dinâmica da trajetória do asteróide é refletida nos pontos em que ela corta a reta entre as duas estrelas, simplificando a análise de uma complicada órbita para um conjunto discreto de pontos. Esta seção de corte (conhecida como *seção de Poincaré*) tornou-se um dos elementos mais comuns usados no estudo de sistemas caóticos.

Anos depois (finais dos anos 50 do século passado) Edward Lorenz, um meteorologista do MIT, encontrava-se trabalhando num modelo de processos convectivos na atmosfera, destinado para a previsão do clima usando um computador LGP-30, um dos mais avançados daquela época. Como os resultados eram impressos em papel a velocidade de 6 linhas por minuto, Lorenz modificou a saída do programa para

mostrar apenas 3 dígitos significativos (embora os cálculos fossem feitos com maior precisão) e depois de obter um intervalo de interesse, usou uma dessas saídas como o valor inicial para obter uma série mais detalhada. Os novos resultados obtidos foram totalmente diferentes da série original, se bem que a discrepância ocorreu em forma gradual, conforme a simulação avançava. Depois de descartar uma falha nos tubos de vácuo, Lorenz concluiu que a discrepância era devida ao truncamento dos dígitos significativos, e que o modelo era *sensível às condições iniciais*, ou seja, dois valores iniciais arbitrariamente próximos evoluem para resultados completamente diferentes, uma das principais características observáveis em sistemas dinâmicos (ALLIGOOD *et al.*, 1996).

### 2.1.2 Sistemas dinâmicos

O cientista alemão Otto Rössler apresentou o seguinte conjunto de equações diferenciais ordinárias (RÖSSLER, 1976):

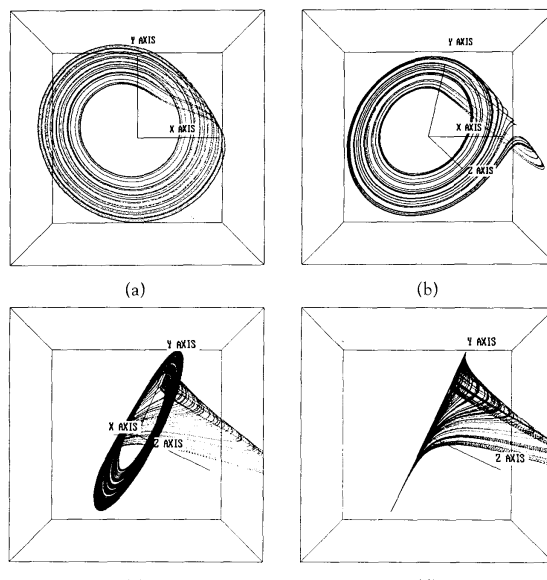
$$\dot{x} = -y - z \quad (2.1)$$

$$\dot{y} = x - ay \quad (2.2)$$

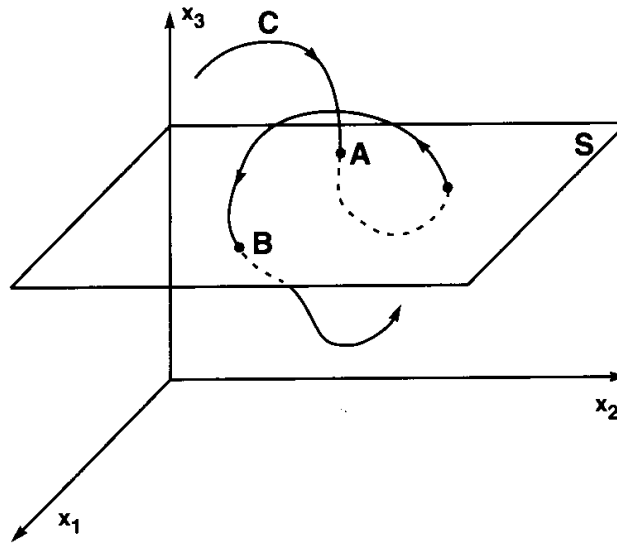
$$\dot{z} = b + (x - c)z \quad (2.3)$$

O sistema de equações 2.1-2.3 é um exemplo de sistema dinâmico onde o estado do sistema num tempo  $t$  pode ser obtido de forma determinística a partir de um estado anterior, usando “regras” representadas pelas equações. Nessas equações o tempo é uma variável contínua e implícita, e a evolução temporal do sistema é chamado indistintamente de *trajetória*, *órbita*, ou *fluxo*, sendo simbolizado por  $\phi_t(\mathbf{x}_0)$ , onde  $\phi$  é uma função do tempo e do valor inicial do problema. O  $\phi_t(\mathbf{x}_0)$  vai indicar o estado do sistema, ou seja, o valor de  $\mathbf{x}$  num instante  $t$ , dado um  $\mathbf{x}_0$  inicial. O espaço composto pelas variáveis de estado é chamado *espaço de fase*.

O sistema 2.1-2.3 é um dos mais simples sistemas de equações diferenciais onde atratores caóticos podem ser achados (ALLIGOOD *et al.*, 1996), sendo composto apenas por três variáveis de estado  $(x, y, z)$ , três parâmetros  $(a, b, c)$ , e com apenas um termo não linear ( $xz$  em 2.3). Por exemplo, para  $a = b = 0.1$ , e  $c = 14$ , existe um atrator caótico mostrado na Figura 2.2 usando quatro perspectivas distintas. Pela



**FIGURA 2.2** - Atrator caótico obtido do sistema de Rössler (comumente chamado Atrator de Rössler), ao escolher os parâmetros  $a = b = 0.1$ ,  $c = 14$ . O atrator é mostrado desde diferentes perspectivas para facilitar a visualização.  
 FONTE: Alligood *et al.* (1996)



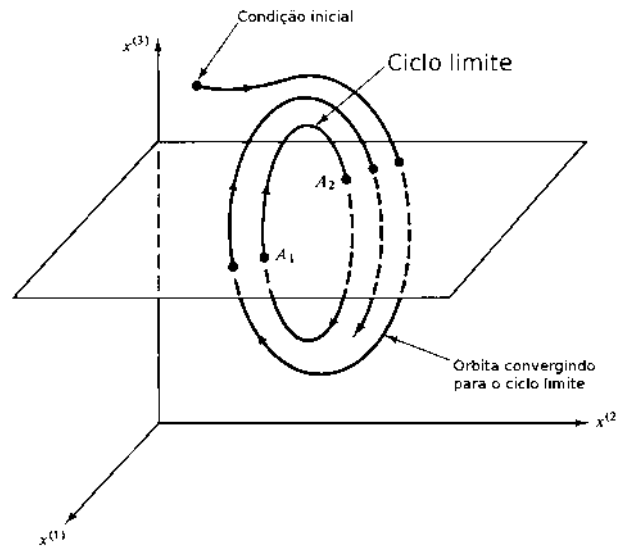
**FIGURA 2.3** - Plano de Poincaré  $S$  definido em  $x_3 = \text{cte}$  no espaço de fase. A órbita  $C$  corta o plano nos pontos  $A$  e  $B$ . O sistema é reduzido de um sistema contínuo no tempo para um sistema discreto no sentido de que, dado um ponto  $A$ , existe uma única imagem deste ponto no plano tal que  $S(A) = B$ .  
 FONTE: Alligood *et al.* (1996)

sua simplicidade este sistema foi escolhido como exemplo para descrever algumas ferramentas básicas usadas na análise de sistemas caóticos.

### 2.1.3 Plano de Poincaré e pontos fixos

A análise de sistemas compostos por equações diferenciais com  $n$  variáveis de estado pode ser simplificada definindo um plano  $(n - 1)$ -dimensional, ou seção de Poincaré, que corte a trajetória do sistema. A dinâmica do sistema é refletida nos pontos de intersecção entre a órbita e o plano, o que reduz a análise de uma trajetória contínua para um conjunto discreto de pontos. Estes pontos são comumente referidos como pontos de Poincaré. Por exemplo, a Figura 2.3 mostra um esquema de uma trajetória  $C$ , e um plano definido em  $x_3 = \text{cte}$ . Cada vez que a trajetória  $C$  corta o plano em direção para abaixo, o ponto de corte é registrado; por exemplo o ponto  $A$ , e logo o ponto  $B$  mostrados na figura. Em geral, o uso de uma seção de Poincaré reduz a análise de um sistema dinâmico de  $n$  dimensões contínuo no tempo, para um sistema discreto de  $n-1$  dimensões, onde cada ponto de Poincaré possui uma única imagem no plano de Poincaré (ver Fig. 2.3).

A Figura 2.4 mostra um ciclo limite, uma órbita convergindo assintoticamente para o ciclo, e seus pontos de corte numa seção de Poincaré. Considerando apenas uma

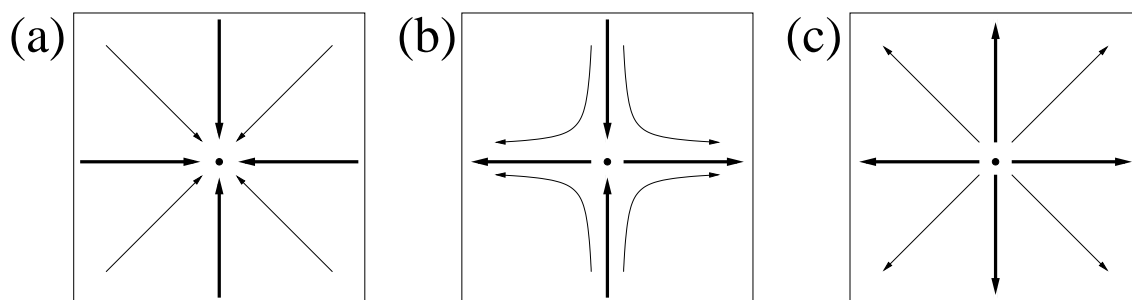


**FIGURA 2.4** - Diagrama da convergência no espaço de fase de uma trajetória para um ciclo limite, e seus pontos de corte na seção de Poincaré.  $A_1$  representa o ponto de corte do ciclo limite na seção de Poincaré quando  $\dot{x}(3) > 0$ , e  $A_2$  o ponto de corte quando  $\dot{x}(3) < 0$   
 FONTE: Ott (1993)

das direções de corte (por exemplo, quando a órbita corta de “baixo” para “acima”, ou dito de outra maneira, quando  $\dot{x}(3) > 0$ ), então o ciclo limite é representado nesse plano como um ponto que “atrai” outros pontos de Poincaré. Tais pontos são chamados *atratores* e são um exemplo de *pontos fixos*, que são pontos de equilíbrio  $x_0$  cuja próxima intersecção entre a órbita e o plano de Poincaré  $P$  cai novamente no mesmo ponto  $x_0$ , ou:

$$P(x_0) = x_0 \tag{2.4}$$

Uma órbita é chamada periódica, ou de período- $n$ , se ela cruza o plano no mesmo ponto após  $n$  cortes na seção. Uma órbita periódica é chamada *estável* (SPO, pelas siglas em inglês *Stable Periodic Orbit*) se ela atrai órbitas vizinhas (Fig. 2.5 (a)). Existem órbitas periódicas que possuem pelo menos uma direção que atrai e uma que repele (dependendo do número de dimensões do sistema ela pode ter mais direções de atração ou repulsão). Tais órbitas periódicas são chamadas *instáveis* (UPO, do inglês *Unstable Periodic Orbit*, e são representadas por pontos de sela no plano de Poincaré (Fig. 2.5 (b)). Uma órbita que repele outras órbitas em todas as direções é um caso particular de UPO, onde o ponto de intersecção no plano de Poincaré é chamado *repulsor* (Fig. 2.5 (c)).



**FIGURA 2.5** - Estabilidade de pontos fixos no plano de Poincaré. (a) Atrator. (b) Ponto de sela, que possui uma direção que atrai, e uma que repele. (c) Repulsor. As setas indicam a direção de deslocamento de outros pontos no plano.

Seja o sistema de equações diferenciais não lineares dado pela equação

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}),$$

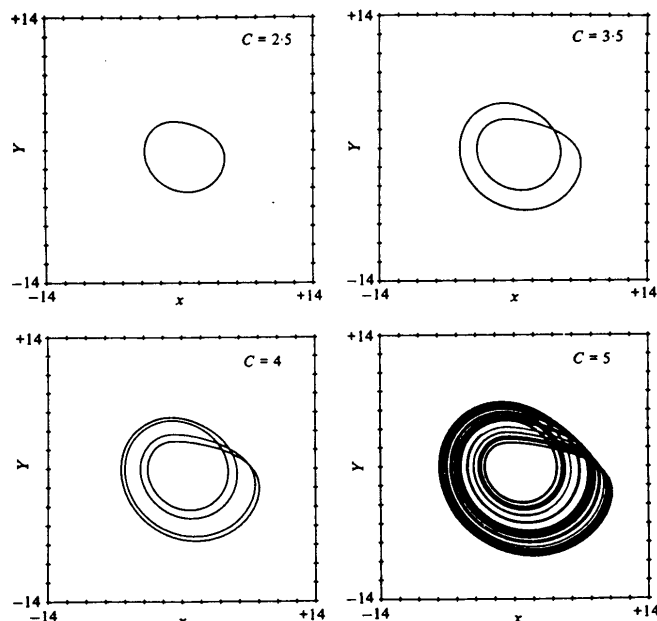
onde  $\mathbf{x}(t)$  é um vetor  $n$ -dimensional e  $\mathbf{f}$  uma função vetorial  $n$ -dimensional de  $\mathbf{x}$ . É possível determinar a estabilidade de um ponto fixo  $\bar{\mathbf{x}}$  no plano de Poincaré (ou seja, se é atrator, repulsor ou ponto de sela) fazendo uma linearização de  $\mathbf{f}$  no ponto  $\bar{\mathbf{x}}$ , dada pela matriz Jacobiana de  $\mathbf{f}$  (REMPEL, 2003):

$$\mathbf{Df}_{i,j} = \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|_{\bar{\mathbf{x}}}$$

A matriz Jacobiana do fluxo, denotada por  $\Phi$ , é a linearização aplicada ao fluxo  $\phi$ :

$$\Phi_T(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{D}\phi_T(\bar{\mathbf{x}}),$$

onde  $T$  é o tempo que a trajetória iniciada em  $\bar{\mathbf{x}}$  leva para completar um ciclo até retornar a  $\bar{\mathbf{x}}$ . Os autovalores  $m_1, m_2, \dots, m_n$  da matriz Jacobiana de fluxo calculada nesse ponto fixo vão determinar a estabilidade dele. Se todos os autovalores  $m_1, \dots, m_n$  de uma órbita periódica são reais e negativos, os pontos de Poincaré representam nós atratores; se todos os autovalores são reais e satisfazem  $m_1, \dots, m_n > 0$ , os pontos de Poincaré são repulsores; e se pelo menos um autovalor  $m_i > 0$  e um autovalor  $m_j < 0$ , os pontos representam pontos de sela, onde no limite linear tem-se uma direção de atração chamada *variedade estável* (geralmente denotada por  $W^S$ ), e



**FIGURA 2.6** - Evolução do atrator de Rössler onde  $a = b = 0.2$ , para diferentes valores de  $c$ . (a)  $c = 2.5$ , ciclo limite. (b)  $c = 3.5$ , ciclo de período 2. (c)  $c = 4$ , ciclo de período 4. (d)  $c = 5$ , atrator caótico.

FONTE: Strogatz (1994)

uma de repulsão chamada *variedade instável* (geralmente denotada por  $W^U$ ).

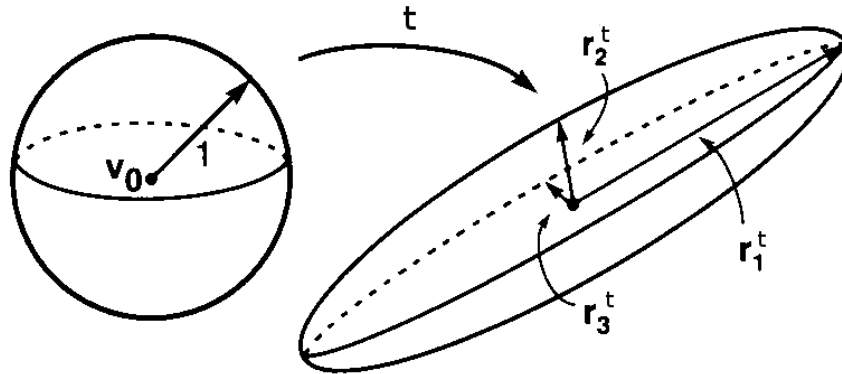
#### 2.1.4 Ordem e caos

Fixando os parâmetros  $a = b = 0.2$  e variando o valor de  $c$  a trajetória do sistema 2.1-2.3 pode apresentar diferentes comportamentos. Por exemplo, para  $c = 2.5$  a trajetória parte de uma condição inicial, e converge para um ciclo limite, mostrado na Fig. 2.6(a). Em  $c = 3.5$ , o ciclo limite sofre uma duplicação de período (Fig. 2.6(b)), o que acontece novamente em  $c = 4$  (Fig. 2.6(c)). Em  $c = 5$  a periodicidade da órbita tende ao infinito (Fig. 2.6(d)). O ciclo limite inicial transformou-se num atrator caótico através de sucessivas duplicações de período, evolução conhecida como *casca de duplicação de período*.

##### 2.1.4.1 Expoentes de Lyapunov

Os expoentes de Lyapunov são uma média da taxa de separação entre duas trajetórias bem próximas entre si. Usualmente os expoentes de Lyapunov são representados pela letra grega  $\lambda$ , e são chamados assim porque a razão da separação entre duas órbitas é dada por  $\exp(\lambda)$  (ALLIGOOD *et al.*, 1996). Então, se o valor deste expo-





**FIGURA 2.7** - Evolução de uma esfera unitária de condições iniciais para uma elipsóide após um tempo  $t$ . O primeiro expoente de Lyapunov  $\lambda_1$  mede a taxa de separação das condições iniciais na direção onde seja máxima, neste caso  $r_1^t$ . O segundo expoente  $\lambda_2$  mede a taxa de separação na direção onde seja máxima e perpendicular a  $r_1^t$ , ou seja,  $r_2^t$ . O terceiro expoente mede a taxa na direção de  $r_3^t$ .  
 FONTE: Alligood *et al.* (1996)

ente for positivo, a distância entre as órbitas aumenta com o tempo (ou seja, elas se afastam) e se for negativo, a distância diminui (se aproximam). Existe um expoente de Lyapunov por direção ortonormal no espaço de fase, sendo a definição dada por:

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln |m_i(t)|, \quad i = 1, \dots, n,$$

onde  $m_i(t)$  representa os autovalores da Jacobiana de fluxo  $\Phi_t(\mathbf{x}_0)$ , e  $\mathbf{x}_0$  uma condição inicial. Cada um destes expoentes representa a taxa de separação das órbitas ao longo de cada direção ortonormal. O primeiro expoente mede a taxa de separação na direção onde a separação seja máxima (ou que a contração seja mínima, no caso dos ciclos limites atratores). O segundo expoente mede a taxa na direção onde a separação seja a segunda maior, e perpendicular à primeira direção, e assim por diante (ver Figura 2.7). Um dos algoritmos mais conhecidos para a obtenção destes expoentes foi descrito por Wolf *et al.* (1985), que pode ser usado para caracterizar caoticidade em séries temporais longas obtidas em simulações. No caso do atrator de Rössler mostrado na Figura 2.2, os expoentes de Lyapunov são  $\lambda_1 = 0.072$ ,  $\lambda_2 = 0$ , e  $\lambda_3 = -13.79$ . Como um dos expoentes é positivo, o atrator deve ser caótico.

### 2.1.4.2 Atratores caóticos

Um ponto  $\mathbf{y}$  é chamado ponto  $\omega$ -limite de uma condição inicial  $\mathbf{x}_0$  se, para qualquer vizinhança  $U$  de  $\mathbf{y}$ , a trajetória de  $\mathbf{x}_0$  entra em  $U$  repetidamente quando  $t \rightarrow \infty$ . O conjunto de todos os pontos  $\omega$ -limite de  $\mathbf{x}_0$  é chamado *conjunto  $\omega$ -limite* de  $\mathbf{x}_0$  (PARKER; CHUA, 1989). Um ciclo limite é um exemplo de conjunto  $\omega$ -limite. Similarmente, um conjunto  $\alpha$ -limite é o conjunto de todos os pontos  $\alpha$ -limite que são regularmente visitados quando  $t \rightarrow -\infty$ , ou seja, considerando o tempo reverso (PARKER; CHUA, 1989).

Uma órbita é caótica se os seus pontos de Poincaré satisfazem as seguintes condições (ALLIGOOD *et al.*, 1996):

- a) A seqüência de pontos de Poincaré  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots$  não é assintoticamente periódica, ou seja, não apresenta periodicidade quando  $t \rightarrow \infty$ .
- b) Pelo menos um expoente de Lyapunov é positivo.

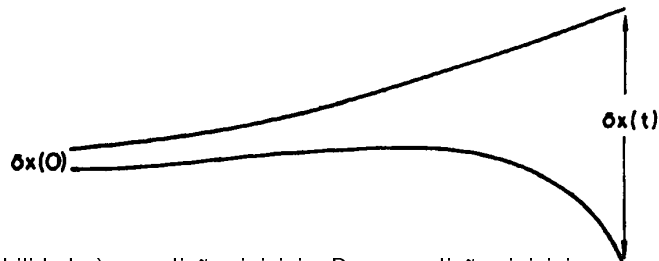
Considere-se um ponto  $\mathbf{x}$  pertencente a uma órbita caótica. Se  $\mathbf{x}$  pertence ao seu próprio conjunto  $\omega$ -limite  $\omega(\mathbf{x})$ , então o conjunto é chamado de *conjunto caótico*. Se  $\omega(\mathbf{x})$  for atrator, então o conjunto é chamado de *atrator caótico* (ALLIGOOD *et al.*, 1996).

Um conjunto caótico  $V$  possui as seguintes propriedades:

- $V$  contém uma órbita caótica.
- Os pontos periódicos formam um conjunto denso em  $V$ , ou seja, para cada ponto periódico  $\mathbf{x}$ , existe um ponto  $\mathbf{y} \in V$  arbitrariamente próximo a  $\mathbf{x}$  que também é ponto periódico.
- $V$  apresenta sensibilidade às condições iniciais (Fig. 2.8).

### 2.1.5 Diagramas de bifurcação

Da Figura 2.6 foi possível comprovar que a dinâmica do sistema de Rössler pode mudar muito ao variar o parâmetro  $c$ . O *diagrama de bifurcação* é um diagrama que resume os diferentes estados que o sistema pode apresentar ao variar um dos parâmetros (chamado *parâmetro de controle*) usando pequenos incrementos, em função dos pontos na seção de Poincaré. O algoritmo para obter o diagrama de bifurcação é bastante simples:



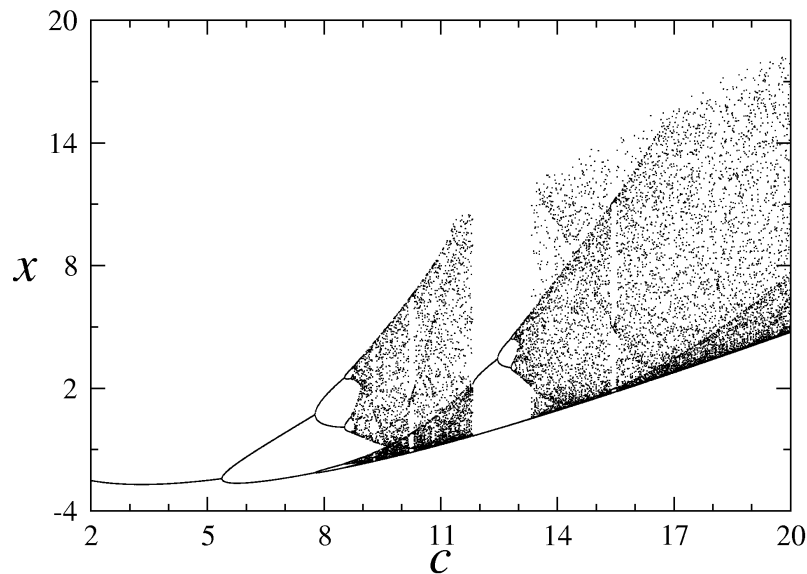
**FIGURA 2.8** - Sensibilidade às condições iniciais. Duas condições iniciais separadas por uma distância arbitrariamente pequena  $\delta x(0)$  vão estar separadas numa distância  $\delta x(t) \gg \delta x(0)$ , após um tempo  $t$ . A razão da separação entre as duas órbitas vai ser dada por  $e^\lambda$ , onde  $\lambda$  é o expoente de Lyapunov.

FONTE: Fiedler-Ferrara e Prado (1994)

- Escolher um valor para o parâmetro de controle.
- Escolher valores iniciais para as variáveis de estado do sistema de equações diferenciais (ou seja, estabelecer as condições iniciais).
- Integrar o sistema de equações diferenciais, a fim de obter diversos pontos na seção de Poincaré da trajetória. Ignorar os pontos iniciais transientes e registrar os seguintes. A quantidade de pontos iniciais transientes a ignorar depende da “rapidez” com que as trajetórias convergem da condição inicial ao atrator.
- Incrementar o valor do parâmetro de controle, ajustar novamente as condições iniciais e repetir o passo c.

Por exemplo, a figura 2.9 mostra o diagrama de bifurcação para o sistema de Rössler 2.1-2.3, usando a variável de estado  $x$  em função do parâmetro de controle  $c$  no intervalo  $[2, 20]$  com uma resolução de 1500 pontos no eixo do parâmetro de controle  $c$ , e fixando  $a = b = 0.1$ . O plano de Poincaré foi definido em  $z = 0.1$ . Para cada valor de  $c$  foram registrados 20 pontos de Poincaré, ignorando 3000 pontos prévios correspondentes a pontos transientes.

Através do diagrama de bifurcação é possível apreciar as mudanças que sofre a dinâmica do sistema conforme aumenta o valor do parâmetro de controle de forma relativamente contínua. Da esquerda para a direita temos que o sistema evolui de um ciclo limite para uma órbita estável de período 2 através de uma bifurcação de duplicação de período em  $c \sim 5.4$ . Logo bifurca-se novamente numa órbita de período 4 ( $c \sim 8$ ), e assim por diante até atingir o estado de atrator caótico ( $c \sim 9$ ).



**FIGURA 2.9** - Diagrama de bifurcação do sistema de Rössler 2.1-2.3, usando  $x$  em função do parâmetro de controle  $c$ .

Dentro do regime caótico existem breves interrupções esporádicas onde a dinâmica volta a ser periódica; estas interrupções são chamadas *janelas periódicas*. No caso da Figura 2.9, é possível apreciar uma destas janelas criada aproximadamente em  $c = 12$ .

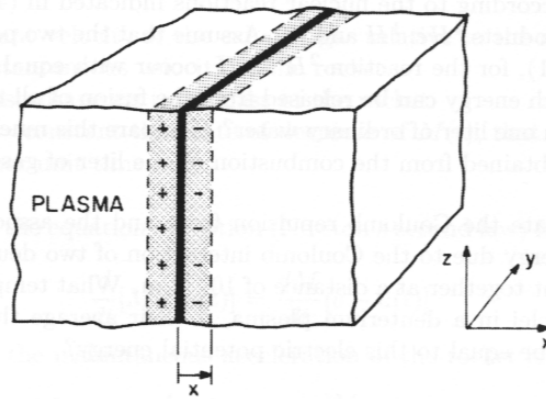
## 2.2 Relações de dispersão lineares de ondas em plasmas

Num plasma não magnetizado onde os elétrons e íons possuem distribuições de velocidade perto do equilíbrio térmico, é possível achar três tipos de ondas: ondas de Langmuir, ion-acústicas e eletromagnéticas.

Nas próximas subseções vamos apresentar as relações de dispersão de cada uma destas ondas no regime linear, ou seja, sem levar em conta efeitos e interações não lineares.

### 2.2.1 Ondas de Langmuir

Considere-se um plasma frio com seus elétrons e íons distribuídos uniformemente no espaço. Devido a massa dos íons ser muito maior do que a dos elétrons, vamos considerar também que os íons permanecem fixos nas suas posições no espaço. Se “puxarmos” uma seção da distribuição dos elétrons (Figura 2.10) haverá um excesso de cargas negativas numa região do plasma, o que cria um campo elétrico



**FIGURA 2.10** - Introdução de uma perturbação unidimensional num plasma. Os elétrons são deslocados numa pequena distância  $x$ , criando um campo elétrico que vai atuar como força de restauração, fazendo os elétrons oscilarem ao redor do ponto de equilíbrio.  
 FONTE: Bittencourt (1995)

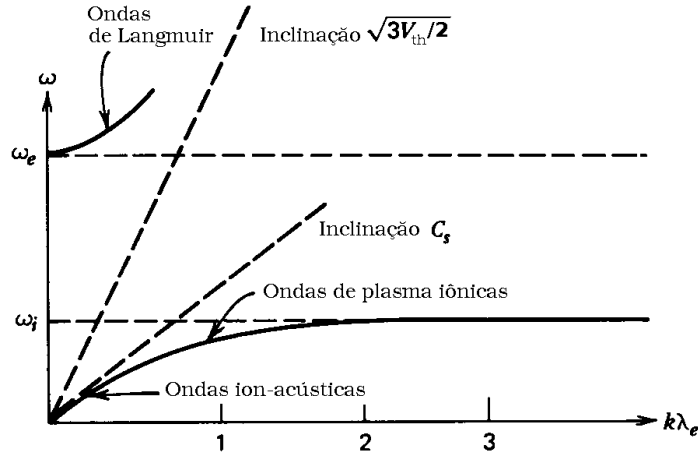
interno em direção à perturbação introduzida. Se deixamos o sistema agir livremente (ou seja, “soltamos” a seção) vamos observar que, devido às forças coulombianas, a perturbação na densidade dos elétrons vai voltar a sua posição de equilíbrio. Mas, a inércia dos elétrons vai provocar que eles se desloquem um pouco além das suas posições de equilíbrio, descrevendo um movimento oscilatório, com a frequência  $\omega_{pe} = (n_0 e^2 / m_e \epsilon_0)^{1/2}$ , conhecida como a *frequência de plasma*. Estas oscilações são conhecidas como *oscilações eletrônicas do plasma*. Num plasma térmico, estas oscilações podem se propagar, dando lugar às ondas de Langmuir, que são um dos tipos mais básicos de ondas em plasmas, e que obedecem a seguinte relação de dispersão linear (CHEN, 1984):

$$\omega_L^2 = \omega_{pe}^2 + \frac{3}{2} v_{th}^2 k_L^2 \quad (2.5)$$

onde  $v_{th}$  representa a velocidade térmica dos elétrons.

### 2.2.2 Ondas ion-acústicas

São ondas eletrostáticas de baixa frequência onde elétrons e íons oscilam quase em fase, e que correspondem a perturbações na densidade do plasma. A relação de



**FIGURA 2.11** - Diagramas de dispersão para ondas ion-acústicas e ondas de Langmuir. Para números de onda baixos, a onda ion-acústica aproxima-se à reta de inclinação  $c_s$  (comportamento acústico), mas para números de onda maiores, a curva aproxima-se assintoticamente à reta  $\omega = \omega_i$ .  
 FONTE: Nicholson (1983)

dispersão deste tipo de ondas é (NICHOLSON, 1983):

$$\omega_S^2 = c_S^2 k_S^2 \quad (2.6)$$

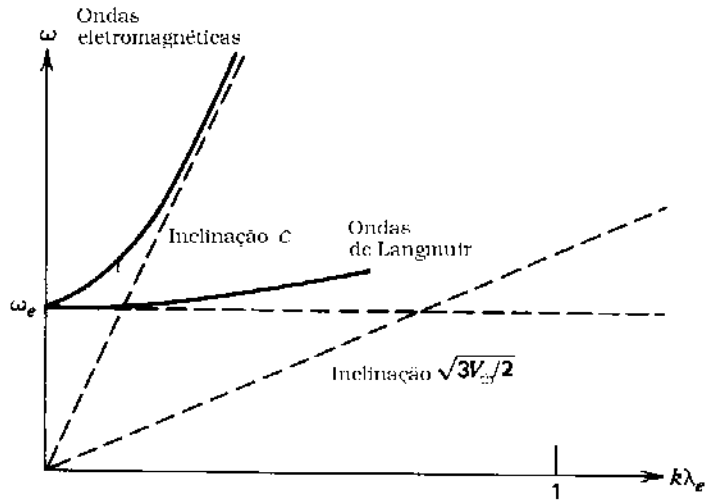
Onde  $c_S = (\gamma m_e / m_i)^{1/2} v_{th}$  representa a velocidade do som no meio,  $m_e$  é a massa do elétron,  $m_i$  a massa do ion,  $\gamma = 1 + 3T_i / T_e$  representa a razão dos calores específicos do plasma,  $T_e$  é a temperatura não perturbada dos elétrons, e  $T_i$  a temperatura dos íons. Estes tipos de onda devem seu nome à similaridade da relação de dispersão com a relação para as ondas de som propagando-se num gás. A Figura 2.11 mostra os diagramas de dispersão das ondas Langmuir e ion-acústicas.

### 2.2.3 Ondas eletromagnéticas

São ondas de alta frequência que obedecem à relação de dispersão:

$$\omega_T^2 = \omega_{pe}^2 + c^2 k_T^2 \quad (2.7)$$

Num plasma não magnetizado e sem colisões, estas ondas não sofrem amortecimento, porque a velocidade de fase  $v_{ph} = \omega / k$  é sempre maior do que a velocidade da luz, e então não é possível que as ondas entrem em ressonância com as partículas.



**FIGURA 2.12** - Diagramas de dispersão de ondas eletromagnéticas e ondas de Langmuir, num plasma não magnetizado. A curva eletromagnética aproxima-se assintoticamente à reta com inclinação  $c$ .  
 FONTE: Nicholson (1983)

A Figura 2.12 mostra os diagramas de dispersão de ondas Langmuir e eletromagnéticas.

### 2.3 Mecanismos de excitação e amortecimento de ondas em plasmas

Um mecanismo de excitação de ondas de Langmuir num plasma é através de *instabilidades feixe-plasma*, que é um tipo de instabilidade comum na física dos plasmas (NICHOLSON, 1983), que pode ser criada através de um feixe de partículas energéticas injetado no plasma, ou induzindo uma corrente através do plasma de maneira que as diferentes espécies possuam velocidades de deriva diferentes (CHEN, 1984). A energia das partículas leva ao crescimento exponencial das ondas eletrostáticas ou de Langmuir.

#### 2.3.1 Relação de dispersão para ondas eletrostáticas instáveis

Considere-se um plasma frio, uniforme e não magnetizado, onde os íons sejam estacionários e os elétrons com velocidade  $\mathbf{V}_0$ , ou seja, o sistema de referência deslocando-se com o feixe dos íons (CHEN, 1984). Sejam as ondas eletrostáticas do tipo:

$$\mathbf{E}_1 = \xi_1 e^{i(kx - \omega t)} \hat{\mathbf{x}} \quad (2.8)$$

Considerando as seguintes variáveis linearizadas para a velocidade e densidade dos íons e elétrons, e o campo elétrico:

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_i &= \mathbf{V}_{1i} \quad , \quad \mathbf{V}_e = \mathbf{V}_{0e} + \mathbf{V}_{1e} \\ n_i &= n_0 + n_{1i} \quad , \quad n_e = n_0 + n_{1e} \\ \mathbf{E} &= \mathbf{E}_1,\end{aligned}$$

onde os subíndices 0 e 1 representam os termos sem perturbação e perturbado respectivamente. Inserindo estas variáveis nas equações de movimento, e de continuidade:

$$\begin{aligned}m_\alpha n_\alpha \left[ \frac{\partial \mathbf{V}_\alpha}{\partial t} + (\mathbf{V}_\alpha \cdot \nabla) \mathbf{V}_\alpha \right] &= q_\alpha n_\alpha \mathbf{E} \\ \frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (n_\alpha \mathbf{V}_\alpha) &= 0,\end{aligned}$$

onde  $\alpha = i, e$  ( $i$ : íons,  $e$ : elétrons), e introduzindo os operadores harmônicos espaciais e temporais  $\partial_t \rightarrow -i\omega$ ,  $\nabla \rightarrow ik$ , obtemos a seguinte relação de dispersão para as oscilações eletrostáticas:

$$1 = \omega_{pe}^2 \left[ \frac{m_e/m_i}{\omega^2} + \frac{1}{(\omega - kv_0)^2} \right] \quad (2.9)$$

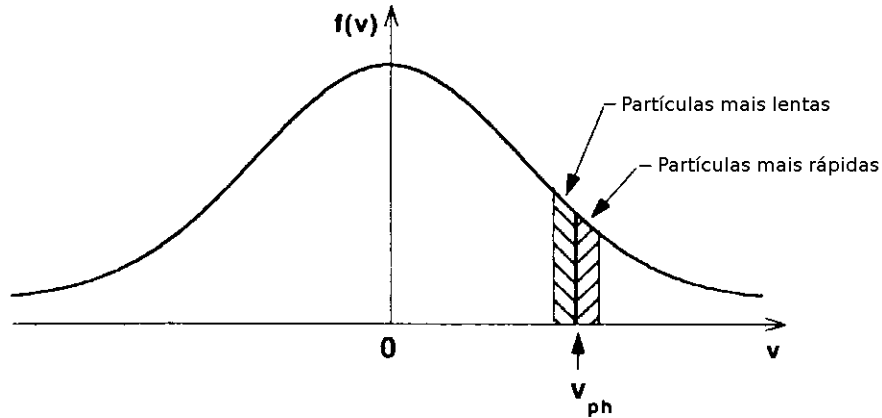
Ao multiplicar 2.9 por  $\omega^2(\omega - kv_0)^2$  obtém-se uma equação de quarta ordem em termos de  $\omega$ . Considere-se a representação das soluções na forma complexa:

$$\omega_j = \omega_j^R + i\gamma_j \quad (2.10)$$

Se a parte imaginária é nula ( $Im(\omega_j) = 0$ ), então as raízes simplesmente representam cada uma das possíveis oscilações, ao substituir 2.10 em 2.8:

$$\mathbf{E} = \xi e^{i(kx - \omega_j^R t)} \hat{\mathbf{x}}$$





**FIGURA 2.13** - Função de distribuição Maxwelliana das velocidades das partículas, num plasma não magnetizado. A região hachurada indica as partículas em ressonância com uma onda com velocidade de fase  $v_{ph}$ . O número de partículas com velocidade menor que  $v_{ph}$  é maior do que o número de partículas com velocidade maior, logo a onda cede mais energia às partículas do que ganha delas, sofrendo o amortecimento conhecido como amortecimento de Landau  
 FONTE: Tsurutani e Lakhina (1997)

Se  $Im(\omega_j) \neq 0$ , as raízes existirão na forma de pares conjugados, e ao substituir 2.10 em 2.8 obtém-se:

$$\mathbf{E} = \xi e^{i(kx - \omega_j^R t)} e^{\gamma_j t} \hat{\mathbf{x}}$$

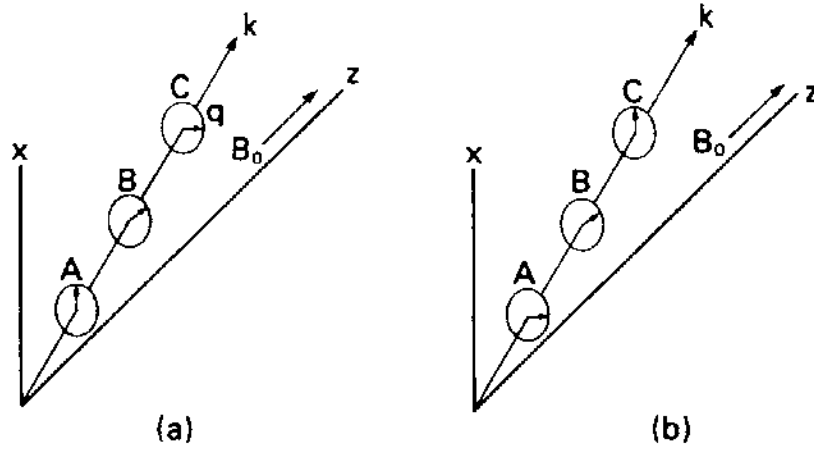
Se  $\gamma_j < 0$  (ou seja,  $Im(\omega_j) < 0$ ) obtém-se ondas exponencialmente amortecidas, mas se  $\gamma_j > 0$  ( $Im(\omega_j) > 0$ ) então as ondas crescem de forma exponencial. Nesta situação, diz-se que a onda (ou modo) é instável. Ao levar em conta a velocidade térmica dos elétrons, teremos que estas ondas podem-se propagar no plasma.

Em plasmas de laboratório, instabilidades deste tipo podem ser usadas para aquecer um plasma, ou para gerar microondas em dispositivos *klystron* (CHEN, 1984) usados em comunicações. No espaço interplanetário, as explosões solares associadas com eventos de tipo III contém elétrons energéticos que são injetados no plasma da coroa, excitando ondas de Langmuir através de instabilidades feixe-plasma (KELLOGG *et al.*, 1992). A interação entre o vento solar e a frente de choque em magnetosferas planetárias, também pode criar feixes de elétrons que excitam ondas de Langmuir (GUEDE, 1995).

Existem dois mecanismos principais para o amortecimento de ondas em plasmas: o *amortecimento de Landau*, e o *amortecimento ciclotrônico*. O amortecimento de Landau ocorre devido ao intercâmbio de energia entre as ondas com velocidade de fase  $v_{ph}$ , e as partículas com velocidade aproximadamente igual a  $v_{ph}$ , ou seja, que estão em ressonância com a onda. As partículas com velocidade um pouco menor à velocidade de fase  $v_{ph}$  serão aceleradas pelo campo elétrico da onda, ganhando energia da onda, enquanto as partículas com velocidade um pouco maior a  $v_{ph}$  serão desaceleradas pelo campo elétrico, ou seja, cedem energia à onda. Num plasma não colisional com função de distribuição das velocidades das partículas Maxwelliana, observa-se que o número de partículas com velocidade  $v < v_{ph}$  é maior do que o número de partículas com  $v > v_{ph}$  (Fig. 2.13), ou seja, há mais partículas ganhando energia da onda do que cedendo à onda, o que produz o amortecimento da onda.

No amortecimento ciclotrônico a troca de energia ocorre devido à forma em que a partícula “percebe” a polarização da onda no referencial da partícula. Considere uma onda com vetor  $\mathbf{k} = k_x \hat{\mathbf{x}} + k_z \hat{\mathbf{z}}$ , onde  $k_z > 0$ , na presença de um campo magnético ambiente  $\mathbf{B}_0 = B_0 \hat{\mathbf{z}}$ . O campo elétrico da onda  $\mathbf{E}_\perp$  pode ser decomposto em componentes circularmente polarizados à esquerda e direita, como mostra a Figura 2.14. No caso da polarização à esquerda (Fig. 2.14(a)), um elétron estacionário (ou seja, que não esteja se deslocando ao longo do eixo  $z$ ) vai “perceber” o campo elétrico na seqüência C-B-A, já que a onda se propaga na direção  $\hat{\mathbf{z}}$ , e a partícula não vai entrar em ressonância porque o elétron gira no sentido da mão direita com relação ao campo magnético  $\mathbf{B}_0$ . Mas, no caso de um elétron com velocidade maior do que a onda na direção  $\hat{\mathbf{z}}$ , a seqüência do vetor  $\mathbf{E}_\perp$  percebida no referencial da partícula vai ser A-B-C, ou seja, vai perceber a onda como sendo circularmente polarizada à direita, e então vai sofrer uma aceleração (ou seja, vai receber energia da onda) se a velocidade da partícula satisfaz  $\omega - k_z v_z = -\Omega_c$ . A componente circularmente polarizada à direita, por sua vez, vai perder energia devido às partículas com velocidade menor à da onda, os quais vão entrar em ressonância ao perceber a onda na seqüência C-B-A, e serão aceleradas se a velocidade da partícula satisfaz  $\omega - k_z v_z = \Omega_c$ . Finalmente, uma onda pode ser amortecida devido às partículas que deslocam-se em qualquer das duas direções (no referencial da onda), ou seja, a existência de partículas ressonantes produz o amortecimento ciclotrônico da onda (CHEN, 1984).

Estes dois mecanismos de amortecimento de ondas são semelhantes no sentido de que envolvem interações onda-partícula. A principal diferença entre elas é que no amorte-



**FIGURA 2.14** - Decomposição do campo elétrico de uma onda propagando-se com vetor  $\mathbf{k} = k_x \hat{x} + k_z \hat{z}$ , em componentes circularmente polarizadas (a) à esquerda, e (b) à direita.  
 FONTE: Chen (1984)

cimento ciclotrônico o campo elétrico acelera as partículas em direção perpendicular à velocidade da partícula, enquanto no amortecimento de Landau a velocidade e a aceleração da partícula são paralelas. A ressonância ciclotrônica não é afetada pela captura de partículas como no caso do amortecimento de Landau.

## 2.4 Conceitos de interação onda-onda

A dinâmica das ondas de Langmuir, ion-acústica e eletromagnética são descritas pelas equações generalizadas de Zakharov (ZAKHAROV, 1984):

$$(\partial_t^2 + \nu_e \partial_t + c^2 \nabla \times (\nabla \times) - \gamma_e v_{th}^2 \nabla (\nabla \cdot) + \omega_{pe}^2) \mathbf{E} = \frac{\omega_{pe}^2}{n_0} n \mathbf{E} \quad (2.11)$$

$$(\partial_t^2 + \nu_i \partial_t - v_s^2 \nabla^2) n = \frac{\varepsilon_0}{2m_i} \nabla^2 \langle E^2 \rangle \quad (2.12)$$

onde  $\mathbf{E}$  representa o campo elétrico da onda que oscila aproximadamente na frequência do plasma (alta frequência),  $n$  a perturbação na densidade,  $\nu_e$  a frequência de amortecimento da onda de Langmuir,  $\nu_i$  o coeficiente de amortecimento da onda ion-acústica,  $c$  a velocidade da luz,  $\gamma_e$  a razão dos calores específicos dos elétrons,  $v_{th}$  a velocidade térmica dos elétrons,  $n_0$  a densidade dos íons não perturbada,  $v_s$  a velocidade ion-acústica, e  $m_i$  a massa do íon. No caso eletrostático, as equações 2.11

e 2.12 podem ser simplificadas à seguinte forma:

$$(\partial_t^2 + \nu_e \partial_t - \gamma_e v_{th}^2 \nabla^2 + \omega_{pe}^2) \mathbf{E} = -\frac{\omega_{pe}^2}{n_0} n \mathbf{E} \quad (2.13)$$

$$(\partial_t^2 + \nu_i \partial_t - v_S^2 \nabla^2) n = \frac{\varepsilon_0}{2m_i} \nabla^2 \langle E^2 \rangle \quad (2.14)$$

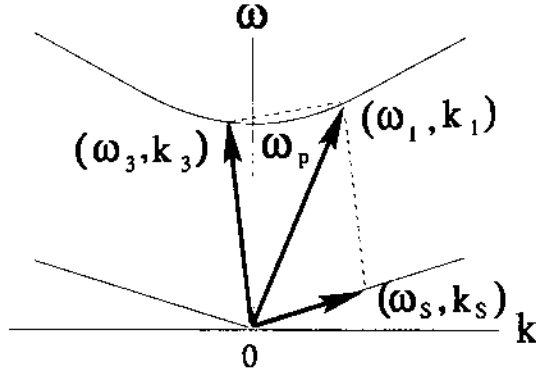
onde a equação 2.13 descreve a evolução linear do envoltório de uma onda de Langmuir à esquerda da equação, enquanto à direita tem-se o efeito de uma corrente não linear, e a equação 2.14 descreve a evolução linear de uma onda ion-acústica na esquerda, e à direita tem-se o efeito não linear da força ponderomotiva devida à onda Langmuir (GIBSON *et al.*, 1995).

Uma onda de amplitude finita, propagando-se num plasma, vai causar uma modulação dos parâmetros que caracterizam os modos naturais do plasma. Se a amplitude desta onda cresce e excede um certo valor limiar, estes modos começam a crescer também a partir do nível do ruído, já que a dissipação delas é compensada pela amplitude da onda indutora. A excitação destes modos naturais, e o crescimento das suas amplitudes através da absorção de energia e momentum da onda indutora é chamada instabilidade paramétrica, onde o “parâmetro” refere-se à amplitude da onda indutora (NICHOLSON, 1983).

O exemplo mais simples de instabilidade paramétrica de três ondas é de decaimento, quando a onda indutora decai em dois modos naturais do plasma. A instabilidade paramétrica é ressonante (ou seja, a transferência de energia vai ser máxima) se as seguintes relações entre os vetores de onda e entre as frequências da onda indutora e os modos naturais induzidos são satisfeitos:

$$\omega_0 = \omega_1 + \omega_2 \quad \mathbf{k}_0 = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 \quad (2.15)$$

Onde o subíndice 0 representa a onda indutora, e os subíndices 1 e 2 os modos naturais ou ondas induzidas. As relações 2.15 são chamadas condições de acoplamento, e requerem que no espaço  $(\omega, k)$  a adição vetorial entre os modos  $(\omega_0, k_0)$ ,  $(\omega_1, k_1)$  e  $(\omega_2, k_2)$  seja satisfeita. Além disso, cada modo deve satisfazer a relação de dispersão correspondente à natureza da onda (por exemplo, a relação de dispersão das ondas



**FIGURA 2.15** - Diagrama de acoplamento de fase do processo  $L \rightarrow L' + S$ . O vetor  $(\omega_1, k_1)$  representa a onda indutora de Langmuir, o vetor  $(\omega_s, k_s)$  a onda ion-acústica e o vetor  $(\omega_3, k_3)$  a onda induzida de Langmuir.  
 FONTE: Guede (1995)

de Langmuir, ion-acústicas, eletromagnética, etc.).

Um dos tipos de decaimento mais conhecidos é o processo de decaimento eletrostático de Langmuir  $L \rightarrow L' + S$ , onde uma onda Langmuir de grande amplitude decai para uma outra onda de Langmuir contrapropagante  $L'$  e uma onda ion-acústica  $S$  propagando na direção da onda indutora de Langmuir  $L$ . A Figura 2.15 mostra o diagrama de acoplamento de fase (também conhecido como diagrama de Peierls (1955)) onde os vetores no espaço  $(\omega, k)$  satisfazem as condições de acoplamento para cada modo presente no plasma.

### 2.4.1 Teoria linear

A teoria linear representa uma primeira aproximação no estudo de interações onda-onda no estágio inicial da instabilidade, onde a amplitude da onda indutora ainda é bem maior do que as amplitudes das ondas induzidas, e supõe-se que a amplitude do envoltório da onda indutora é constante. Neste cenário, a taxa de crescimento da instabilidade é (CHIAN; ABALDE, 1995):

$$\Gamma = \left( \frac{c_{02}c_{01}}{\omega_2\omega_{pe}} \right)^{1/2} \frac{|\xi_0|}{2}, \quad (2.16)$$

onde o subíndice 0 representa a onda indutora de Langmuir, 1 a onda induzida de Langmuir, e o subíndice 2 representa a onda ion-acústica,  $\xi_0$  é a amplitude do envoltório da onda indutora, e os coeficientes de acoplamento são  $c_{02} = ek_S/2m_e$

e  $c_{01} = (m_e/m_i)c_{02}$ . Desta taxa é possível calcular a condição limiar da amplitude da onda, acima do qual começa a instabilidade; na seção 2.5.3 é apresentado um exemplo de valor limiar para o processo não linear  $L \rightleftharpoons W + A$ .

Considerando as ondas como sendo do tipo monocromáticas, planas e propagantes, os campos elétricos podem ser representados pela forma modulacional:

$$\mathbf{E}_\alpha = \frac{1}{2}\xi_\alpha(\mathbf{r}, t) \exp[i(\mathbf{k}_\alpha \cdot \mathbf{r} - \omega_\alpha t)] + c.c., \quad \alpha = 0, 1, 2 \quad (2.17)$$

onde  $\xi_\alpha$  representa o envoltório (complexo) de cada uma das ondas variando lentamente no tempo, satisfazendo  $|\partial_r^2 \xi_\alpha| \ll |k_\alpha \partial_r \xi_\alpha|$  e  $|\partial_t^2 \xi_\alpha| \ll |\omega_\alpha \partial_t \xi_\alpha|$ , e  $\mathbf{k}_\alpha \cdot \mathbf{r} - \omega_\alpha t$  representa a fase que varia rapidamente no tempo. A equação 2.17 é uma generalização da forma 2.8 usada para a obtenção da relação de dispersão de ondas eletrostáticas geradas pela instabilidade feixe-plasma.

Na teoria linear, supõe-se a amplitude da onda indutora constante ( $\partial_t \xi_0 = 0$ ) e bem maior do que a amplitude das ondas induzidas ( $|\xi_0| \gg |\xi_1|, |\xi_2|$ ). Chian e Abalde (1995) acharam o seguinte sistema de equações complexas acopladas para o decaimento paramétrico eletrostático:

$$(\partial_t + \nu'_1)\xi_1 = -\left(\frac{c_{02}}{2\omega_1}\right)\xi_0\xi_2^* \exp(-i\Delta t) \quad (2.18)$$

$$(\partial_t + \nu'_2)\xi_2 = -\left(\frac{c_{01}}{2\omega_2}\right)\xi_0\xi_1^* \exp(-i\Delta t), \quad (2.19)$$

onde  $\nu'_\alpha = \nu_\alpha \omega_\alpha / \partial_\omega D_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2$ ), sendo  $\nu_\alpha$  é a taxa de amortecimento da onda, com  $D_{0,1} = \omega_{0,1}^2 - \omega_{pe}^2 - \gamma_e v_{th}^2 k_{0,1}^2 + i\nu_1 \omega_{0,1}$ ,  $D_2 = \omega_2^2 - c_S^2 k_2^2 + i\nu_2 \omega_2$ , e o desacoplamento de frequências  $\Delta = \omega_0 - \omega_1 - \omega_2$ .

### 2.4.2 Teoria não linear

Uma vez que os modos induzidos atingem amplitudes comparáveis às amplitudes da onda indutora, faz-se necessário levar em conta o efeito de esgotamento da indutora, ou seja, a amplitude do envelope deixa de ser constante. Esta situação posterior ao início da instabilidade é coberta pela teoria não linear.

O conjunto de equações não lineares acopladas que caracterizam o processo de decaimento eletrostático  $L \Rightarrow L' + S$  podem ser obtidas das equações eletrostáticas de Zakharov 2.13 e 2.14 (ZAKHAROV, 1972; CHIAN; ABALDE, 1995):

$$(\partial_t^2 - \nu_0 \partial t - \gamma_e v_{th}^2 \nabla^2 + \omega_{pe}) \mathbf{E}_0 = -\frac{\omega_{pe}^2}{n_0} n \mathbf{E}_1 \quad (2.20)$$

$$(\partial_t^2 - \nu_1 \partial t - \gamma_e v_{th}^2 \nabla^2 + \omega_{pe}) \mathbf{E}_1 = -\frac{\omega_{pe}^2}{n_0} n \mathbf{E}_0 \quad (2.21)$$

$$(\partial_t^2 - \nu_2 \partial t - c_s^2 \nabla^2) n = \frac{\varepsilon_0}{2m_i} \nabla^2 \langle \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{E}_1 \rangle \quad (2.22)$$

onde  $\mathbf{E}_0$  representa o campo elétrico da onda de Langmuir indutora,  $\mathbf{E}_1$  o campo elétrico da onda de Langmuir induzida, e  $n$  a perturbação na densidade iônica. Os *brackets* representam a média na escala de tempo rápida.

Usando a representação do pacote de onda 2.17 podemos reescrever 2.20-2.22 enfocando a dinâmica temporal:

$$(\partial_t + \nu'_0) \xi_0 = -\left(\frac{c_{12}}{2\omega_0}\right) \xi_1 \xi_2 \exp(i\Delta t) \quad (2.23)$$

$$(\partial_t + \nu'_1) \xi_1 = -\left(\frac{c_{02}}{2\omega_1}\right) \xi_0 \xi_2^* \exp(-i\Delta t) \quad (2.24)$$

$$(\partial_t + \nu'_2) \xi_2 = -\left(\frac{c_{01}}{2\omega_2}\right) \xi_0 \xi_1^* \exp(-i\Delta t) \quad (2.25)$$

Onde os coeficientes de acoplamento  $c_{02} = c_{12} = ek_2/2m_e$ . Este sistema envolve a teoria linear já que reduz-se às equações 2.18 e 2.19 se  $\partial_t \xi_0 = 0$  e  $|\xi_0| \gg |\xi_1|, |\xi_2|$ .

Para facilitar a análise numérica, pode-se introduzir a representação polar  $\xi_\alpha = \beta_\alpha F_\alpha^{1/2} \exp(i\phi_\alpha)$ , onde  $F_\alpha$  e  $\phi_\alpha$  são variáveis reais, e  $\beta_\alpha$  são constantes de normalização complexas. Assim, é possível obter o seguinte conjunto de equações diferenciais ordinárias (CHIAN; ABALDE, 1995):

$$\dot{F}_0 = 2(F_0 F_1 F_2)^{1/2} \cos(\phi) - \nu_0'' F_0 \quad (2.26)$$

$$\dot{F}_1 = -2(F_0 F_1 F_2)^{1/2} \cos(\phi) - \nu_1'' F_1 \quad (2.27)$$

$$\dot{F}_2 = -2(F_0 F_1 F_2)^{1/2} \cos(\phi) - \nu_2'' F_2 \quad (2.28)$$

$$\dot{\phi} = \left[ \left( \frac{F_0 F_1}{F_2} \right)^{1/2} + \left( \frac{F_0 F_2}{F_1} \right)^{1/2} - \left( \frac{F_2 F_1}{F_0} \right)^{1/2} \right] \sin(\phi) + \delta \quad (2.29)$$

Onde o subíndice 0 representa a onda de Langmuir indutora, o subíndice 1 a onda de Langmuir induzida, e o subíndice 2 a onda ion-acústica,  $\phi = \phi_0 - \phi_1 - \phi_2$ ,  $\delta = \Delta/\omega_{pe}$ ,  $\nu_\alpha'' = \nu_\alpha'/\omega_{pe}$ . O ponto representa a diferenciação com relação a  $\omega_{pe}t$ .

Em resumo, na teoria linear considerou-se a amplitude da onda indutora constante, e das ondas induzidas linearmente amortecidas. Na teoria não linear, a amplitude da onda indutora deixou de ser constante, obtendo-se mais uma equação descrevendo a evolução espaço-temporal desta amplitude. Se considerarmos essa onda indutora linearmente instável (ou seja,  $\nu_0 > 0$ ) e o resto das ondas linearmente amortecidas ( $\nu_{1,2} < 0$ ), então dependendo dos parâmetros do sistema a análise numérica pode chegar a ser extremadamente complexa e o comportamento do sistema imprevisível, sendo a aplicação da Teoria de Caos uma ferramenta útil para o estudo destas interações.

## 2.5 Exemplos de interações onda-onda

Além do decaimento eletrostático  $L \rightarrow L' + S$ , tem-se outras possibilidades dependendo dos parâmetros do plasma ambiental.

### 2.5.1 Processo de três ondas $L \rightleftharpoons W + KAW$ na coroa solar

Voitenko *et al.* (2003) estudaram a instabilidade paramétrica do processo  $L \rightarrow W + KAW$  na coroa solar, onde  $W$  representa uma onda eletromagnética em modo whistler, e  $KAW$  uma onda de Alfvén cinética, ou seja, uma onda de Alfvén com números de onda perpendiculares altos, usando a teoria linear. Este tipo de decaimento pode acontecer em regiões da coroa onde a frequência ciclotrônica dos elétrons  $\Omega_e$  é maior do que a frequência eletrônica do plasma  $\omega_{pe}$ , ou  $\Omega_e/\omega_{pe} \gtrsim 1$ . Estas regiões são observadas na forma de filamentos magnéticos de baixa densidade conectadas magneticamente com regiões frias da base coronal, com uma largura de 1 km na



base, e estendendo-se radialmente saindo da coroa (WOO, 1996).

Considerando uma onda de Langmuir oblíqua, onde a amplitude do campo elétrico é dada por:

$$\mathbf{E}_L = (E_{Lx}\hat{\mathbf{x}} + E_{Lz}\hat{\mathbf{z}}) \exp[-i(\omega_L t - k_{Lx}x - k_{Lz}z)] + c.c.; \quad k_{Lz} > 0 \quad (2.30)$$

propagando-se num plasma magnetizado homoganeamente ( $\mathbf{B}_0 = B_0\hat{\mathbf{z}}$ ). Sejam as escalas de não-homogeneidades do plasma bem maiores do que os comprimentos das ondas estudadas, e os vetores de onda:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_L &= [k_{Lx}; 0; k_{Lz}] \\ \mathbf{k}_W &= [0; 0; k_{Wz}] \\ \mathbf{k}_A &= [k_{Ax}; 0; k_{Az}], \quad k_{Ax} \gg k_{Az} \end{aligned}$$

para as ondas de Langmuir (L), whistler (W) e Alfvén cinética (A) respectivamente, e suas frequências  $\omega_L$ ,  $\omega_W$  e  $\omega_A$ . As condições de ressonância são:

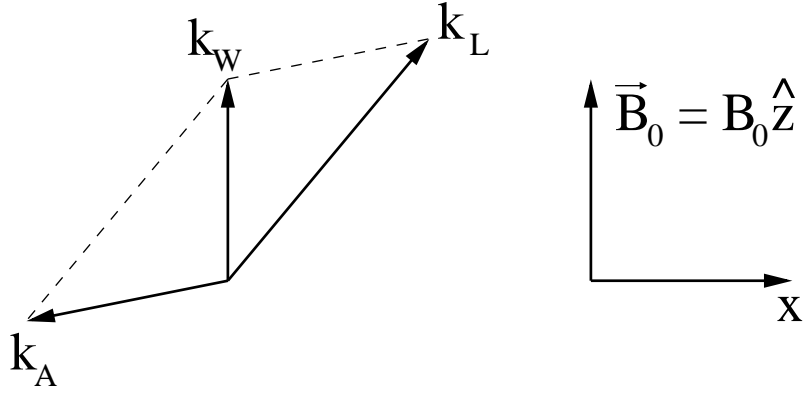
$$\omega_L = \omega_W + \omega_A \quad (2.31)$$

$$k_{Lx} = k_{Ax} \quad (2.32)$$

$$k_{Lz} = k_{Wz} + k_{Az} \quad (2.33)$$

Escolhendo  $k_{Lz} > 0$  obtemos as seguintes duas possibilidades para a onda de Alfvén:  $k_{Az} > 0$ , ou seja, a onda de Alfvén se propaga em forma paralela ao campo magnético (ou seja, se afastando do Sol), ou  $k_{Az} < 0$ , onde a propagação da onda é antiparalela ao campo magnético. A Figura 2.16 mostra um exemplo de vetores de onda que satisfazem as condições de ressonância 2.32-2.33. Note-se que  $k_{Wz} > 0$ , já que  $|k_{Az}| < k_{Lz}$ .

Voitenko *et al.* (2003) acharam a seguinte expressão para a relação de dispersão não



**FIGURA 2.16** - Exemplo de cinemática dos vetores de onda  $\mathbf{k}_L$ ,  $\mathbf{k}_W$ , e  $\mathbf{k}_A$  para o processo  $L \rightarrow W + KAW$

linear de segunda ordem das ondas de Alfvén cinéticas:

$$D_A E_{Ax} = N_A, \quad (2.34)$$

onde  $E_{Ax}$  é a componente  $x$  do campo elétrico da onda de Alfvén.  $D_A$  representa a dispersão linear:

$$D_A = \omega_A^2 - k_{Az}^2 v_A^2 K^2 \quad (2.35)$$

e  $N_A$  é a seguinte expressão não linear:

$$N_A = k_{Az}^2 v_A^2 \left( \frac{1 + \mu_p}{1 + \chi_e} \right) \left\{ \frac{m_e}{e} i \omega_A \frac{k_{Ax}}{k_{Az}} \left[ \left( \frac{n_e^L}{n_0} v_{ez}^L \right) + \frac{1 + \chi_e}{\chi_e} \frac{k_{Ax}}{k_{Az}} \left( \frac{n_e^L}{n_0} v_{ex}^L \right) \right] + \frac{m_e}{m_p} \frac{v_{kA}^2}{v_A^2} (1 + \chi_e) \frac{1}{e} \left( F_{ex} - i \frac{\Omega_e}{\omega_A} F_{ey} \right) - \frac{1}{e} \frac{k_{Ax}}{k_{Az}} F_{ez} \right\}, \quad (2.36)$$

onde  $\mu_p = k_{Ax}^2 \rho_p^2$  e  $\mu_s = \mu_p T_e / T_p$  são as variáveis de dispersão,  $\rho_p$  é o raio de giro dos prótons,  $n_e^L$  é a perturbação da densidade dos elétrons devido à onda de Langmuir, e  $v_{ex}^L$ ,  $v_{ez}^L$  são as componentes da perturbação da velocidade dos elétrons devido à onda de Langmuir.

Em 2.35  $K$  representa a função de dispersão para a onda de Alfvén cinética:

$$\frac{\omega_A}{k_{Az}v_A} = K = \sqrt{\frac{1 + \mu_T}{1 + \chi_e}} \quad (2.37)$$

e  $\mu_T = \mu_p + \mu_s$ ,  $\chi_e = k_{Ax}^2 \delta_e^2$  são variáveis dispersivas da onda.

No caso da onda eletromagnética em modo whistler, a relação de dispersão é:

$$D_W E_{Wx} = N_W, \quad (2.38)$$

onde  $E_{Wx}$  representa a componente  $x$  do campo elétrico da onda whistler. O termo dispersivo é:

$$D_W = \omega_W^2 - c^2 k_{Wz}^2 - \omega_{pe}^2 \frac{\omega_W}{\omega_W - \Omega_e}$$

e o termo não linear é:

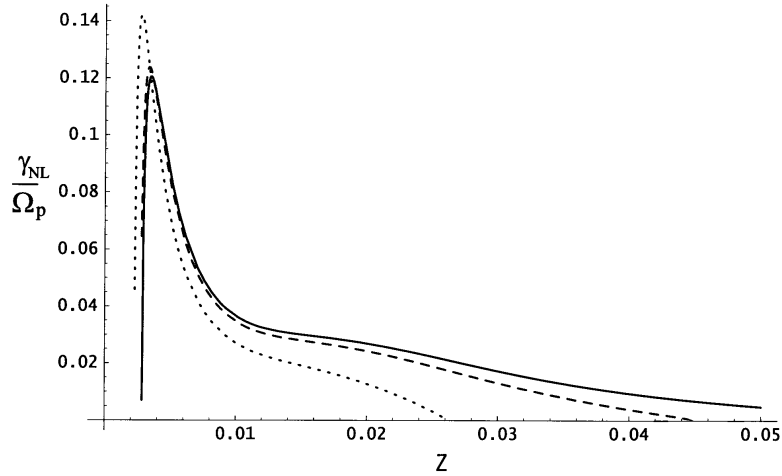
$$N_W = \frac{1}{2e} \omega_{pe}^2 \left( 1 + \frac{\Omega_e}{\omega_W} \right) (iF_{Wy} - F_{Wx}) + 2\pi e \omega_W n_W (V_{Wy} + iV_{Wx}), \quad (2.39)$$

onde  $n_W$  representa a perturbação na densidade devido à onda whistler, e  $V_{Wx}$ ,  $V_{Wy}$  são as componentes das perturbações da velocidade dos elétrons devido à onda whistler. Em 2.39, na expressão à direita da igualdade, o primeiro termo da soma representa o campo elétrico não linear e o segundo a ação de uma corrente não linear.

De 2.34 e 2.38 obtém-se a seguinte expressão para a relação de dispersão não linear para a instabilidade de decaimento paramétrico  $L \rightarrow W + KAW$ :

$$D_W D_A^* = \bar{N}_W \bar{N}_A^* |\phi_L|^2, \quad (2.40)$$

onde o símbolo  $*$  representa o conjugado complexo. Levando em conta a dissipação na frequência das ondas,  $\omega_{A,W} = \omega_{A,W} + i\gamma_{NL}$  obtém-se uma expressão para a taxa



**FIGURA 2.17** - Taxa de crescimento não linear  $\gamma_{NL}$  em função do comprimento de onda normalizado  $Z = k_{Lz}\lambda_D$  para o decaimento  $L \rightarrow W + KAW$  na coroa solar, para os valores da razão entre a frequência ciclotrônica dos elétrons e a frequência do plasma  $b = \Omega_e/\omega_{pe} = 1.04$  (linha sólida),  $b = 1.1$  (linha tracejada) e  $b = 1.4$  (linha pontilhada). A velocidade térmica dos elétrons  $V_{Te}/c = 1/70$ .  
 FONTE: Voitenko *et al.* (2003)

de crescimento não linear:

$$\gamma_{NL}^2 = \frac{b(z-b)^2 \bar{N}_W \bar{N}_A^* |\phi_L|^2}{2\omega_A \Omega_e (2z(z-b)^2 + b)}, \quad (2.41)$$

onde  $\phi_L$  representa o potencial eletromagnético devido à onda Langmuir, e  $b = \Omega_e/\omega_{pe}$ . A Figura 2.17 mostra a taxa de crescimento não linear em termos do número de onda normalizado  $Z = k_{Lz}\lambda_D$  paralelo ao campo magnético  $\mathbf{B}_0$ , para diferentes valores de  $b$ .

Finalmente, a condição de ressonância em termos dos parâmetros das ondas em interação é:

$$\left[ (z - \nu_A)^2 - 1 - \frac{1}{\alpha_{Te}^2} \left( Z - s_A \frac{v_{Te}}{v_A K} \nu_A \right)^2 \right] (z - \nu_A - b) - b = 0, \quad (2.42)$$

onde  $\alpha_{Te}^2 = v_{Te}^2/c^2$ ,  $\nu_A = \omega_A/\omega_{pe}$ ,  $s_A = k_{Az}/|k_{Az}|$  indica a direção de propagação da onda cinética de Alfvén:  $s_A = 1$  se a onda é propagante (ou seja, na direção do campo magnético ambiente) e  $s_A = -1$  se a onda é contrapropagante (antiparalela ao campo magnético).

Ao expandir a equação 2.41, Voitenko *et al.* (2003) notaram que a instabilidade da onda de Langmuir indutora depende da direção de propagação da onda de Alfvén cinética. Se a onda for propagante ( $s_A = 1$ ) a instabilidade é muito fraca, enquanto para o caso antipropagante ( $s_A = -1$ ) a instabilidade é maior. Logo, as perturbações na densidade produzidas pelas ondas de Alfvén cinéticas que se propagam na direção do Sol serão melhor observadas.

### 2.5.2 Processo de três ondas $L \rightleftharpoons l + W$ no vento solar

Chian e Abalde (1999) mostraram que o processo de decaimento não linear  $L \rightleftharpoons l + W$ , onde  $L$  representa uma onda de Langmuir,  $l$  uma onda eletromagnética polarizada circularmente à esquerda e  $W$  uma onda whistler, é possível em regiões do espaço interplanetário onde  $\Omega_e \ll \omega_{pe}$ , ou seja, a onda whistler é uma onda de baixa frequência quando comparada com a frequência da onda de Langmuir indutora, e a frequência da onda eletromagnética  $l$ .

Sejam os campos elétricos das ondas da forma dada na equação 2.17, propagando-se ao longo do campo magnético ambiente  $\mathbf{B}_0 = B_0 \hat{\mathbf{z}}$ . Na ausência de acoplamento (teoria linear), a fase de variação rápida  $k_\alpha z - \omega_\alpha t$ ,  $\alpha = L, l, W$  satisfaz as seguintes relações de dispersão:

$$\omega_L^2 = 3v_{th}^2 k_L^2 + \omega_{pe}^2 \quad (2.43)$$

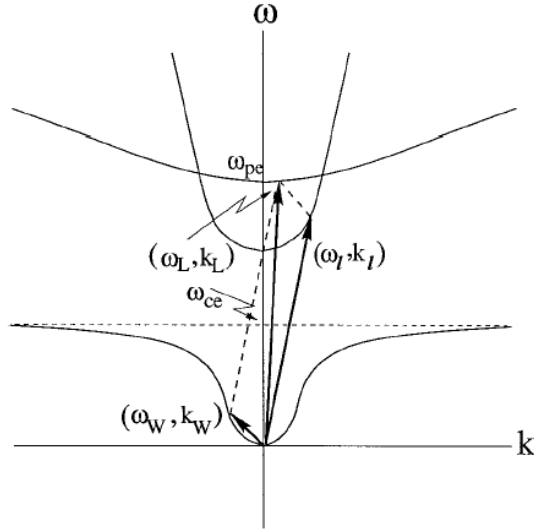
$$\omega_l^2 = c^2 k_l^2 + \frac{\omega_{pe}^2 \omega_l}{\omega_l + \Omega_e} \quad (2.44)$$

$$\omega_W^2 = c^2 k_W^2 + \frac{\omega_{pe}^2 \omega_W}{\omega_W - \Omega_e} \quad (2.45)$$

As condições de acoplamento de fase, necessárias para a interação ressonante são:

$$\omega_L \approx \omega_l + \omega_W \quad \mathbf{k}_L = \mathbf{k}_l + \mathbf{k}_W \quad (2.46)$$

onde um pequeno desacoplamento da frequência é permitido, embora um acoplamento perfeito dos vetores de onda é suposto. Além das condições 2.46, o tripleto deve satisfazer a conservação de helicidade da onda. Como a onda Langmuir é eletrostática (ou seja, sem polarização) a polarização da onda eletromagnética à esquerda é



**FIGURA 2.18** - Diagrama de acoplamento de fase para o processo  $L = l + W$ .  
 FONTE: Chian e Abalde (1999)

cancelada pela onda whistler, que possui polarização circular à direita. A Figura 2.18 apresenta um exemplo de diagrama de acoplamento que satisfaz as condições 2.46.

Na teoria linear, supondo a amplitude da onda indutora constante e maior do que a amplitude das ondas induzidas, pode-se obter a seguinte relação de dispersão não linear:

$$D_l D_W^* = E_0^2 c_{LW} c_{Ll}^* \quad (2.47)$$

e a taxa de crescimento da instabilidade:

$$\Gamma = E_0 (c_{LW} c_{Ll}^*)^{1/2} \left[ \frac{\partial D_l}{\partial \omega_l} \frac{\partial D_W^*}{\partial \omega_W} \right]^{-1/2} \quad (2.48)$$

A diferença deste processo em relação ao estudado por Voitenko *et al.* (2003) é que Chian e Abalde (1999) consideraram a onda indutora de Langmuir como sendo variável no tempo ( $\partial_t \xi_L \neq 0$ ), ou seja, existe uma transferência de energia entre a onda indutora e as ondas induzidas. Considere-se duas escalas de tempo, uma escala de alta frequência, onde os campos elétricos oscilam perto da frequência de plasma  $\omega_{pe}$ , e uma escala lenta onde  $\mathbf{E}_\alpha$  ( $\alpha = L, l, W$ ) oscilam em frequências menores que a frequência ciclotrônica dos elétrons  $\Omega_e$ . Assim, o seguinte sistema de equações de

onda não lineares acopladas foi obtido a partir das equações MHD:

$$D_L \mathbf{E}_L = -ic_{lW} E_l E_W \hat{\mathbf{z}} \quad (2.49)$$

$$D_l \mathbf{E}_l = ic_{LW} E_L \mathbf{E}_W^* \quad (2.50)$$

$$D_W \mathbf{E}_W = ic_{Ll} E_L \mathbf{E}_l^*, \quad (2.51)$$

, onde os operadores de dispersão são:

$$D_L = -\omega_L^2 + \omega_{pe}^2 + 3v_{th}^2 k_L^2 - i\nu_L \omega_L \quad (2.52)$$

$$D_l = -\omega_l^2 + c^2 k_l^2 + \frac{\omega_{pe}^2 \omega_l}{\omega_l + \Omega_e} - i\nu_l \omega_l \quad (2.53)$$

$$D_W = -\omega_W^2 + c^2 k_W^2 + \frac{\omega_{pe}^2 \omega_W}{\omega_W + \Omega_e} - i\nu_W \omega_W \quad (2.54)$$

os coeficientes de acoplamento são:

$$c_{lW} = \frac{-e\omega_{pe}^2}{2m_e(\omega_W - \Omega_e)} \left[ \frac{k_l}{\omega_l} + \frac{k_W(\omega_W - \Omega_e)}{\omega_W(\omega_l + \Omega_e)} \right] \quad (2.55)$$

$$c_{LW} = \frac{\omega_l^2}{\omega_L^2} c_{lW} \quad (2.56)$$

$$c_{Ll} = \frac{\omega_W^2}{\omega_L^2} c_{lW} \quad (2.57)$$

e as frequências de amortecimento das ondas são:

$$\nu_L = \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_L^2} \nu_e \quad (2.58)$$

$$\nu_l = \frac{\nu_e \omega_{pe}^2}{(\omega_l + \Omega_e)^2} \quad (2.59)$$

$$\nu_W = \frac{\nu_e \omega_{pe}^2}{(\omega_W - \Omega_e)^2} \quad (2.60)$$

onde  $\nu_e$  é a frequência de amortecimento dos elétrons. Introduzindo a representação modulacional 2.17 e os operadores temporal e espacial  $\nabla \rightarrow ik$  e  $\partial_t \rightarrow -i\omega$  obtêm-se as seguintes expressões:

$$(\partial_t + v_{gL}\partial_z + \nu'_L)\xi_L = -\frac{c_{lW}}{2\partial D_L/\partial\omega_L}\xi_l\xi_W \exp(i\Delta t) \quad (2.61)$$

$$(\partial_t + v_{gl}\partial_z + \nu'_l)\xi_l = \frac{c_{LW}}{2\partial D_l/\partial\omega_l}\xi_L\xi_W^* \exp(-i\Delta t) \quad (2.62)$$

$$(\partial_t + v_{gW}\partial_z + \nu'_W)\xi_W = \frac{c_{Ll}}{2\partial D_W/\partial\omega_W}\xi_L\xi_l^* \exp(-i\Delta t) \quad (2.63)$$

onde  $v_{g\alpha} = \partial\omega_\alpha/\partial k_\alpha$  representa a velocidade de grupo,  $\nu'_\alpha = -\nu_\alpha\omega_\alpha/\partial\omega_\alpha D_\alpha$ , o desacoplamento das frequências  $\Delta = \omega_L - \omega_l - \omega_W$ , e

$$\frac{\partial D_L}{\partial\omega_L} = -2(\omega_{pe} + 3v_{th}^2 k_L^2)^{1/2} \quad (2.64)$$

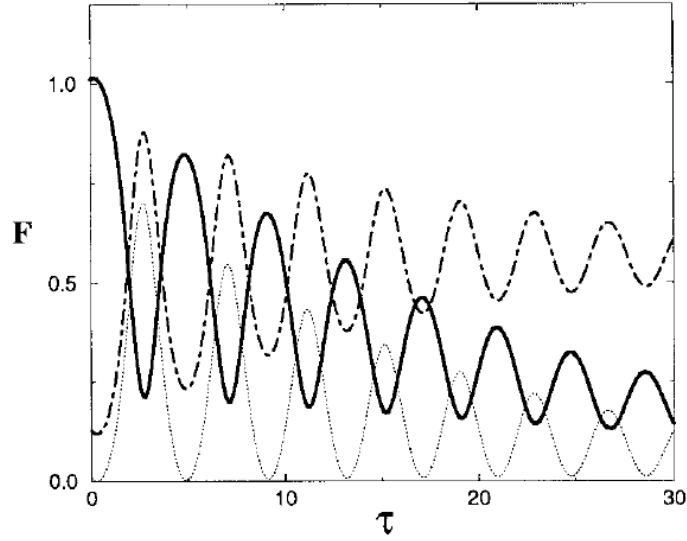
$$\frac{\partial D_l}{\partial\omega_l} = -2\omega_{pe} \left[ 1 - \frac{\omega_{pe}\Omega_e}{2(\omega_{pe} + \Omega_e)^2} \right] \quad (2.65)$$

$$\frac{\partial D_W}{\partial\omega_W} = -\frac{\omega_{pe}^2}{\Omega_e} \quad (2.66)$$

Finalmente, Chian e Abalde (1999) reescrevem as equações 2.61-2.63 em termos das variáveis reais  $F_\alpha$  e  $\phi_\alpha$  adotando a representação polar:

$$\xi_\alpha = \beta_\alpha F_\alpha^{1/2} \exp(i\phi_\alpha) \quad (2.67)$$





**FIGURA 2.19** - Simulações numéricas da interação não linear de três ondas  $L \rightleftharpoons l + W$ . A linha sólida representa a onda de Langmuir  $L$ , a linha tracejada a onda eletromagnética  $l$ , e a linha pontilhada a onda whistler  $W$ . Todas as ondas são linearmente amortecidas.  
 FONTE: Chian e Abalde (1999)

onde  $\beta_\alpha$  ( $\alpha = L, l, r$ ) são parâmetros de normalização. Inserindo 2.67 em 2.61-2.63 obtêm-se:

$$\dot{F}_L = 2(F_L F_l F_W)^{1/2} \cos(\phi) - \nu_L'' F_L \quad (2.68)$$

$$\dot{F}_l = -2(F_L F_l F_W)^{1/2} \cos(\phi) - \nu_l'' F_l \quad (2.69)$$

$$\dot{F}_W = -2(F_L F_l F_W)^{1/2} \cos(\phi) - \nu_W'' F_W \quad (2.70)$$

$$\dot{\phi} = \left[ -\left(\frac{F_W F_l}{F_L}\right)^{1/2} + \left(\frac{F_L F_l}{F_W}\right)^{1/2} + \left(\frac{F_L F_W}{F_l}\right)^{1/2} \right] \sin(\phi) + \delta, \quad (2.71)$$

onde o ponto indica diferenciação com relação à variável  $\tau = k(z - vt)$ ,  $v$  e  $k$  são a velocidade e o vetor de onda, respectivamente,  $\phi = \phi_L - \phi_l - \phi_W$ ,  $\nu_\alpha'' = \nu_\alpha' / [k(v_{g\alpha} - v)]$ , e  $\delta = \Delta / [k(v_{gW} - v)]$ . A conversão do sistema de equações de variáveis complexas para reais facilita estudos analíticos e numéricos. A Figura 2.19 mostra um exemplo de simulações numéricas usando o conjunto de equações 2.68-2.71, com  $\nu_L = 0.01$ ,  $\nu_l = \nu_W = 0.05$ ,  $F_L(0) = 0.1$ ,  $F_W(0) = 0.01$ , e  $\delta = 1$ . Nesta simulação é possível apreciar a transferência de energia entre as ondas devido à interação não linear de três ondas. A escolha de frequências de amortecimento positivas indica que as ondas são linearmente amortecidas, o que fisicamente pode representar o amortecimento

de Landau (no caso de ondas eletrostáticas), ou amortecimento ciclotrônico, no caso de ondas eletromagnéticas (CHIAN *et al.*, 2000).

### 2.5.3 Processo de três ondas $L \rightleftharpoons W + A$ na magnetosfera terrestre

A última possibilidade de processo de três ondas a ser tratada nesta seção ocorre quando uma onda de Langmuir ( $L$ ) acopla-se com uma onda de Alfvén ( $A$ ), emitindo ondas eletromagnéticas no modo whistler ( $W$ ), num evento conhecido como *evento LAW* (CHIAN *et al.*, 1994; LOPES; CHIAN, 1996). Para que as ondas entrem em ressonância, elas devem cumprir as seguintes condições de acoplamento (CHIAN *et al.*, 2000):

$$\omega_L \approx \omega_W + \omega_A, \quad \mathbf{k}_L = \mathbf{k}_W + \mathbf{k}_A \quad (2.72)$$

onde um pequeno desacoplamento na frequência é permitido. Além disso, as ondas devem satisfazer a conservação de helicidade em  $L \rightleftharpoons W + A$ . Como a onda Langmuir é eletrostática, e a onda whistler possui polarização circular à direita, para satisfazer a conservação de helicidade a onda de Alfvén deve possuir polarização circular à esquerda (ou seja, a onda está no modo *Alfvén Shear*).

Normalmente, se a propagação das ondas é paralela, o modo whistler está limitado ao intervalo de frequências menores que a frequência ciclotrônica dos elétrons ( $\omega_W < \Omega_e$ ). Como as ondas de Langmuir oscilam ao redor da frequência do plasma  $\omega_{pe}$  ( $\omega_L \sim \omega_{pe}$ ), os eventos LAW só podem acontecer dentro das regiões aurorais onde a densidade do plasma é baixa o suficiente para satisfazer  $\omega_{pe} < \Omega_e$ , assim,  $\omega_W \sim \omega_{pe}$  (CHIAN; ABALDE, 1995). Diferentemente do que ocorre no processo  $L \rightleftharpoons l + W$ , a onda whistler atua como uma onda de alta frequência, sendo a onda Alfvén uma onda de baixa frequência (quando comparada com a frequência da onda indutora), já que  $\omega_A < \Omega_i$ .

Na teoria linear, considera-se que a amplitude da onda indutora é constante e maior do que as amplitudes das ondas induzidas. A seguinte relação de dispersão não linear corresponde ao processo  $L \rightarrow W + A$  (CHIAN, 1995):

$$D_A D_W^* = c_{LA}^* c_{LW} |E_L|^2, \quad (2.73)$$

onde os operadores de dispersão são:

$$D_W = -\omega_W^2 + c^2 k_W^2 + \frac{\omega_{pe}^2 \omega_W}{\omega_W - \Omega_e} - i\nu_W \omega_W \quad (2.74)$$

$$D_A = -\omega_A^2 + c_A^2 k_A^2 - i\nu_A \omega_A, \quad (2.75)$$

e os coeficientes de acoplamento são:

$$c_{LA} = \left( \frac{\omega_W^2}{\omega_L^2} \right) c_{WA} \quad (2.76)$$

$$c_{LW} = \left( \frac{\omega_A^2 c_A^2}{\omega_L^2 c^2} \right) c_{WA} \quad (2.77)$$

$$c_{WA} = \frac{-e\omega_{pe}^2}{2m_e(\omega_W - \Omega_e)} \left[ \frac{k_A}{\omega_A} + \frac{k_W(\omega_W - \Omega_e)}{\omega_W(\omega_A + \Omega_e)} \right] \quad (2.78)$$

A taxa de crescimento no regime linear é:

$$\Gamma = \frac{|E_L|}{2} \left( \frac{c_{LA} c_{LW}}{c_A k \omega_L} \right)^{1/2} \left[ 1 + \frac{\Omega_e \omega_{pe}^2}{2\omega_L(\omega_L - \Omega_e)^2} \right]^{-1/2}, \quad (2.79)$$

e a condição limiar para a amplitude da onda indutora, acima da qual o processo  $L \rightarrow W + A$  ocorre:

$$|E_L|^2 = \frac{4\nu_W \nu_A c_A k \omega_L}{c_{LA} c_{LW}} \left[ 1 + \frac{\Omega_e \omega_{pe}^2}{2\omega_L(\omega_L - \Omega_e)^2} \right] \quad (2.80)$$

Na teoria não linear, e seguindo uma derivação similar à usada na seção 2.5.2, as equações que governam os eventos LAW são:

$$D_L \mathbf{E}_L = -ic_{WA} E_W E_A \hat{\mathbf{z}} \quad (2.81)$$

$$D_W \mathbf{E}_W = ic_{LA} E_L \mathbf{E}_A^* \quad (2.82)$$

$$D_A \mathbf{E}_A = ic_{LW} E_L \mathbf{E}_W^*, \quad (2.83)$$

onde o operador de dispersão da onda indutora é:

$$D_L = -\omega_L^2 + \omega_{pe}^2 + \gamma v_{th}^2 k_L^2 - i\nu_L \omega_L, \quad (2.84)$$

e as taxas de crescimento/amortecimento das ondas são:

$$\nu_L = \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_L^2} \nu_e \quad (2.85)$$

$$\nu_W = \frac{\omega_{pe}^2 \nu_e}{(\omega_W - \Omega_e)^2} \quad (2.86)$$

$$\nu_A = \frac{\omega_{pe}^2 c_A^2 \nu_e}{c^2 (\omega_A + \Omega_e)^2} + \frac{\omega_{pi}^2 c_A^2 \nu_i}{c^2 (\omega_A - \Omega_i)^2}, \quad (2.87)$$

onde  $c_A = B_0/(\mu_0 \rho_0)^{1/2}$  é a velocidade de Alfvén,  $\nu_e$  é a frequência de amortecimento dos elétrons,  $\nu_i$  é a frequência de amortecimento dos íons, e  $\gamma$  é a razão dos calores específicos. Usando a representação 2.17, e os operadores temporal e espacial  $\partial_z \rightarrow ik$ ,  $\partial_t \rightarrow -i\omega$ , as seguintes equações são obtidas:

$$(\partial_t + v_{gL} \partial_z + \nu'_L) \mathbf{E}_L = -\frac{c_{WA}}{2\partial D_L / \partial \omega_L} \xi_W \xi_A \exp(i\Delta t) \quad (2.88)$$

$$(\partial_t + v_{gW} \partial_z + \nu'_W) \mathbf{E}_W = -\frac{c_{LA}}{2\partial D_W / \partial \omega_W} \xi_L \xi_A^* \exp(-i\Delta t) \quad (2.89)$$

$$(\partial_t + v_{gA} \partial_z + \nu'_A) \mathbf{E}_A = -\frac{c_{LW}}{2\partial D_A / \partial \omega_A} \xi_L \xi_W^* \exp(-i\Delta t), \quad (2.90)$$

onde  $v_{g\alpha}$  é a velocidade de grupo da onda,  $\nu'_\alpha = -\nu_\alpha \omega_\alpha / \partial_{\omega_\alpha} D_\alpha$ , o desacoplamento de frequência  $\Delta = \omega_L - \omega_W - \omega_A$ , e

$$\frac{\partial D_L}{\partial \omega_L} = -2(\omega_{pe}^2 + \gamma v_{th}^2 k_L^2)^{1/2} \quad (2.91)$$

$$\frac{\partial D_W}{\partial \omega_W} = -\frac{\omega_{pe}^2}{\Omega_e} \quad (2.92)$$

$$\frac{\partial D_A}{\partial \omega_A} = -2c_A k_A \quad (2.93)$$

O sistema de equações 2.88-2.90 pode ser reescrito na forma normalizada:

$$\dot{A}_L = \nu_L'' A_L + A_W A_A \quad (2.94)$$

$$\dot{A}_W = \nu_W'' A_W - A_L A_A^* \quad (2.95)$$

$$\dot{A}_A = i\delta A_A + \nu_A'' A_A - A_L A_W^*, \quad (2.96)$$

onde:

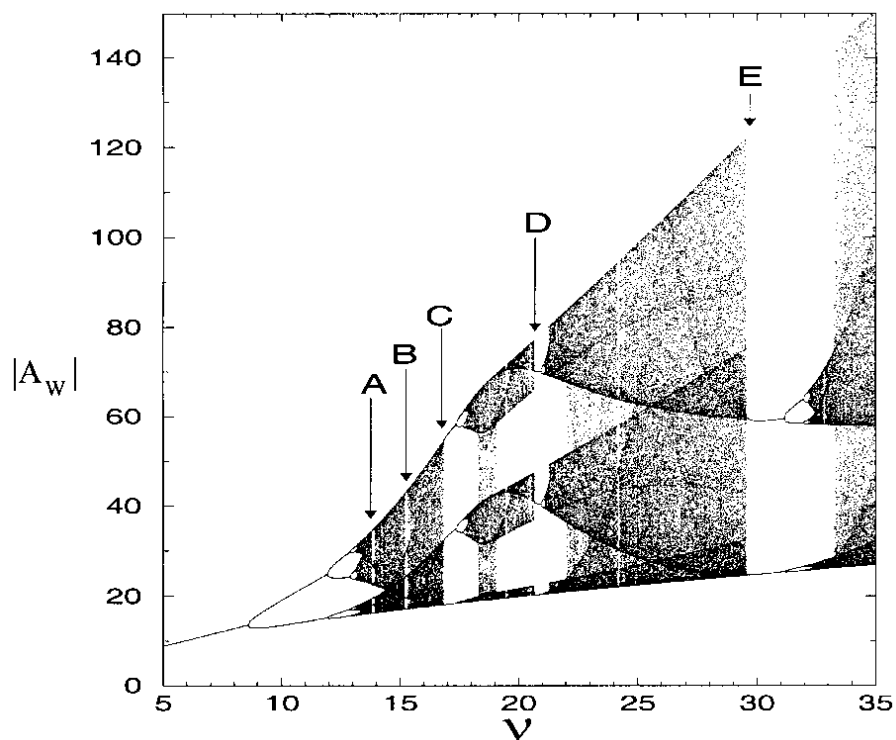
$$A_L = \left[ \frac{c_{LW} c_{LA}}{4k^2(v_{gA} - v)(v_{gW} - v)(\partial D_A/\partial \omega_A)(\partial D_W/\partial \omega_W)} \right]^{1/2} \xi_L \quad (2.97)$$

$$A_W = \left[ \frac{c_{WA} c_{LW}}{4k^2(v_{gL} - v)(v_{gA} - v)(\partial D_L/\partial \omega_L)(\partial D_A/\partial \omega_A)} \right]^{1/2} \xi_W \quad (2.98)$$

$$A_A = \left[ \frac{c_{WA} c_{LA}}{4k^2(v_{gL} - v)(v_{gW} - v)(\partial D_L/\partial \omega_L)(\partial D_W/\partial \omega_W)} \right]^{1/2} \xi_A, \quad (2.99)$$

onde o ponto indica diferenciação com relação à variável  $\tau = k(z - vt)$ ,  $v$  e  $k$  são velocidade e vetor de onda arbitrários,  $\nu_\alpha'' = v_\alpha'/[k(v_{g\alpha} - v)]$  e  $\delta = \Delta/[k(v_{gA} - v)]$ .

Chian *et al.* (2000) fizeram um estudo da dinâmica caótica do sistema de equações 2.94-2.96, considerando a onda de Langmuir linearmente instável ao fixar  $\nu_L'' = 1 > 0$ , e as ondas whistler e Alfvén linearmente amortecidas, com a mesma frequência de amortecimento  $\nu_W'' = \nu_A'' = \nu < 0$ , simplificando a análise. A Figura 2.20 mostra o diagrama de bifurcação obtido ao variar  $\nu$  no intervalo  $[5, 35]$ , fixando  $\delta = 2$ . Temos que, para  $\nu = 8.3$ , a série temporal correspondente à amplitude da onda whistler vai



**FIGURA 2.20** - Diagrama de bifurcação para o sistema 2.94-2.96 (Processo  $L \rightleftharpoons W + A$ ).  
 FONTE: Chian *et al.* (2000)

se comportar de forma periódica (ver Fig. 2.21 (a)). Para  $\nu = 8.6$ , a periodicidade é duplicada (período-2, visível nos picos da série temporal na Figura 2.21 (b)). Em  $\nu = 13.2$ , uma nova duplicação de período acontece, onde a periodicidade da órbita (período-4) também é visível na série temporal mostrada na Figura 2.21 (c).

Rempel *et al.* (2003) também apresentaram exemplos de séries temporais intermitentes para o mesmo sistema, usando os mesmos valores dos parâmetros. A intermitência é um fenômeno distinguível nas séries temporais caóticas como estouros esporádicos na série, que interrompem comportamentos quase ordenados ou periódicos (REMPERL *et al.*, 2003). A figura 2.22 mostra a repentina mudança da dinâmica da série temporal de período-2 quando  $\nu = 29.57$  (Fig. 2.22(a)) para uma serie caótica (Fig. 2.22(b)), e a ocorrência de intermitência representada por oscilações de grande variabilidade que interrompem períodos de baixa variabilidade, comumente referidos como fases laminares.

#### 2.5.4 Processo de quatro ondas $L \rightleftharpoons L^+ + L^- + S^*$

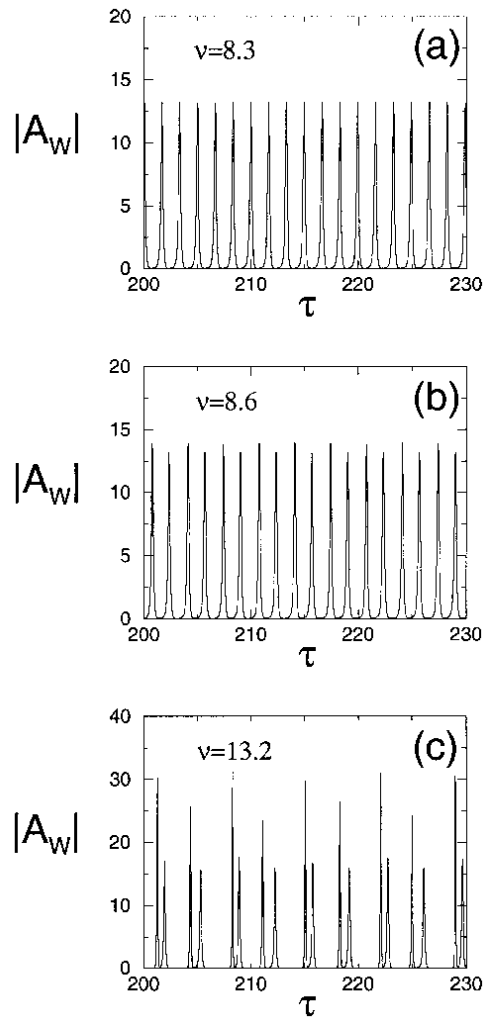
Russell e Ott (1981) apresentaram um modelo que pode ser considerado de quatro ondas, embora as amplitudes de somente três ondas estejam envolvidas nas equações. O modelo é derivado da equação não linear de Schrödinger, que por sua vez, é derivada fazendo-se uma aproximação estática ou adiabática das equações de Zakharov (os detalhes da derivação deste modelo encontram-se no apêndice A.2). É conveniente reescrever as equações de Zakharov eletrostáticas 2.13 e 2.14 na seguinte forma adimensional:

$$i\partial_\tau E + \partial_z^2 E = nE \quad (2.100)$$

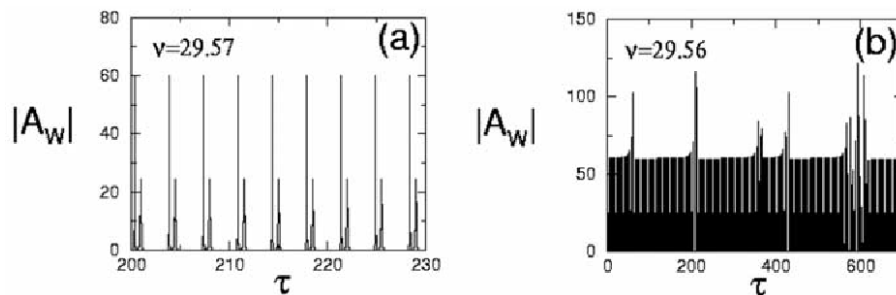
$$\partial_\tau^2 n - \partial_z^2 n = \partial_z^2 |E|^2, \quad (2.101)$$

onde as novas variáveis adimensionais são:

$$\begin{aligned} E' &= \left(\frac{1}{\eta}\right) \left(\frac{m_i}{m_e}\right)^{1/2} \left(\frac{\gamma_e \varepsilon_0 E^2}{8n_0 K_B T_e}\right) \\ n' &= \left(\frac{\gamma_e}{4}\right) \left(\frac{m_i}{m_e \eta}\right) \left(\frac{n_e}{n_0}\right), \end{aligned}$$



**FIGURA 2.21** - Séries temporais da amplitude da onda whistler para diferentes valores do parâmetro de controle (processo  $L \rightleftharpoons W + A$ ). (a)  $\nu = 8.3$ , período-1. (b)  $\nu = 8.6$ , período-2. (c)  $\nu = 13.2$ , período-4.  
 FONTE: Chian *et al.* (2000)



**FIGURA 2.22** - Séries temporais para diferentes valores do parâmetro de controle (Processo  $L \rightleftharpoons W + A$ ). (a)  $\nu = 29.57$ , período-2. (b)  $\nu = 29.56$ , serie temporal caótica, com a presença de estouros esporádicos correspondentes a intermitência.  
 FONTE: Rempel *et al.* (2003)



e os operadores diferenciais são:

$$\begin{aligned}\partial_z &= \left(\frac{\gamma_e}{2}\right) \left(\frac{m_i}{\eta m_e}\right)^{1/2} \lambda_D \partial_x \\ \partial_\tau &= \left(\frac{\gamma_e}{2}\right) \left(\frac{m_i}{\eta m_e}\right)^{1/2} \frac{1}{\omega_{pe}} \partial_x,\end{aligned}$$

onde  $\eta = (\gamma_e K_B T_e + \gamma_i K_B T_i)/(K_B T_e)$ ,  $K_B$  representa a constante de Boltzmann, e os símbolos primos foram omitidos em 2.100 e 2.101.

Considerando a velocidade de fase da onda ion-acústica menor do que a velocidade do som, ou seja (ROBINSON *et al.*, 2002):

$$|\omega_S| < k_S c_S,$$

então a perturbação na densidade vai variar lentamente no tempo, sendo estacionária num referencial deslocando-se com a velocidade de grupo da onda de Langmuir; neste caso, a derivada temporal em 2.101 pode ser ignorada. Integrando duas vezes e escolhendo as constantes de integração iguais a zero obtemos:

$$n = -|E|^2 \tag{2.102}$$

Substituindo 2.102 em 2.100:

$$i\partial_\tau E + \partial_z^2 E + |E|^2 E = 0 \tag{2.103}$$

A equação 2.103 é conhecida como a equação não linear de Schrödinger, devido a sua semelhança com a equação de Schrödinger (NICHOLSON, 1983). Russell e Ott (1981) acrescentaram mais um termo que representa a frequência de crescimento ou

amortecimento das ondas:

$$i(\partial_t E + \hat{\gamma}E) + \partial_x^2 E + |E|^2 E = 0 \quad (2.104)$$

Onde a notação foi mudada usando  $x$  e  $t$ . Russell e Ott (1981) fizeram uma aproximação da equação 2.104 usando uma solução que consiste em três ondas propagantes:

$$E(x, t) = E_0(t) \exp[-i(k_0 x - \omega_0 t)] + E_1(t) \exp[-i(k_1 x - \omega_1 t)] + E_2(t) \exp[-i(k_2 x - \omega_2 t)], \quad (2.105)$$

onde  $E_0$  representa o campo elétrico da onda de Langmuir indutora ( $L$ ),  $E_1$  representa o campo da onda de Langmuir em modo Stokes ( $L^-$ ), e  $E_2$  o campo da onda de Langmuir anti-Stokes ( $L^+$ ), interagindo através do processo puramente eletrostático:

$$L_0 \rightleftharpoons L^+ + L^- + S^*,$$

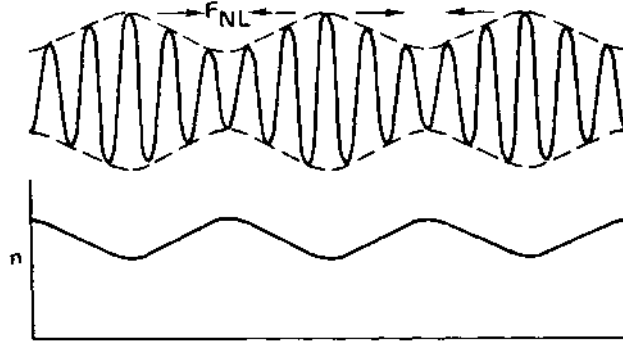
onde  $S^*$  representa a onda ion-acústica no limite sub-sônico. As ondas de Langmuir estão relacionadas através das seguintes condições de ressonância:

$$\begin{aligned} 2k_0 &= k_1 + k_2 \\ \omega_{1,2} - \omega_0 &= \delta_{1,2}, \end{aligned}$$

e a dispersão linear:

$$\omega_\sigma = k_\sigma^2 \quad \sigma = 0, 1, 2$$

Introduzindo 2.105 em 2.104 obtém-se um conjunto de equações diferenciais ordinárias em termos de variáveis complexas, que podem ser transformadas em reais usando a representação  $E_\sigma = a_\sigma(t) \exp[i\phi_\sigma(t)]$  ( $\sigma = 0, 1, 2$ ), onde  $a_\sigma$  é a amplitude real, e  $\phi_\sigma$  a fase real. Assim, pode-se obter o seguinte conjunto de equações com



**FIGURA 2.23** - Interação entre as ondas de Langmuir e as perturbações na densidade num plasma. A perturbação de densidade fica "presa" devido à força ponderomotiva gerada pelo gradiente da intensidade do campo elétrico, e as ondas de Langmuir são refratadas em direção às regiões de baixa densidade.  
 FONTE: Chen (1984)

variáveis reais:

$$\dot{a}_0 = \gamma_0 a_0 + 2a_0 a_1 a_2 \sin \theta \quad (2.106)$$

$$\dot{a}_1 = -\gamma_1 a_1 - a_0^2 a_2 \sin \theta \quad (2.107)$$

$$\dot{a}_2 = -\gamma_2 a_2 - a_0^2 a_1 \sin \theta \quad (2.108)$$

$$\dot{\theta} = -2\delta + a_1^2 + a_2^2 - 2a_0^2 + \left[ 4a_1 a_2 - a_0^2 \left( \frac{a_2}{a_1} + \frac{a_1}{a_2} \right) \right] \cos \theta, \quad (2.109)$$

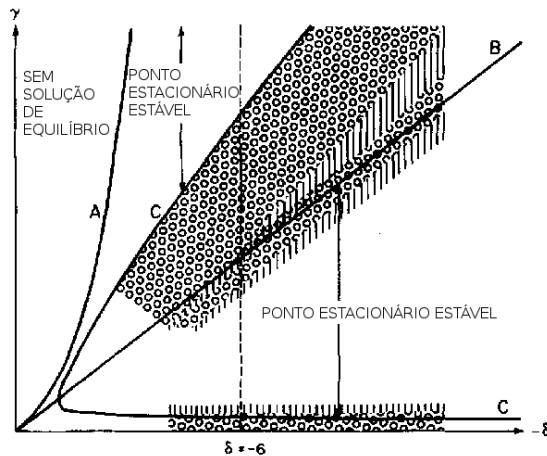
onde  $\theta = 2\phi_0 - \phi_1 \phi_2 - 2\delta t$ ,  $\delta = (\delta_1 + \delta_2)/2$ ,  $\gamma_0 = -\gamma(k_0)$ ,  $\gamma_{1,2} = \gamma(k_{1,2})$ . Este modelo de quatro ondas será analisado no capítulo 5. Russell e Ott (1981) consideraram  $\gamma_0 = 1$ , e reduziram o número de equações de quatro para três supondo  $\gamma_2 = \gamma_1 = \gamma$ , e as amplitudes  $a_1 = a_2$ , obtendo o seguinte sistema:

$$\dot{a}_0 = a_0 + 2a_0 a_1^2 \sin \theta \quad (2.110)$$

$$\dot{a}_1 = -\gamma a_1 - a_0^2 a_1 \sin \theta \quad (2.111)$$

$$\dot{\theta} = -2\delta + 2(a_1^2 - a_0^2) + 2(2a_1^2 - a_0^2) \cos \theta \quad (2.112)$$

A interpretação física do limite estático usado para simplificar as equações de Zakh-



**FIGURA 2.24** - Resumo dos possíveis comportamentos assintóticos do sistema 2.110-2.112, onde o símbolo “|” indica a região que apresenta comportamento caótico, e “o” indica regiões onde o sistema converge num ciclo limite.  
 FONTE: Russell e Ott (1981)

rov na equação não linear de Schrödinger é a seguinte: a Figura 2.23 mostra uma onda de Langmuir propagando-se no plasma e pequenas ondulações no envoltório da onda, devido a flutuações aleatórias. Estas ondulações produzem um gradiente na intensidade da onda, criando uma força (a força ponderomotiva  $F_{NL}$ ) que desloca os elétrons e íons na direção onde a intensidade seja mínima, e o acúmulo de partículas vai formar um aumento na densidade do plasma nessa região. Note-se que as ondas de Langmuir ficarão presas nas regiões de baixa densidade, já que a relação de dispersão 2.5:

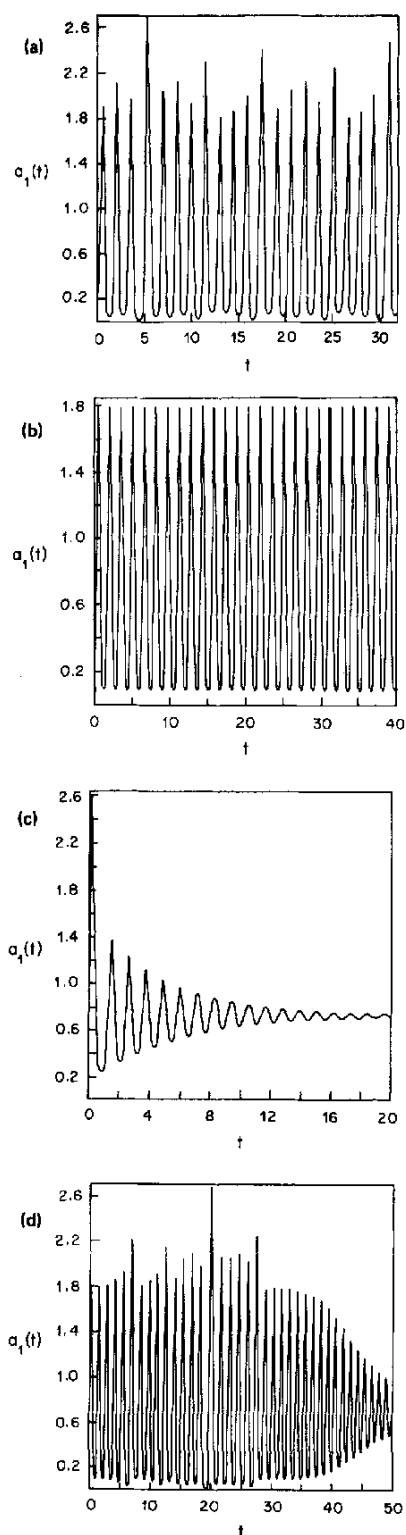
$$\omega_L^2 = \omega_{pe}^2 + \frac{3}{2}v_{th}^2 k_L^2$$

permite às ondas que possuam números de onda grandes existirem só nas regiões onde  $\omega_{pe}$  seja pequeno, ou seja, regiões de baixa densidade. O acúmulo de ondas com  $k$  grande produz um aumento da ondulação no envoltório da onda, o que por sua vez produz um aumento na força ponderomotiva, que confina a densidade de plasma nas regiões onde a intensidade da onda seja mínima. No referencial da onda de Langmuir, a perturbação da densidade permanece praticamente estática, o que permite ignorar a derivada temporal de  $n$  na equação 2.101.

Russell e Ott (1981) estudaram o sistema 2.110-2.112 de forma analítica e numérica. O diagrama da Figura 2.24 resume os possíveis estados do sistema para diferentes

valores dos parâmetros de controle  $\gamma$  e  $\delta$ .

A Figura 2.25 mostra séries temporais de  $a_1$  para diferentes valores de  $\gamma$ , fixando  $\delta = -6.0$  (marcada na Figura 2.24 com uma linha tracejada). Para  $\gamma = 5.6$  se têm uma série temporal caótica (Fig. 2.25(a)). Em  $\gamma = 5.0$  a órbita converge num ciclo limite, refletido na série temporal como sendo periódica de período 1 (Fig. 2.25(b)). Na figura 2.25(c) observa-se a série temporal convergindo num ponto estacionário estável. Finalmente, a figura 2.25(d) mostra a convergência de uma órbita caótica transiente para um ponto estacionário estável.



**FIGURA 2.25** - Séries temporais de  $a_1(t)$ , para o modelo simplificado do processo modulacional sub-sônico. (a)  $\gamma = 5.6$ , serie caótica. (b)  $\gamma = 7.5$ , ciclo limite (período-1). (c)  $\gamma = 5.0$ , convergência num ponto estacionário estável. (d)  $\gamma = 5.5$ , onde a serie temporal apresenta comportamento transiente caótico, convergindo num ponto estacionário estável.

FONTE: Russell e Ott (1981)

## CAPÍTULO 3

### OBSERVAÇÃO DE FENÔMENOS DE INTERAÇÃO ONDA-ONDA NO SISTEMA SOLAR

#### 3.1 Introdução

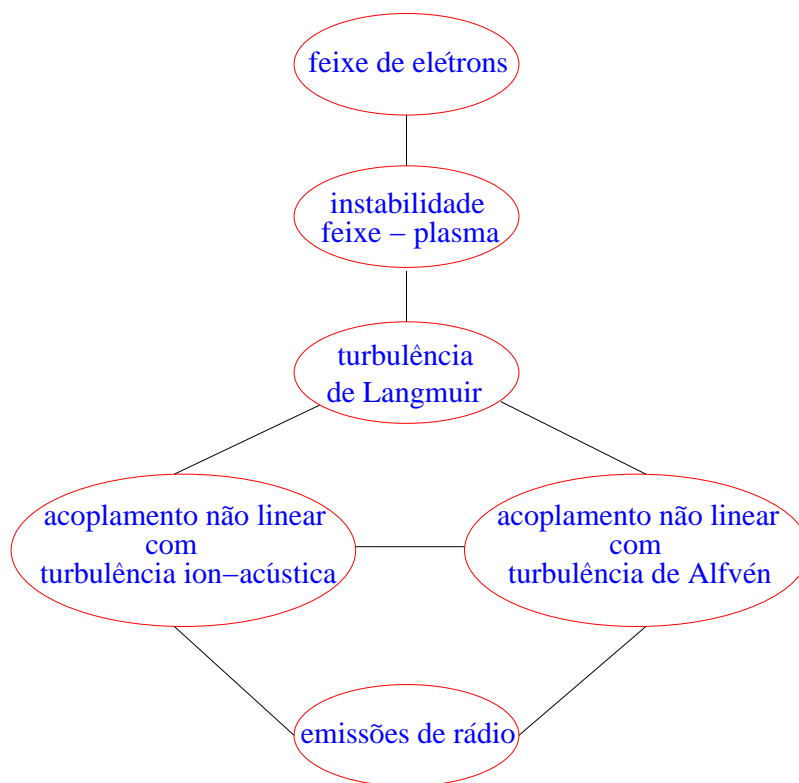
Uma grande quantidade de observações e experimentos realizados em plasmas espaciais envolvem a detecção de emissões de rádio. Algumas possíveis fontes de geração destas emissões são apresentadas na Figura 3.1, que esquematiza os processos que levam a interações onda-onda, e geração de emissões eletromagnéticas detectadas nos dados observacionais. A injeção de um feixe de elétrons num plasma magnetizado gera instabilidades de tipo feixe-plasma, ou dois feixes, que levam à excitação de oscilações eletrônicas na frequência do plasma (ondas de Langmuir) as quais, enquanto se propagam pelo plasma, podem acoplar-se com oscilações na densidade dos íons (ondas ion-acústicas) para gerar emissões de rádio (ondas eletromagnéticas). Da mesma forma, as ondas de Langmuir podem acoplar-se com turbulências no campo magnético (ondas de Alfvén) para a geração de ondas eletromagnéticas.

Nas próximas seções serão apresentadas evidências observacionais de interações onda-onda em três regiões do espaço interplanetário: na coroa solar, no vento solar e na magnetopausa terrestre.

#### 3.2 Emissões de rádio provenientes de explosões solares

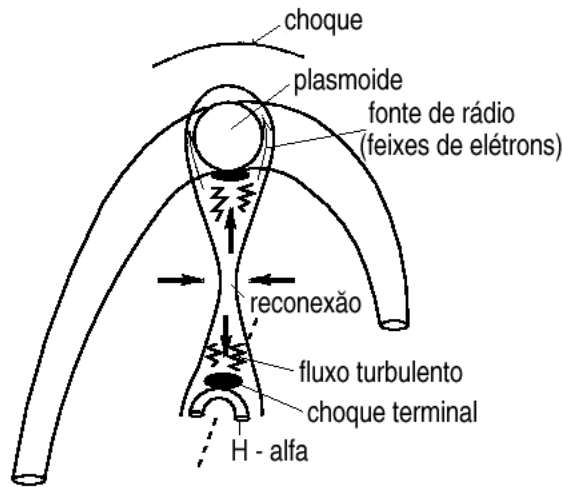
Nas regiões ativas da coroa solar podem ocorrer interações onda-onda devido à excitação de ondas de Langmuir por feixes de elétrons, acelerados pelas reconexões das linhas de campo magnético da coroa. A Figura 3.2 mostra um esquema destas reconexões, prévio a uma explosão solar, onde um feixe de elétrons propagando-se em direção à base da coroa cria uma região turbulenta que pode atuar como fonte de geração de ondas de Langmuir.

Karlický e Bárta (2004) fizeram comparações entre espectros de potências obtidos de dados observacionais, e espectros obtidos a partir de um modelo numérico, onde as equações MHD são resolvidas em duas dimensões, e os parâmetros do plasma (densidade de plasma, densidade de corrente, temperatura, etc.) são calculados na região de reconexão.



**FIGURA 3.1** - Geração de emissões de rádio através de instabilidades de feixe-plasma. Um feixe de elétrons injetado num plasma magnetizado excita ondas de Langmuir na frequência do plasma, que podem se acoplar em forma não linear com ondas ion-acústicas, ou com ondas de Alfvén, gerando ondas eletromagnéticas (instabilidades paramétricas) ou com ondas ion-acústicas e de Alfvén simultaneamente nos processos de quatro ondas, para gerar ondas eletromagnéticas (instabilidade modulacional).



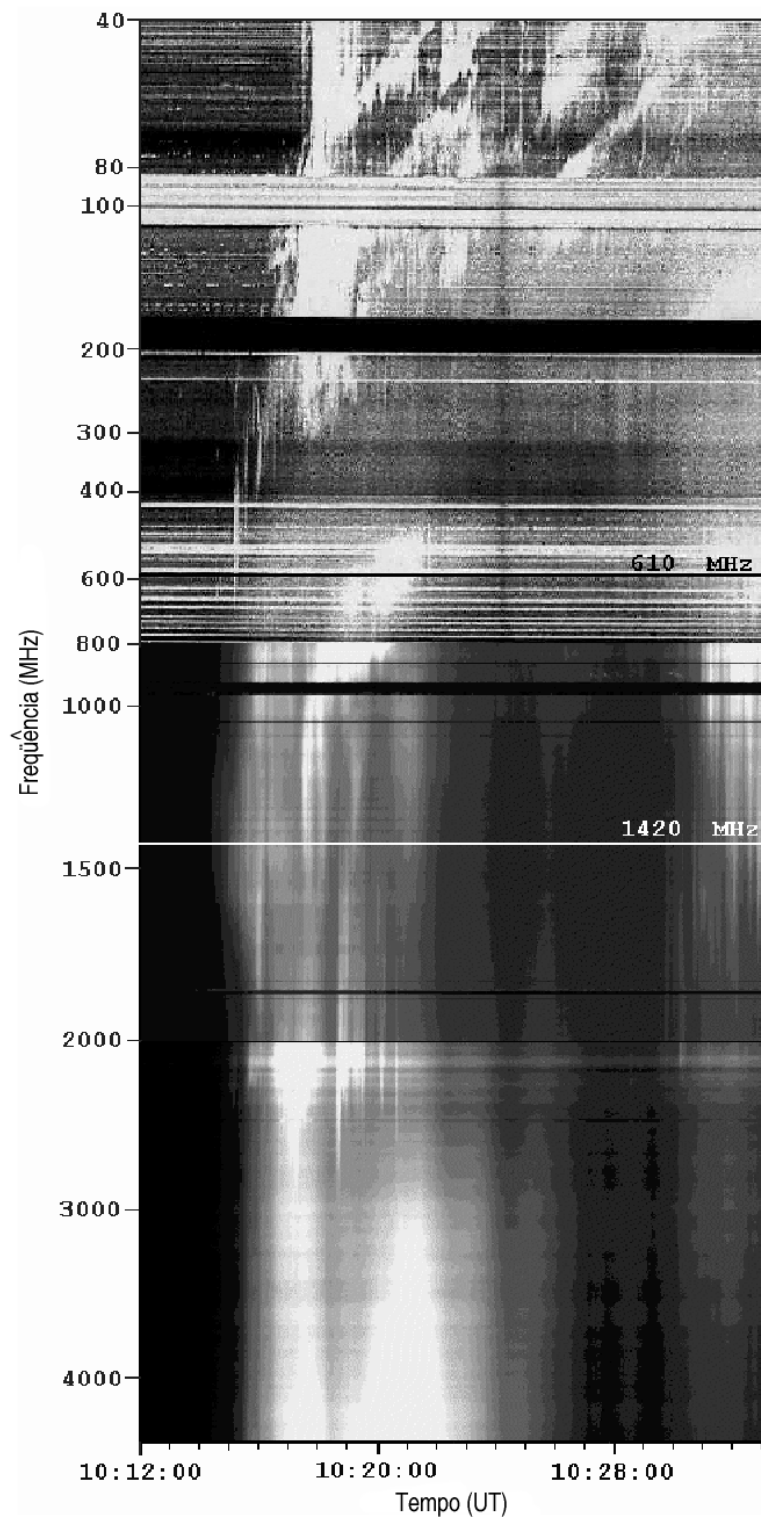


**FIGURA 3.2** - Fase inicial de uma explosão solar. O processo de reconexão de linhas de campo magnético cria uma região turbulenta embaixo do lugar da reconexão, que pode excitar ondas de Langmuir.

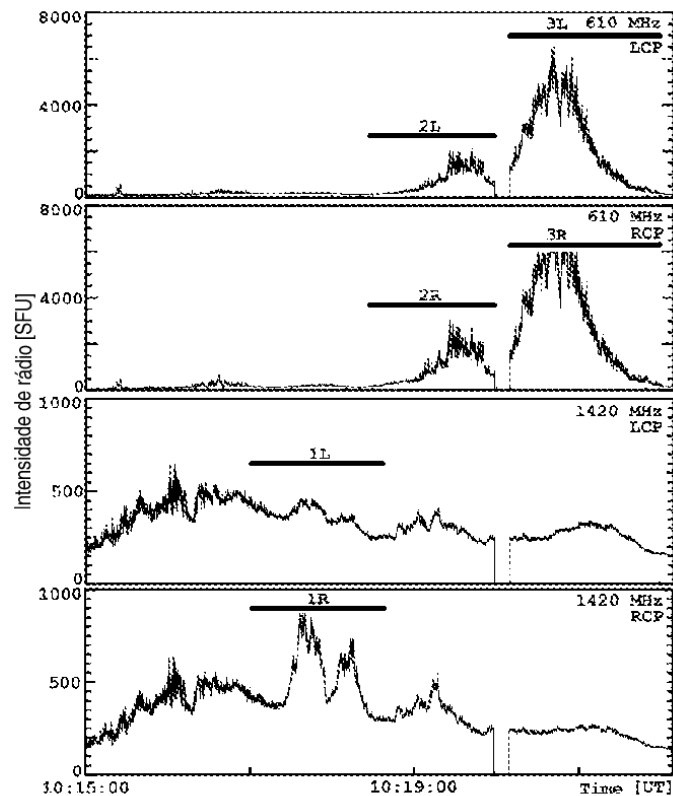
FONTE: Karlický (2004)

Os espectros observacionais (mostrados na Figura 3.5) foram obtidos a partir de um evento acontecido no dia 12 de abril de 2001, associado a uma explosão solar, e que envolve a detecção de um tipo de emissão eletromagnética denominada Estrutura Lenta Derivante (SDS, pelas siglas do inglês *Slow Drifting Structure*), as quais são detectadas no início das explosões solares e reconhecidas nos radiospectrógrafos como uma estrutura no intervalo de frequências 0.6-2.0 GHz decaindo para frequências menores. A Figura 3.3 mostra o espectro dinâmico (frequência em função do tempo) no intervalo 40-4500 MHz, obtido dos espectrógrafos Potsdam e Ondřejov, e a ocorrência de uma SDS entre as 10:17:20 UT e as 10:22:00 UT, no intervalo de 450-1500 MHz. Duas frequências, 610 MHz e 1420 MHz, foram registradas pelo radiopolarímetro Trieste, usando polarização circular à direita e esquerda, com uma resolução de 1 ms no intervalo 10:15:00 - 10:22:00 (Fig. 3.4). Dos dados do Trieste, foram selecionados três intervalos, marcados por 1R (1420 MHz, polarização circular à direita), 2R (610 MHz, à direita) e 3L (610 MHz, à esquerda) na Figura 3.4, dos quais obtiveram-se os espectros de potências no espaço de Fourier (Figura 3.5). Previamente, foi necessária a subtração do espectro obtido num intervalo prévio à estrutura, ou seja, o fluxo de rádio do “Sol quieto”. Estes espectros possuem uma lei de potências no intervalo 1.3 - 1.6 (índice espectral).

É interessante notar que o espectro de potências obtido nesse trabalho usando o modelo teórico apresenta uma lei de potências com índice 2. Segundo Karlický e Bárta (2004), a diferença entre os índices da lei de potências dos dois espectros



**FIGURA 3.3** - Espectro dinâmico observado durante o evento do dia 12 de Abril de 2001, pelos radioespectrógrafos Potsdam e Ondřejov. A estrutura lenta derivante é observada no intervalo das 10:17:20 UT - 10:22:00 UT, e no intervalo de frequências 450 - 1500 MHz. A estrutura entre 40-300 MHz corresponde a uma emissão de rádio tipo II. As frequências de observação do Trieste (610 e 1420 MHz) são marcadas na Figura por linhas horizontais.  
 FONTE: Karlický e Bárta (2004)



**FIGURA 3.4** - Dados obtidos pelo radiopolarímetro Trieste para o evento do 12 de Abril de 2001, nas frequências 610 MHz e 1420 MHz com polarização circular à esquerda (L) e direita (R). Os intervalos 1R, 2R e 3L usados para obter os espectros de potências observacionais estão marcados na Figura.

FONTE: Karlický e Bárta (2004)

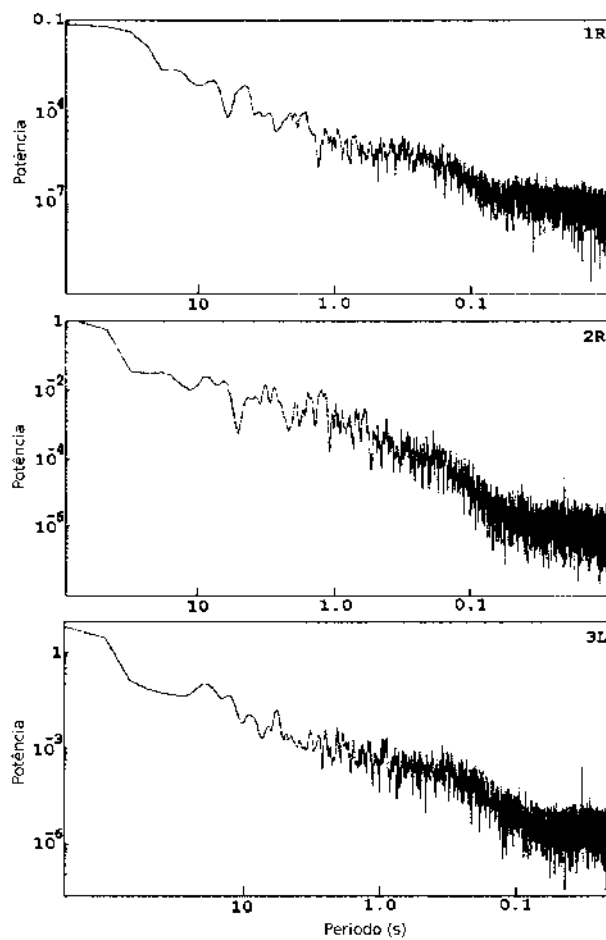
pode-se dever a processos não lineares, como por exemplo a geração de ondas de plasmas e sua conversão em ondas eletromagnéticas, e estabelece um limite para estes processos.

### 3.3 Observações de interações onda-onda no vento solar

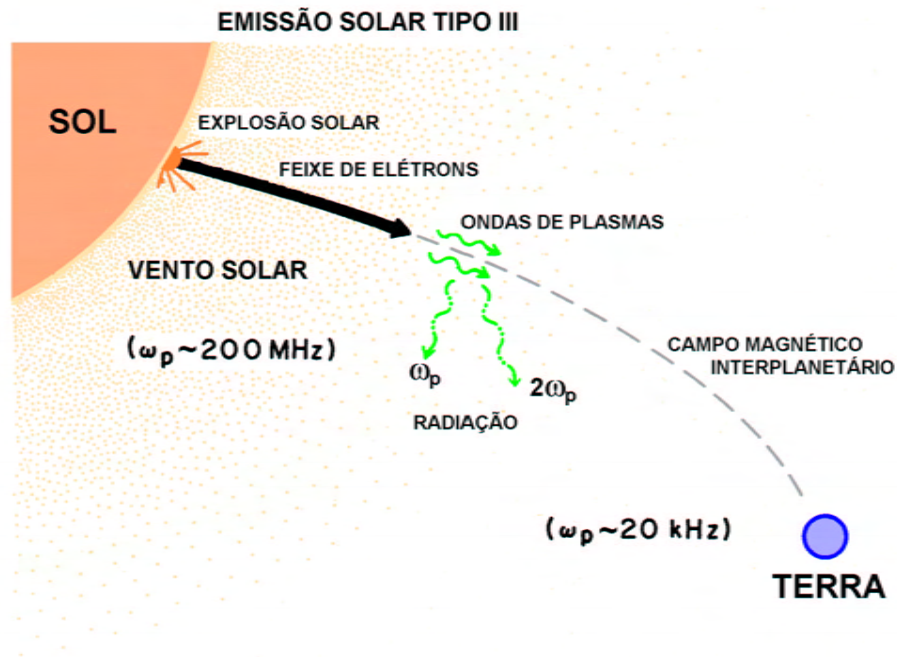
Tem sido feitas observações de distintos tipos de ondas de plasmas em várias regiões do espaço interplanetário, onde a maioria dos dados provém da sonda Ulysses, e foram coletados numa ampla gama de distâncias ao Sol, e de latitudes heliosféricas.

#### 3.3.1 Observações durante eventos solares de tipo III

Atualmente, a teoria mais aceita para a geração de ondas de rádio solares do tipo III no meio interplanetário é a conversão de ondas de Langmuir para ondas eletromagnéticas via interação com ondas de baixa frequência. O processo é esquematizado



**FIGURA 3.5** - Espectros de potência observacionais obtidos das emissões de rádio do evento no dia 12 de Abril de 2001.  
 FONTE: Adaptada de Karlický e Bárta (2004)



**FIGURA 3.6** - Representação esquemática da geração de ondas de Langmuir e emissão de rádio de tipo III no meio interplanetário a partir de um feixe de elétrons devido a uma explosão solar.  
 FONTE: Adaptada de Goldman (1984)

na Figura 3.6, onde um feixe de elétrons é inicialmente acelerado devido a uma explosão solar. As ondas de Langmuir são amplificadas à frequência do plasma devido à interação entre o feixe e o plasma e decaem em ondas eletromagnéticas parcial ou totalmente, através de interações onda-onda e/ou onda-partícula. A frequência destas ondas eletromagnéticas decai com a distância ao Sol, já que a densidade do plasma diminui.

Kellogg *et al.* (1992) reportaram um evento acontecido no dia 14 de Julho de 1991 (fig 3.7), a uma distância de 3.61 UA do Sol, e perto do plano da eclíptica, a partir dos dados obtidos pela sonda Ulysses. O evento iniciou-se às 11:00 horas UT, com a ocorrência de ondas de Langmuir na frequência de plasma (painel de acima) junto com perturbações nos sinais da componente do campo magnético  $B_y$  numa frequência de 9.3 Hz, do campo elétrico  $E_x$  na mesma frequência e novamente do  $B_y$  à 5.33 Hz (painéis de cima para baixo). Estas perturbações estendem-se para frequências mais baixas, mas o ruído na sinal do campo elétrico é grande demais. As ondas

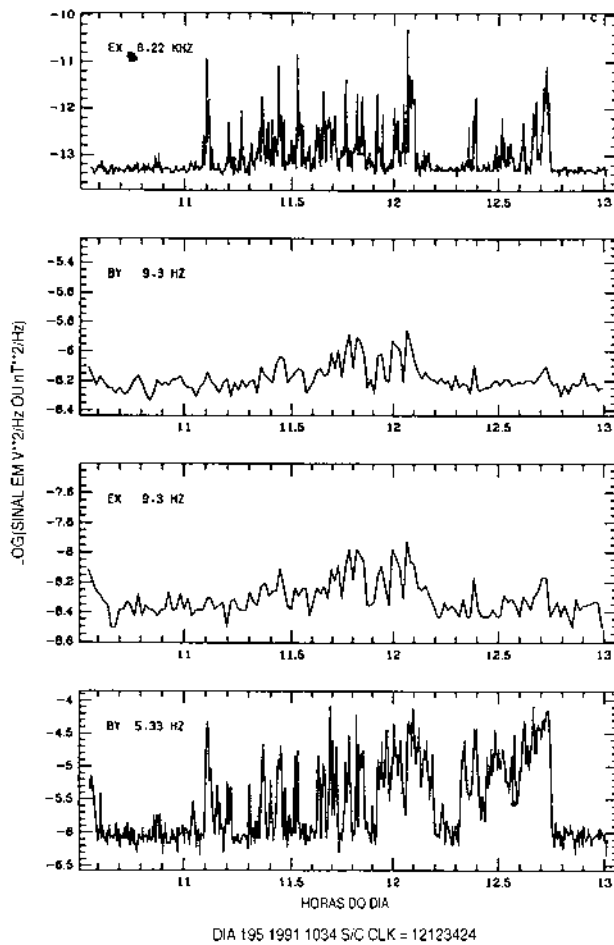
de Langmuir teriam a sua origem numa emissão solar de tipo III acontecida às 03:45 UT no lado do Sol oposto à sonda Ulysses, considerando a rotação do Sol e a propagação do vento solar de acordo com o modelo da espiral de Arquímedes. Kellogg *et al.* (1992) estabelecem que a origem das ondas eletromagnéticas de baixa frequência (no modo whistler) seriam processos não lineares envolvendo as ondas de Langmuir, sendo um deles o decaimento das ondas de Langmuir numa onda whistler e uma outra onda eletromagnética.

### 3.3.2 Observações em buracos magnéticos

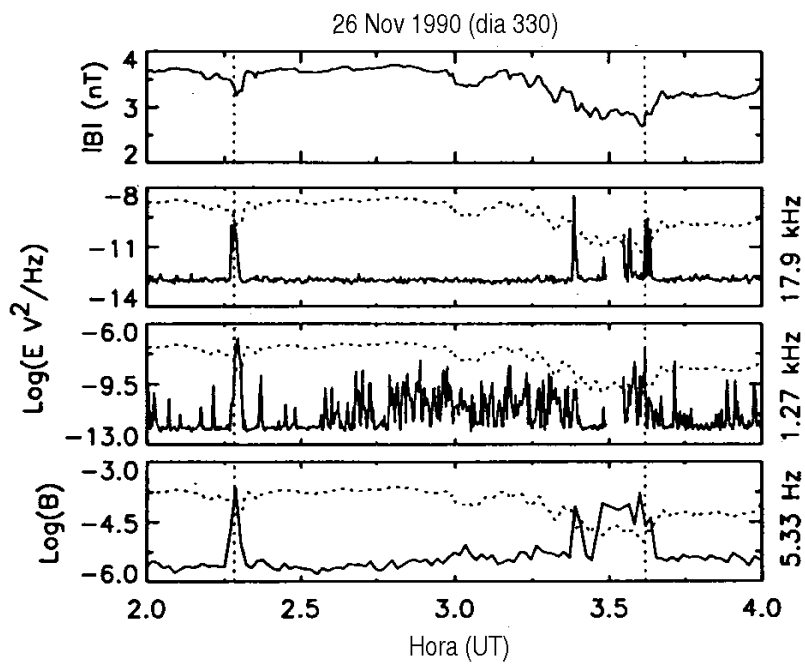
Outra situação onde tem sido detectados distintos tipos de ondas de plasma no vento solar é dentro dos buracos magnéticos, que são quedas repentinas do campo magnético interplanetário, seja na sua magnitude ou apenas numa componente. A Figura 3.8 mostra a ocorrência de um buraco magnético nos dados da sonda Ulysses numa distância de 1.2 UA, perto do plano da eclíptica (painel de acima) no dia 26 de novembro de 1990, e associada com ondas de Langmuir (17.9 kHz, levando em conta que a densidade do plasma é de 2.5 - 3.0/c.c., obtendo a frequência do plasma  $\omega_{pe} \approx 14 - 16$  kHz), ondas ion-acústicas cujas frequências foram aumentadas devido ao efeito Doppler entre o vento solar e a sonda deslocando-se em sentido contrário ( $\approx 1.27$  kHz), e ondas eletromagnéticas de baixa frequência em modo whistler ( $< 10$  Hz).

O mecanismo de excitação de ondas de Langmuir dentro de buracos magnéticos ainda não está completamente entendido. Pode ser que as ondas de Langmuir detectadas pela Ulysses dentro destes buracos magnéticos teriam a sua origem em elétrons fluindo do Sol. Mas, o fato é que os estouros nos sinais acontecem apenas dentro dos buracos, onde as condições do plasma mantem-se quase iguais durante algumas horas até que a sonda saia do buraco. Logo, o mecanismo de excitação das ondas de Langmuir deve ter a sua origem no interior do buraco magnético (MACDOWALL *et al.*, 2001; MACDOWALL *et al.*, 2003).

Lin *et al.* (1995) reportaram um aumento no número de buracos magnéticos detectados pela Ulysses quando esta alcançou latitudes perto do pólo sul heliosférico. A Figura 3.9 mostra os dados coletados pela sonda quando encontrava-se a uma distancia de 2.29 UA do Sol, e numa latitude heliosférica de  $-80.2^\circ$  no dia 14 de setembro de 1994. Novamente, é possível observar estouros nos dados cada vez que um buraco é detectado, correspondentes a ondas de Langmuir (9.31 e 7.16 kHz), on-

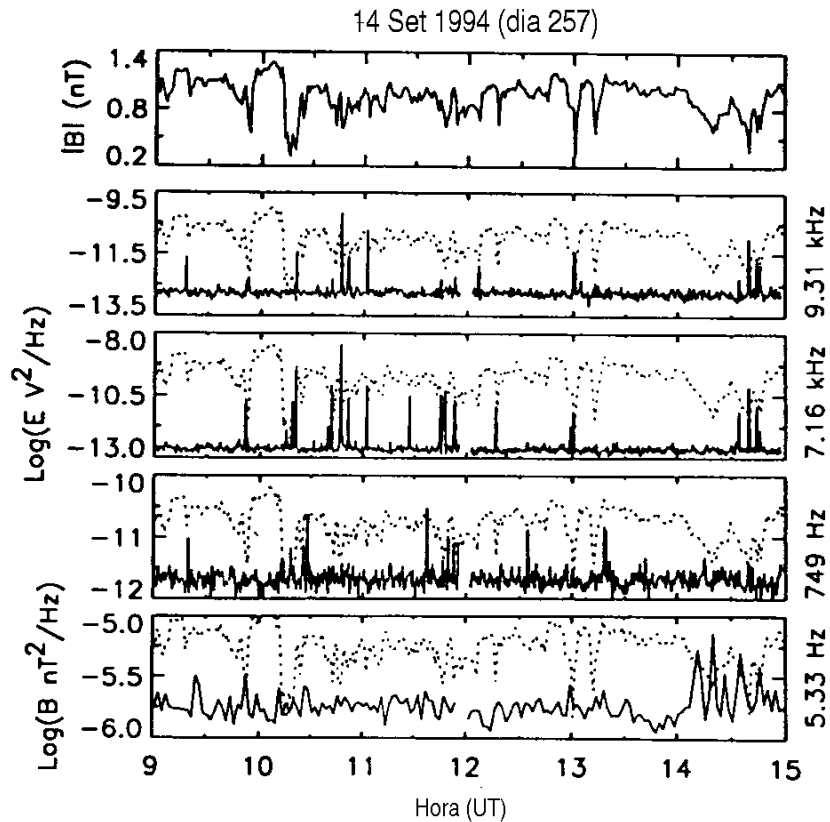


**FIGURA 3.7** - Observações de ondas de Langmuir e ondas whistler detectadas pela sonda Ulysses durante o evento de tipo III no dia 14 de Julho de 1991. O painel de acima mostra a componente do campo elétrico  $E_x$  na frequência do plasma ( $\omega_{pe}$ ), os dois painéis no centro mostram  $B_y$  e  $E_x$  em 9.3 Hz ( $\ll \omega_{pe}$ ) e o painel de embaixo  $B_y$  em 5.3 Hz. FONTE: Kellogg *et al.* (1992)



**FIGURA 3.8** - Observação de ondas nas regiões dos buracos magnéticos no vento solar pela sonda Ulysses perto do plano eclíptico, no dia 26 de Novembro de 1990. O painel de cima mostra a magnitude do campo magnético. Os dois painéis do centro mostram o campo elétrico em duas frequências: 17.9 MHz  $\approx \omega_{pe}$  apresentando ondas de Langmuir, 1.27 kHz, possivelmente ondas ion-acústicas, e o campo magnético em 5.33 Hz, que apresenta ondas no modo whistler. O gráfico da magnitude do campo magnético (primeiro painel) foi sobreposto nos outros painéis, e a ocorrência de buracos magnéticos foram marcadas com linhas verticais tracejadas.  
 FONTE: Lin *et al.* (1995)





**FIGURA 3.9** - Observação de ondas de Langmuir, ion-acústicas e eletromagnéticas em buracos magnéticos em altas latitudes heliosféricas ( $-80.2^\circ$ ), para o dia 14 de Setembro de 1994. O painel de acima mostra a magnitude do campo magnético. Os seguintes três painéis mostram o campo elétrico em 9.31 e 7.16 kHz (perto da frequência do plasma  $\omega_{pe} \approx 6-10$  kHz) e 749 Hz, frequência típica de ondas ion-acústicas levando em conta o efeito Doppler. O último painel mostra o campo magnético em 5.33 Hz.  
 FONTE: Lin *et al.* (1995)

das ion-acústicas (749 Hz) e ondas whistler (5.33 Hz). Tanto as ondas ion-acústicas como as ondas em modo whistler são afetadas pelo efeito Doppler, devido o vento solar se propagar em direção contrária ao movimento da sonda. Para frequências mais baixas, as ondas também são observadas fora dos buracos magnéticos, porém, a atividade delas aumenta dentro dos buracos.

### 3.4 Observações de interações onda-onda na magnetosfera terrestre

#### 3.4.1 Observações durante eventos LAW aurorais

Uma das mais claras observações da ocorrência simultânea de três distintos tipos de ondas em plasmas espaciais foi feita por Boehm *et al.* (1990), que usando ins-

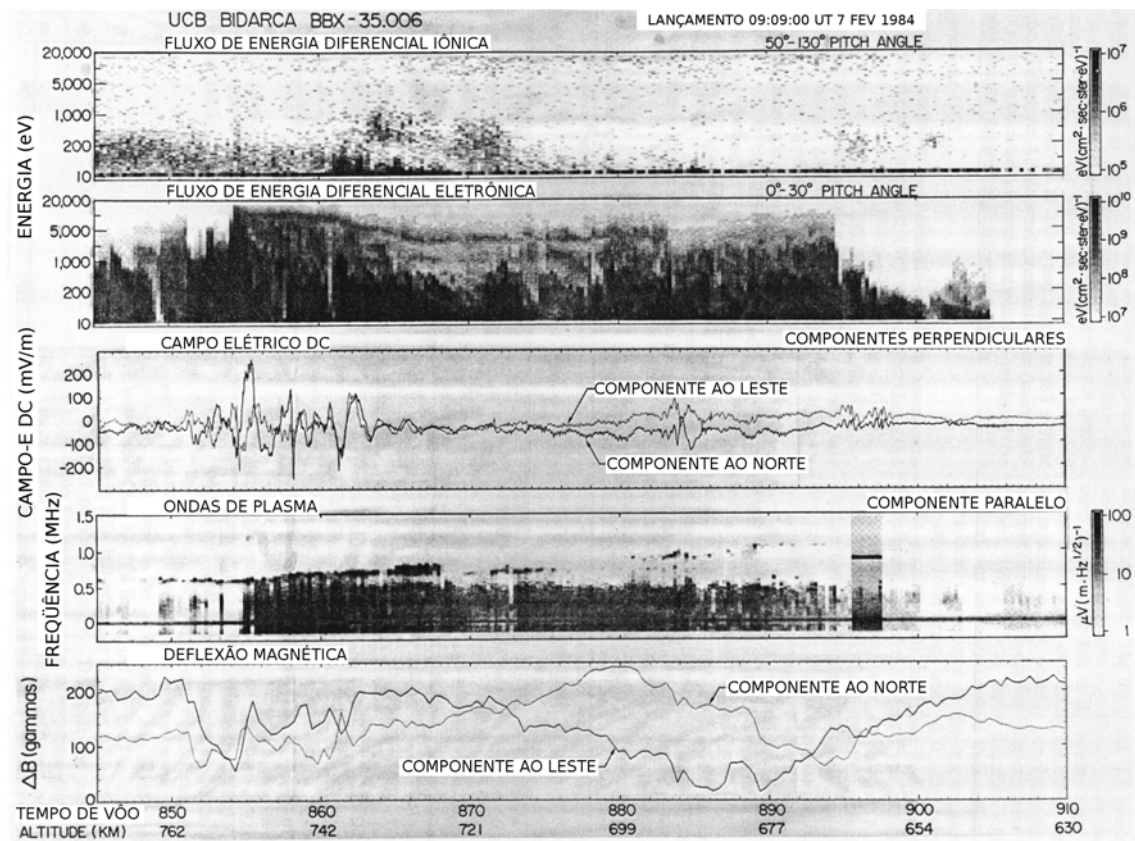
trumentos em foguetes na região auroral no hemisfério norte detectou a presença de ondas de Langmuir, whistler e Shear Alfvén. A Figura 3.10 mostra uma seleção dos resultados obtidos num dos dois experimentos levado a cabo no Alaska no dia 7 de fevereiro de 1984, na zona auroral pré-meia noite, onde o foguete alcançou uma altura máxima de 1040 km., e obtiveram-se o espectro de frequências no intervalo de 0-2 MHz em função do tempo de voo (por sua vez, associado com a altitude do foguete). A ocorrência de ondas de Langmuir está representada pela linha de emissão quase horizontal, no quarto painel, que flutua entre 0.7-1.0 MHz. Entre 855-900s observa-se a ocorrência de ondas whistler de banda larga, estendendo-se até a frequência do plasma, no mesmo painel. O painel de baixo mostra os desvios do campo magnético obtido a partir dos dados do magnetômetro no foguete, e que representam ondas de Alfvén.

Um experimento muito parecido foi feito na Groenlândia, em 1985, descrito no mesmo artigo (BOEHM *et al.*, 1990), onde o foguete foi lançado numa trajetória dirigida em direção ao leste magnético, se estendendo desde aproximadamente 7:30 hora local magnética, ao meiodia magnético. Novamente detectou-se a presença de ondas de Langmuir, whistler e Alfvén, visíveis no espectrograma e na variação do campo magnético na Figura 3.11.

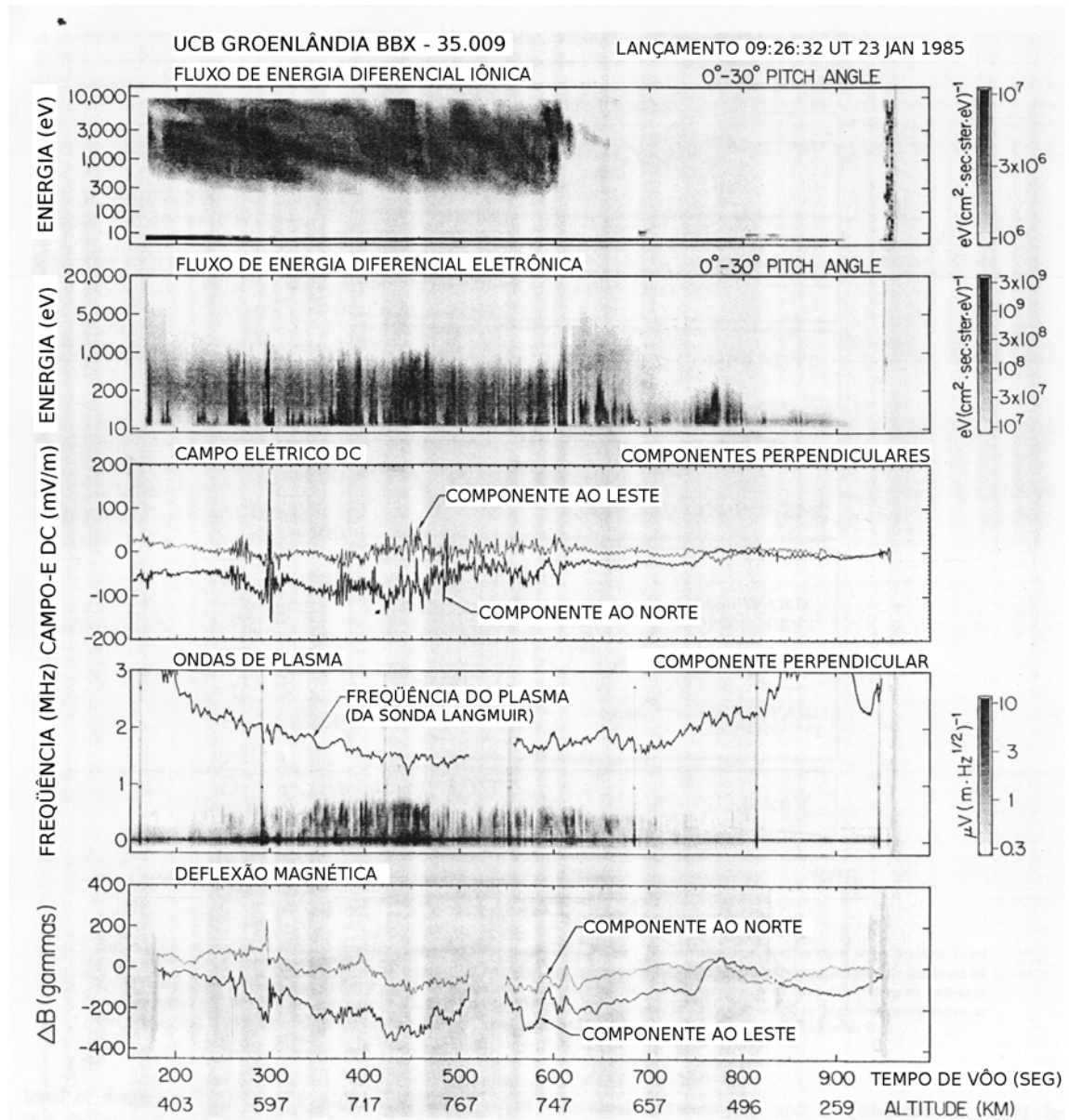
### 3.4.2 Observações durante reconexões magnéticas na magnetopausa

As Ondas de Langmuir podem ser excitadas em regiões de alta latitude geomagnética, devido à reconexões entre o campo magnético terrestre e o campo magnético do vento solar. A Figura 3.12 mostra um esquema desta reconexão, onde feixes de elétrons são gerados ao longo das separatrizes da reconexão, as quais a sua vez geram ondas de alta frequência.

A Figura 3.13 mostra observações feitas pelo conjunto de satélites CLUSTER no dia 20 de fevereiro de 2002, e que relacionam diretamente ondas de alta frequência com correntes paralelas nas separatrizes da reconexão. O painel (a) mostra a componente do campo magnético "fora do plano"  $B_M$ , e o painel (b) a corrente paralela ao campo. Note-se que os picos na corrente acontecem nas "bordas externas" da estrutura ambipolar de  $B_M$ . O painel (c) mostra a potência do campo elétrico integrado sobre um amplo intervalo de frequências que inclui a frequência do plasma  $\omega_{pe}$ . As regiões de emissões mais fortes estão correlacionadas com os picos na corrente paralela  $J_{||}$ . O último painel mostra o espectro de potências obtido dos dados do satélite C2,

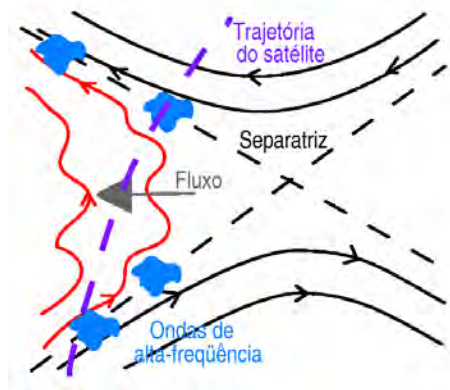


**FIGURA 3.10** - Observação simultânea de ondas de Langmuir, whistler e Shear Alfvén usando instrumentação a bordo de um foguete, lançado em Poker Flat, Alaska. Os dois primeiros painéis mostram precipitação de partículas (íons e elétrons). O terceiro painel mostra duas componentes do campo elétrico. O quarto painel mostra o espectrograma da componente paralela do campo elétrico, onde a frequência ciclotrônica dos elétrons  $\Omega_e \approx 1.2$  MHz. A emissão quase horizontal intermitente (0.7 - 1.0 MHz) são devidas a ondas de Langmuir. As emissões de mais baixa frequência representam ondas whistler. O painel final mostra a variação do campo magnético em duas componentes.  
 FONTE: Boehm *et al.* (1990)



**FIGURA 3.11** - Observação de ondas de Langmuir, whistler e Shear Alfvén similar a mostrada na Figura 3.10, desta vez realizada em Groenlândia o dia 23 de janeiro de 1985. Novamente, o primeiro painel mostra precipitação de íons, o segundo precipitação de elétrons, o terceiro o campo elétrico decomposto em duas componentes, mostrando a ocorrência de emissões whistler, e o painel final a variação do campo magnético em duas componentes.

FONTE: Boehm *et al.* (1990)

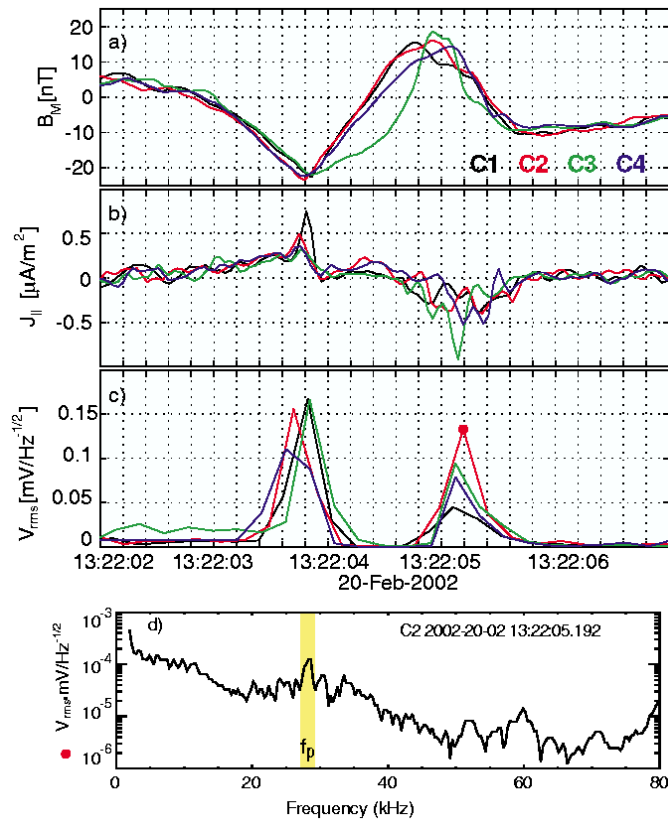


**FIGURA 3.12** - Esquema do processo de reconexão entre o campo magnético terrestre e o campo magnético interplanetário na magnetopausa, e que origina feixes de elétrons que percorrem as separatrizes da reconexão, excitando ondas de alta frequência (ondas Langmuir ou híbridas superiores).  
 FONTE: Khotyaintsev *et al.* (2004)

para a região de emissão marcada com um círculo vermelho. O espectro mostra um pico na frequência de plasma, o que indica que as ondas são ondas de Langmuir ou híbridas superiores.

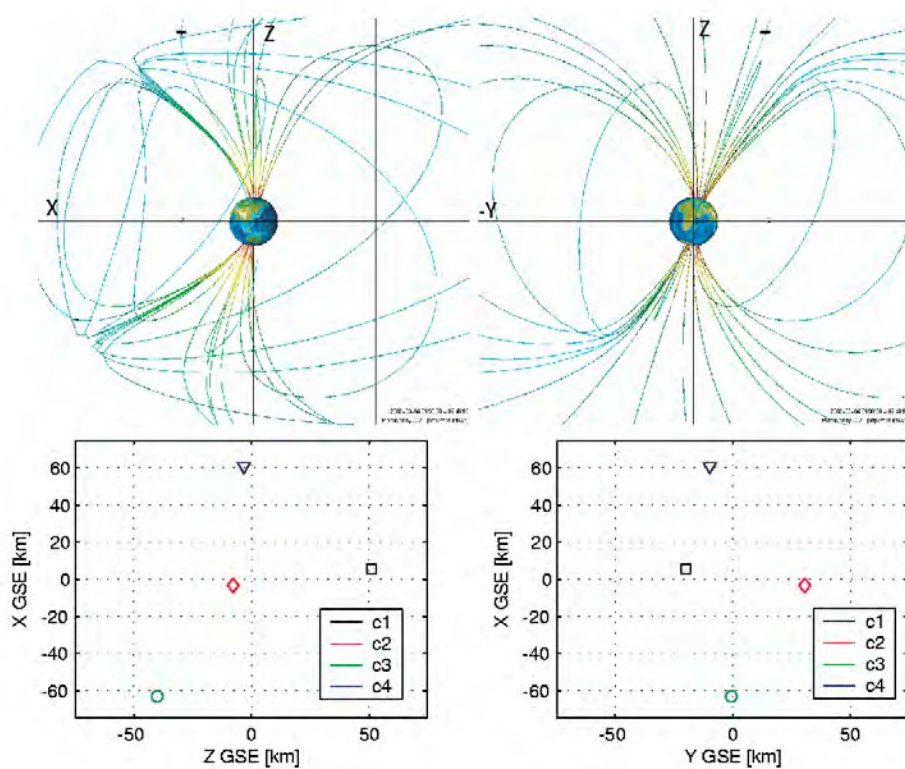
Khotyaintsev *et al.* (2004) apresentaram observações feitas pelo conjunto de satélites CLUSTER durante um dos cruzamentos da suas órbitas com a região da cúspide em altas latitudes. A localização dos satélites durante as observações é mostrada na Figura 3.14, enquanto os resultados destas observações são mostradas na Figura 3.15, onde o painel (f) mostra o espectro do campo elétrico no intervalo 2-80 kHz junto com a frequência híbrida superior (linha branca), e a Figura 3.15(g) mostra o espectro para o campo magnético no intervalo 8-4000 Hz, junto com a frequência ciclotrônica dos elétrons (linha branca). Como a frequência ciclotrônica dos elétrons é baixa ( $\Omega_e \approx 0.2 - 1.0$  kHz), a frequência híbrida superior  $\omega_{hs}$  é quase idêntica à frequência eletrônica do plasma  $\omega_{pe}$ .

O espectro da Figura 3.15 (f) mostra estouros de alta frequência, perto da frequência do plasma, que podem ser interpretados como ondas de Langmuir. Alguns desses estouros coincidem com picos espectrais na atividade eletromagnética na Figura 3.15 (g). Estas emissões podem ser identificadas com ondas whistler devido a sua polarização circular à direita (KHOTYAINITSEV *et al.*, 2004). É interessante notar o comportamento da intensidade do campo magnético mostrado no painel 3.15 (b), onde apresenta dois máximos, aproximadamente às 09:38:40 UT e às 09:42:40 UT, os quais indicam a ocorrência de eventos de transferência de fluxo (FTE, pelas siglas em

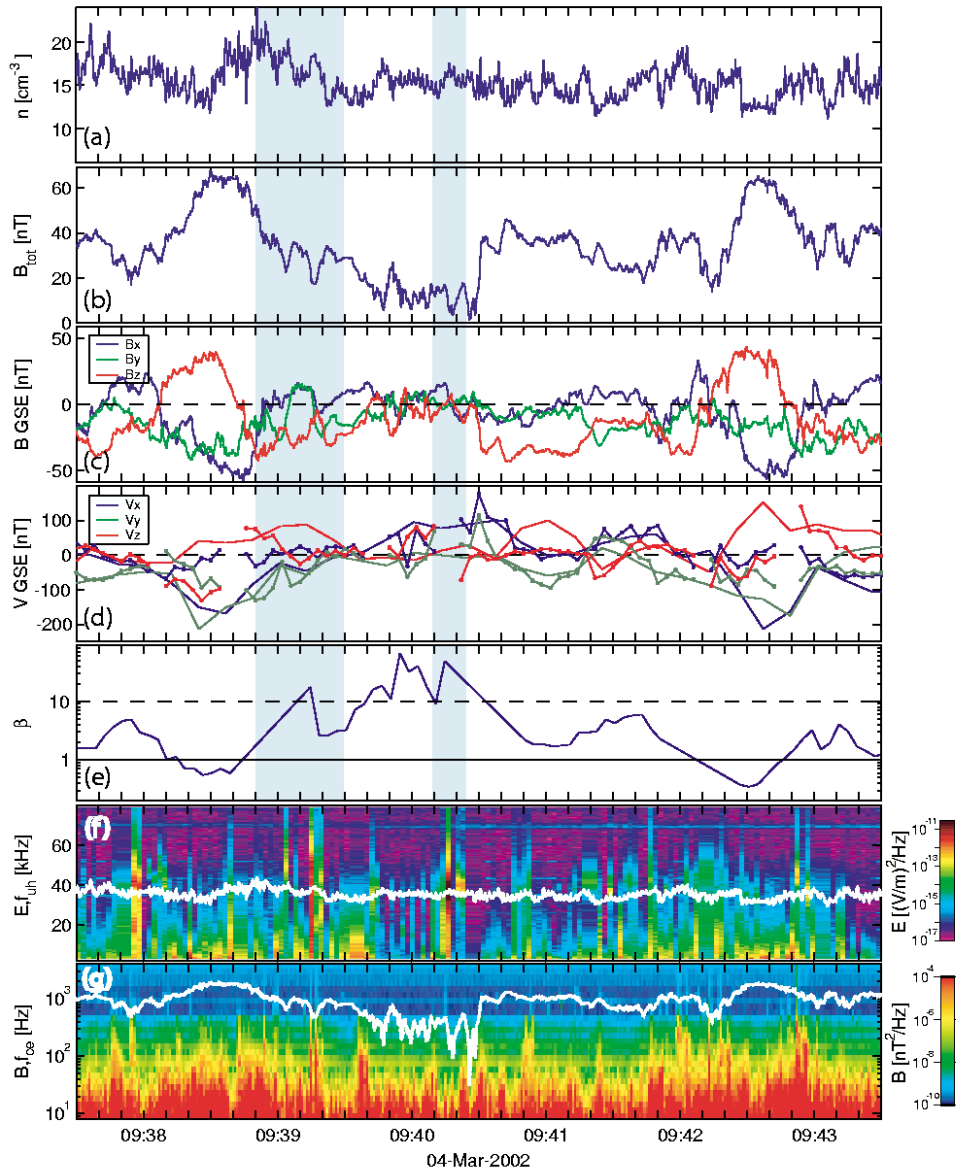


**FIGURA 3.13** - Evidência de ondas de Langmuir excitadas na região de correntes paralelas às separatrizes da reconexão. (a) Componente do campo magnético  $B_M$  "fora do plano" e a sua estrutura bipolar, (b) corrente paralela ao campo, que apresenta dois picos correlacionados com o  $B_M$ . (c) Potência do campo elétrico integrado num intervalo de frequências largo. (d) Espectro de potências calculado para o segundo pico do painel (c). O pico no espectro de potências perto da frequência do plasma  $\omega_{pe} \approx 28$  kHz (marcado como  $f_p$  na Figura) é uma indicação da existência de ondas de alta frequência (Langmuir ou híbridas superiores) e sua associação com as correntes alinhadas ao campo.

FONTE: Vaivads *et al.* (2004)



**FIGURA 3.14** - Localização do conjunto de satélites CLUSTER na magnetosfera terrestre, marcada com uma barra de cor preta, no dia 4 de Março de 2002, às 9:35 UT. Os painéis de baixo mostram as posições individuais de cada um dos quatro satélites projetadas nos planos X-Z e X-Y em coordenadas GSE.  
 FONTE: Khotyaintsev *et al.* (2004)



**FIGURA 3.15** - Observação de ondas de Langmuir e ondas whistler feita pelo satélite CLUSTER-3 na região da reconexão magnética da magnetopausa, no dia 4 de Março de 2002. (a) Densidade de plasma, (b) magnitude do campo magnético, (c) as componentes do campo, (d) velocidade do fluxo iônico medida usando dois instrumentos distintos (linhas sólidas e pontilhadas), (e) o parâmetro  $\beta$  do plasma, (f) espectro do campo elétrico no intervalo de 2-80 kHz e a frequência híbrida superior  $\omega_{uh}$  (linha branca), e (g) espectro do campo magnético no intervalo de 8-4000 Hz, junto com a frequência ciclotrônica dos elétrons  $\Omega_e$  (linha branca). A frequência híbrida superior  $\omega_{uh}$  é quase idêntica à frequência do plasma  $\omega_{pe}$ , devido a que  $\Omega_e$  é bastante menor. FONTE: Khotyaintsev *et al.* (2004)



inglês *Flux Transfer Event*) associadas com reconexões magnéticas. A forma como a reconexão é feita, e a orientação dos elementos que participam nela (por exemplo, a folha de correntes) é muito difícil de descrever (KHOTYAINITSEV *et al.*, 2004), devido a seu comportamento turbulento, e às dimensões do sistema serem menores do que a separação entre satélites.



## CAPÍTULO 4

### TEORIA DE CAOS PARA INTERAÇÃO NÃO LINEAR DE TRÊS ONDAS

#### 4.1 Modelo de três ondas quadrático

O modelo usado para o estudo da interação não linear de três ondas foi apresentado por Wersinger *et al.* (1980):

$$\dot{a}_0 = a_0 + a_1 a_2 \cos \phi \quad (4.1)$$

$$\dot{a}_1 = -\nu_1 a_1 - a_0 a_2 \cos \phi \quad (4.2)$$

$$\dot{a}_2 = -\nu_2 a_2 - a_0 a_1 \cos \phi \quad (4.3)$$

$$\dot{\phi} = -\delta + \frac{a_0^2 a_1^2 + a_0^2 a_2^2 - a_1^2 a_2^2}{a_0 a_1 a_2} \sin \phi, \quad (4.4)$$

onde  $a_0$  representa a amplitude da onda indutora,  $a_1$  a amplitude da onda induzida de alta frequência,  $a_2$  a amplitude da onda induzida de baixa frequência,  $\phi$  a defasagem entre as ondas,  $\nu$  representa a taxa de crescimento ou amortecimento das ondas (onde, para a onda indutora  $\nu_0 = 1 > 0$ , ou seja, a onda indutora é suposta linearmente instável, e para as ondas induzidas  $\nu_{1,2}$  possui um sinal negativo, ou seja, as ondas são supostas linearmente amortecidas), e  $\delta$  representa o descasamento das frequências das ondas. O conjunto de equações 4.1-4.4 representa um modelo geral de interações de três ondas que envolve os processos estudados nas seções 2.5.1-2.5.3:

$$L \rightleftharpoons W + KAW$$

$$L \rightleftharpoons l + W$$

$$L \rightleftharpoons W + A,$$

onde  $L$  representa uma onda de Langmuir,  $W$  uma onda eletromagnética em modo whistler,  $l$  uma onda eletromagnética circularmente polarizada à esquerda,  $A$  uma onda de Alfvén, e  $KAW$  uma onda de Alfvén cinética. A diferença com relação ao modelo de Chian *et al.* (2000) é que as taxas de amortecimento das ondas induzidas

serão supostas diferentes ( $\nu_1 \neq \nu_2$ ).

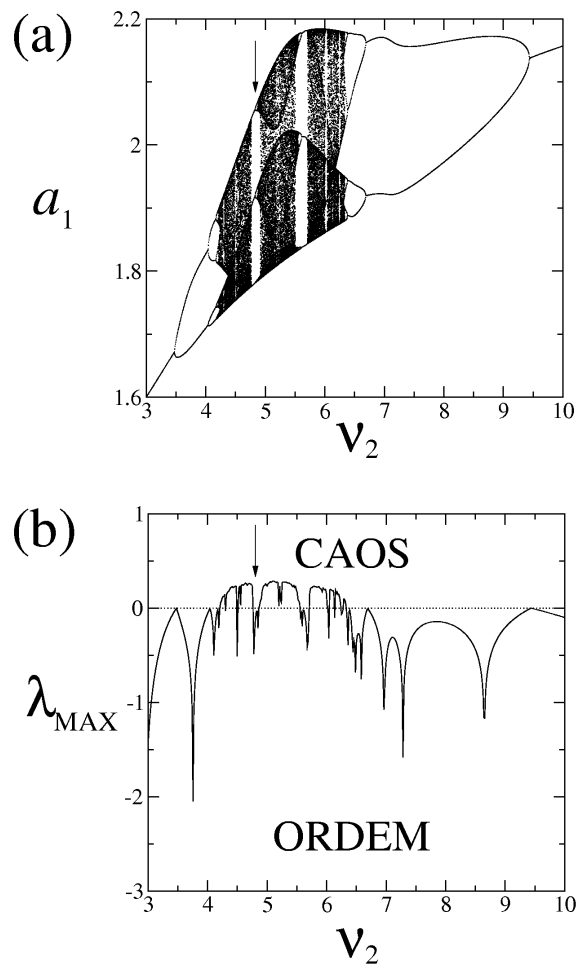
## 4.2 Diagramas de Bifurcação

Os resultados numéricos do conjunto de equações 4.1-4.4 foram obtidos fixando os parâmetros do sistema usando valores parecidos com os de Gibson *et al.* (1995), ou seja,  $\Delta = 2.0$ , e  $\nu_1 = 2.4$ , e estabelecendo  $\nu_2$  como o parâmetro de controle. O espaço de fase foi reduzido de quatro a três dimensões definindo um plano de Poincaré em  $a_2 = 1.5$ . Assim, cada vez que a órbita do sistema atravessa este plano num sentido tal que  $\dot{a}_2 > 0$ , ou seja, no sentido de esquerda para a direita no eixo  $a_2$ , o ponto de intersecção entre o dito plano e a órbita é obtido. No caso do diagrama de bifurcação mostrado na Figura 4.1, foram coletados 100 pontos de Poincaré para cada valor do parâmetro de controle, usando uma resolução de 1400 pontos no eixo do parâmetro de controle.

A Figura 4.1(a) demonstra que a dinâmica do sistema sofre mudanças dramáticas dependendo do valor do parâmetro de controle  $\nu_2$ . Por exemplo, da esquerda para a direita, temos que as órbitas convergem para um ciclo limite simples (SLC, do inglês Simple Limit Cycle), sofrendo uma bifurcação em  $\nu_2 \approx 3.5$ , onde a órbita converge para um ciclo de período dois, e logo para um ciclo de período 4 ( $\nu_2 \approx 4.1$ ), evoluindo até atingir o regime caótico ( $\nu_2 \approx 4.22$ ) onde o período da órbita tende para o infinito. Eventualmente, o sistema deixa o comportamento caótico e volta ao regime periódico ( $\nu_2 \approx 6.33$ ).

Uma forma de conferir se o sistema encontra-se num regime caótico ou periódico (ordenado) é através do cálculo dos expoentes de Lyapunov, que são uma média da separação entre duas órbitas arbitrariamente próximas (ALLIGOOD *et al.*, 1996; WOLF *et al.*, 1985), onde a média é calculada para uma série temporal longa, (ou seja, com  $t \rightarrow \infty$ ). Se o máximo expoente de Lyapunov  $\lambda_{\text{MAX}}$  (que é o logaritmo natural desta média) for positivo, as órbitas divergem, e o sistema é caótico. Se for negativo, as órbitas convergem, e o sistema segue um comportamento ordenado ou periódico. A Figura 4.1(b) mostra o valor de  $\lambda_{\text{MAX}}$  em função de  $\nu_2$ , sendo possível observar que, quando  $\lambda_{\text{MAX}} < 0$ , o sistema se encontra num estado periódico, e se  $\lambda_{\text{MAX}} > 0$ , o sistema se encontra num estado caótico.

Dentro do regime caótico existem pequenos intervalos onde a órbita interrompe brevemente o seu comportamento caótico para um periódico (e o valor de  $\lambda_{\text{MAX}}$



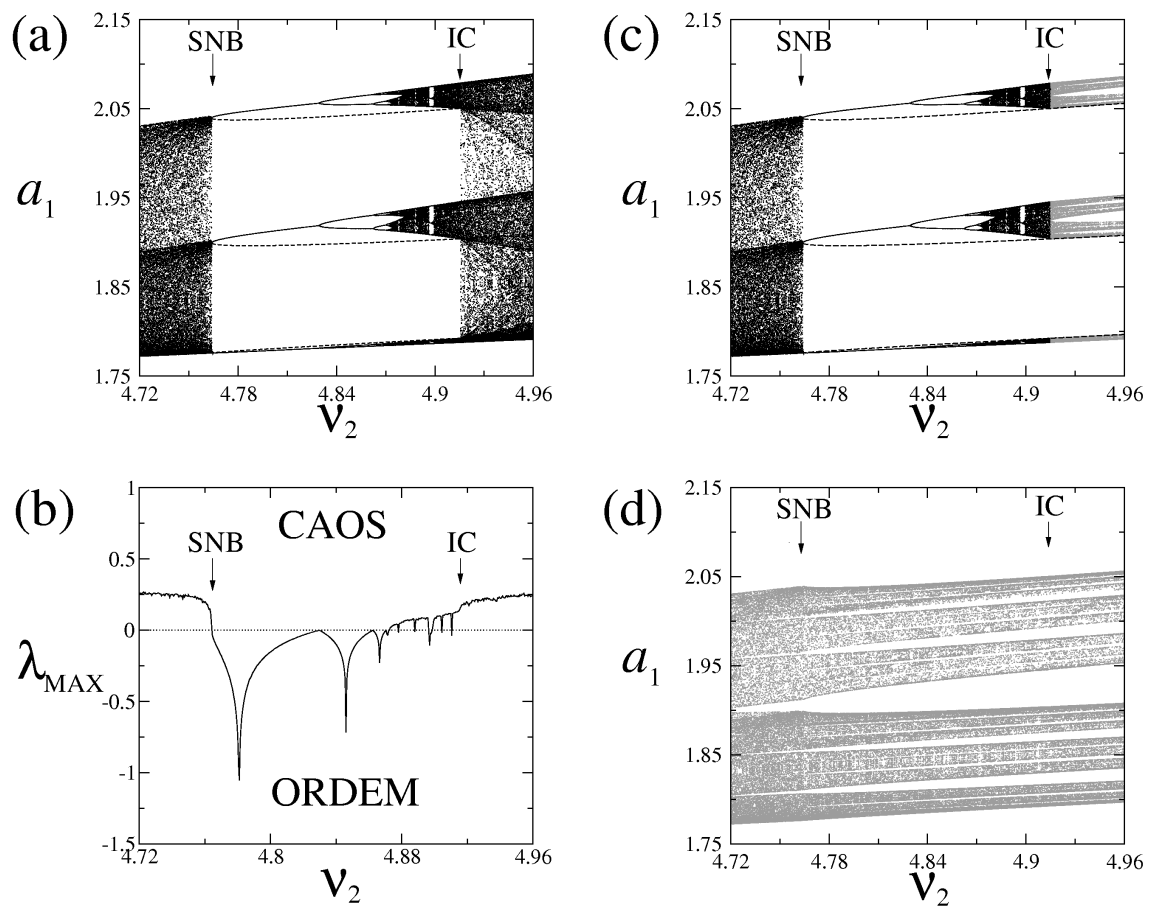
**FIGURA 4.1** - (a) Diagrama de bifurcação, mostrando a amplitude da onda induzida de alta frequência  $a_1$  para um amplo intervalo de valores para a taxa de amortecimento da onda de baixa frequência  $\nu_2$ . A seta indica a janela periódica a analisar. (b) Máximo expoente de Lyapunov  $\lambda_{MAX}$  em função da taxa de amortecimento  $\nu_2$ .

muda de positivo para negativo), chamados *janelas periódicas*. Na Figura 4.1(a) pode-se distinguir duas janelas periódicas, de período 3. Uma delas, marcada com uma seta, foi escolhida para a análise neste capítulo.

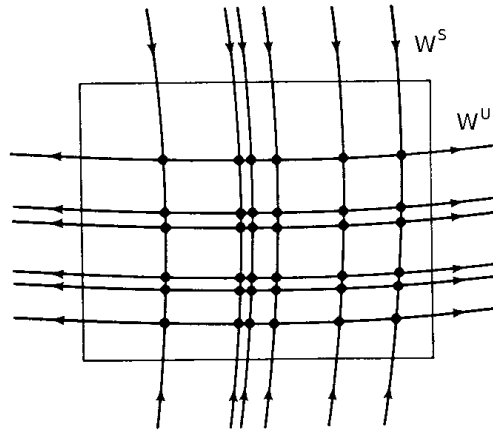
A Figura 4.2(a) mostra uma ampliação da janela periódica de período 3 escolhida, onde o atrator caótico desaparece num evento chamado *bifurcação sela-nó* em  $\nu_2 = 4.7641 \approx \nu_{\text{SNB}}$  (marcado como SNB na figura, do inglês *saddle-node bifurcation*), criando uma órbita periódica estável (linha contínua) e uma instável (linha tracejada), e dando início à janela periódica. Ao incrementar o valor do parâmetro de controle, a órbita periódica estável (SPO, do inglês *Stable Periodic Orbit*) sofre uma cascata de duplicação de período, chegando ao estado de atrator caótico fraco, adotando a forma de bandas no diagrama de bifurcação, onde o número de bandas é igual à periodicidade inicial da órbita. Este atrator caótico colide com a órbita periódica instável (UPO, do inglês *Unstable Periodic Orbit*) criada na bifurcação sela-nó, em  $\nu_2 = 4.9150 \approx \nu_{\text{IC}}$ , aumentando abruptamente de tamanho num evento conhecido como crise interior. Esta UPO responsável pela mudança no sistema recebe o nome de órbita periódica mediadora (MPO, *Mediating Periodic Orbit*).

A Figura 4.2(b) mostra o valor de  $\lambda_{\text{MAX}}$  em função do parâmetro de controle  $\nu_2$  para o mesmo intervalo da Figura 4.2(a). Os valores do máximo expoente de Lyapunov estão de acordo com o observado no diagrama de bifurcação, em termos de comportamento caótico e periódico. As mudanças abruptas do sistema, na bifurcação sela-nó e na crise interior, são refletidas na Figura 4.2(b) como descontinuidades nos valores de  $\lambda_{\text{MAX}}$ , e as bifurcações de período como os pontos onde a curva é tangente com a reta em  $\lambda_{\text{MAX}} = 0$  (linha tracejada).

As selas caóticas são conjuntos caóticos não atrativos de importância fundamental na caracterização da dinâmica dos sistemas não lineares, ao serem responsáveis pelo comportamento das órbitas transientes (HSU *et al.*, 1988; REMPEL *et al.*, 2004). São formadas por um conjunto caótico de pontos de sela, onde cada uma delas possui uma variedade estável (ou seja, uma curva que, no limite linear, atrai as órbitas ao ponto de sela) e uma variedade instável (ou seja, uma curva em que as órbitas afastam-se do ponto de sela no limite linear), como foi mostrado na Figura 2.5(b). A Figura 4.3 mostra um esquema de uma sela caótica, e suas variedades estável e instável. As variedades estáveis e instáveis da sela caótica são compostas pelas respectivas variedades dos pontos de sela que a compõem, e possuem estrutura fractal semelhante a um conjunto de Cantor (NUSSE; YORKE, 1989).



**FIGURA 4.2** - (a) Diagrama de bifurcação mostrando a janela periódica de período 3, indicada com uma seta na Figura 4.1(a). SNB indica a bifurcação sela-nó, e IC indica a crise interior. As linhas tracejadas representam a órbita instável criada na bifurcação sela-nó. (b) Máximo expoente de Lyapunov  $\lambda_{MAX}$  em função da taxa de amortecimento  $\nu_2$ . (c) A mesma janela periódica mostrando a conversão do atrator caótico em bandas (preto) para a sela caótica em bandas (cinza), na crise interior. (d) Evolução da sela caótica envolvente ao longo do diagrama de bifurcação.



**FIGURA 4.3** - Esquema representando uma sela caótica como um conjunto caótico de pontos de sela (os pontos dentro do retângulo) e as suas variedades estável ( $W^S$ ) e instável ( $W^U$ ), num espaço de fase bidimensional.

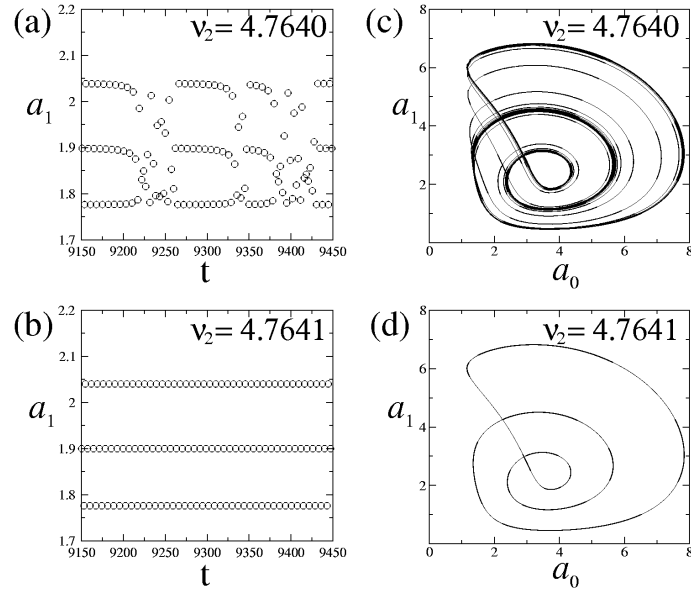
FONTE: Hsu *et al.* (1988)

Dois tipos de selas caóticas serão estudadas ao longo deste capítulo: a sela caótica em bandas, e a sela caótica envolvente, seguindo a nomenclatura proposta por Szabó *et al.* (1996). A Figura 4.2(c) mostra a sela caótica em bandas (BCS, pelas siglas do inglês *Band Chaotic Saddle*) chamada assim porque é criada a partir do atrator caótico em bandas pré-crise ( $\nu_2 < \nu_{IC}$ ), ocupando apenas a região definida por esse atrator, que é mostrado em preto à esquerda do ponto da crise. A Figura 4.2(d) mostra a sela caótica envolvente (SCS, pelas siglas *Surrounding Chaotic Saddle*), chamada assim porque reside na região intermédia entre as bandas do atrator caótico pré-crise. Dentro da janela periódica ( $\nu_{SNB} < \nu_2 < \nu_{IC}$ ) a SCS é responsável pela dinâmica das órbitas transientes, enquanto fora dela é responsável pela dinâmica dos eventos intermitentes observados em séries temporais, que serão apresentadas nas seções seguintes. Observa-se que estes conjuntos não sofrem grandes mudanças ao longo do diagrama de bifurcação (por exemplo, a sela caótica em banda é contínua para  $\nu_2 > \nu_{IC}$ , e a forma da sela envolvente muda de maneira contínua e suave em  $\nu_2 = \nu_{IC}$  e  $\nu_2 = \nu_{SNB}$ ).

### 4.3 Bifurcação sela-nó

A janela periódica tem o seu início quando um par de órbitas periódicas, uma estável (SPO) e uma instável (UPO) são criadas a partir do conjunto caótico prévio. A Figura 4.4 mostra o comportamento da série temporal representada por pontos de Poincaré (fig. 4.4(a)-(b)) e da órbita no espaço de fase (fig. 4.4(c)-(d)) antes e depois





**FIGURA 4.4** - (a) Série temporal de pontos de Poincaré, para a amplitude da onda induzida de alta frequência  $a_1$  em função do tempo, em  $\nu_2 = 4.7640 < \nu_{SNB}$ , mostrando estouros esporádicos (intermitência Pomeau-Manneville). (b) Série temporal de pontos de Poincaré, para  $a_1$  em função do tempo, em  $\nu = 4.7641 > \nu_{SNB}$ . (c) Projeção do espaço de fase no plano  $(a_0, a_1)$ , no regime caótico. (d) Projeção do espaço de fase no plano  $(a_0, a_1)$  no regime periódico.

da bifurcação, para uma pequena mudança de quatro casas decimais no parâmetro de controle. Na série temporal no regime caótico (fig. 4.4(a),  $\nu_2 = 4.7640 < \nu_{SNB}$ ) é possível apreciar a ocorrência do fenômeno de intermitência, representado por estouros esporádicos seguidos de fases laminares que se assemelham ao comportamento no regime periódico (período-3). Este tipo de intermitência é chamada de Pomeau-Manneville do tipo I (POMEAU; MANNEVILLE, 1980), e é característica da região caótica antes da bifurcação sela-nó. A série temporal mostrada na fig. 4.4(b) ( $\nu_2 = 4.7641 > \nu_{SNB}$ ) mostra uma órbita periódica de período-3. A abrupta mudança na dinâmica do sistema é refletida nos diagramas do espaço de fase (Figuras 4.4(c) e 4.4(d)), onde a projeção da órbita do sistema no plano  $(a_0, a_1)$  é apresentada.

No plano de Poincaré, estas órbitas periódicas criadas na bifurcação sela-nó serão representadas por pontos fixos. Especificamente, a SPO será representada no plano por um atrator, e a UPO será representada por um ponto de sela.

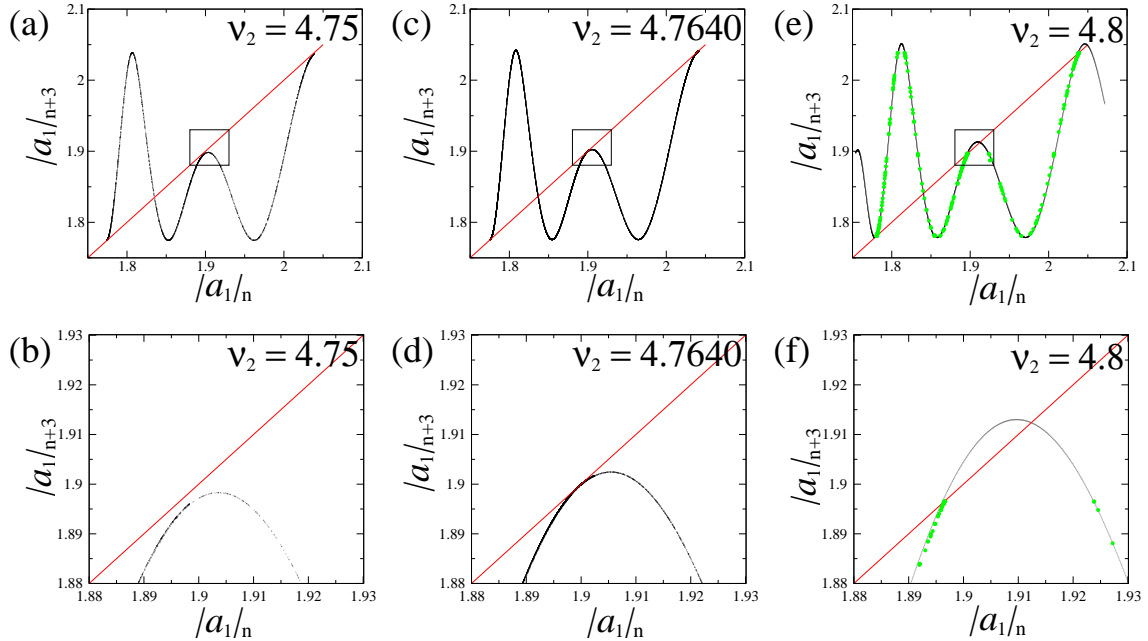
Generalizando a definição de ponto fixo dada na relação 2.4, dado um plano de

Poincaré  $P$ ,  $\bar{x}$  é ponto fixo de período  $k$  se cumpre:

$$P^k(\bar{x}) = \bar{x}, \quad (4.5)$$

onde  $P^k(\bar{x})$  representa o  $k$ -ésimo corte no plano de Poincaré do fluxo com condição inicial  $\bar{x}$ .

A Figura 4.5 mostra um tipo de diagrama chamado de *mapa de retorno*, que serve para identificar a existência de pontos fixos de um determinado período. Para isso, escolhe-se uma condição inicial, e o mapa de Poincaré é aplicado  $k$  vezes (neste caso,  $k = 3$ ). Logo são representados no gráfico a condição inicial e sua  $k$ -ésima iteração, usando uma das variáveis de estado. No caso da Figura 4.5 escolheram-se valores para  $a_1$  no intervalo  $[1.75, 2.1]$ , para  $\nu_2 = 4.75 < \nu_{\text{SNB}}$  (Fig. 4.5(a), antes da bifurcação),  $\nu_2 = 4.7640 \approx \nu_{\text{SNB}}$  (Fig. 4.5(c), pouco antes da bifurcação), e  $\nu_2 = 4.8 > \nu_{\text{SNB}}$  (Fig. 4.5(e), depois da bifurcação). Para facilitar a identificação de pontos fixos a reta  $y = x$  é mostrada. Na Figura 4.5(a) observa-se que o par de pontos fixos ainda não existe, embora a curva corte a reta em  $a_1 \approx 1.84$  num ponto que representa uma órbita instável de período 1. Na Figura 4.5(c), pouco antes da bifurcação, a curva é tangente à reta em três pontos, em cada um dos quais um par de pontos fixos estável-instável será criado. Depois da bifurcação sela-nó, é de se esperar que a curva corte a reta  $y = x$ . No caso da Figura 4.5(e), em  $\nu_2 = 4.8$ , foram plotados pontos pertencentes à sela caótica envolvente (pontos verdes), levando em conta que o atrator caótico converte-se numa sela caótica após a bifurcação sela-nó (SZABÓ *et al.*, 1996). Porém, os cruzamentos entre a curva e a reta não ficam muito claros já que a sela caótica envolvente apresenta espaços vazios ou “gaps” exatamente nas regiões onde ocorrem os cruzamentos entre a curva e a reta. Para solucionar este problema definiu-se uma grade unidimensional de condições iniciais ao longo da sela caótica, de maneira que estas condições “cubram” a sela e seus gaps. Para isto foi calculado um ajuste cúbico da sela caótica para cada uma das variáveis de estado em função de  $a_1$ . Assim, ao escolher um valor de  $a_1$  no intervalo  $[1.75, 2.1]$  é possível obter valores para as outras variáveis de estado através dos ajustes obtidos e usá-los como condições iniciais. A justificativa de utilizar um ajuste cúbico é que a aproximação da sela caótica obtida foi melhor do que a obtida usando um ajuste quadrático. O resultado desta aproximação é mostrado na Figura 4.5(e) (curva em preto), e o detalhe na Figura 4.5(f) sugere a existência dos dois pontos fixos nas interseções

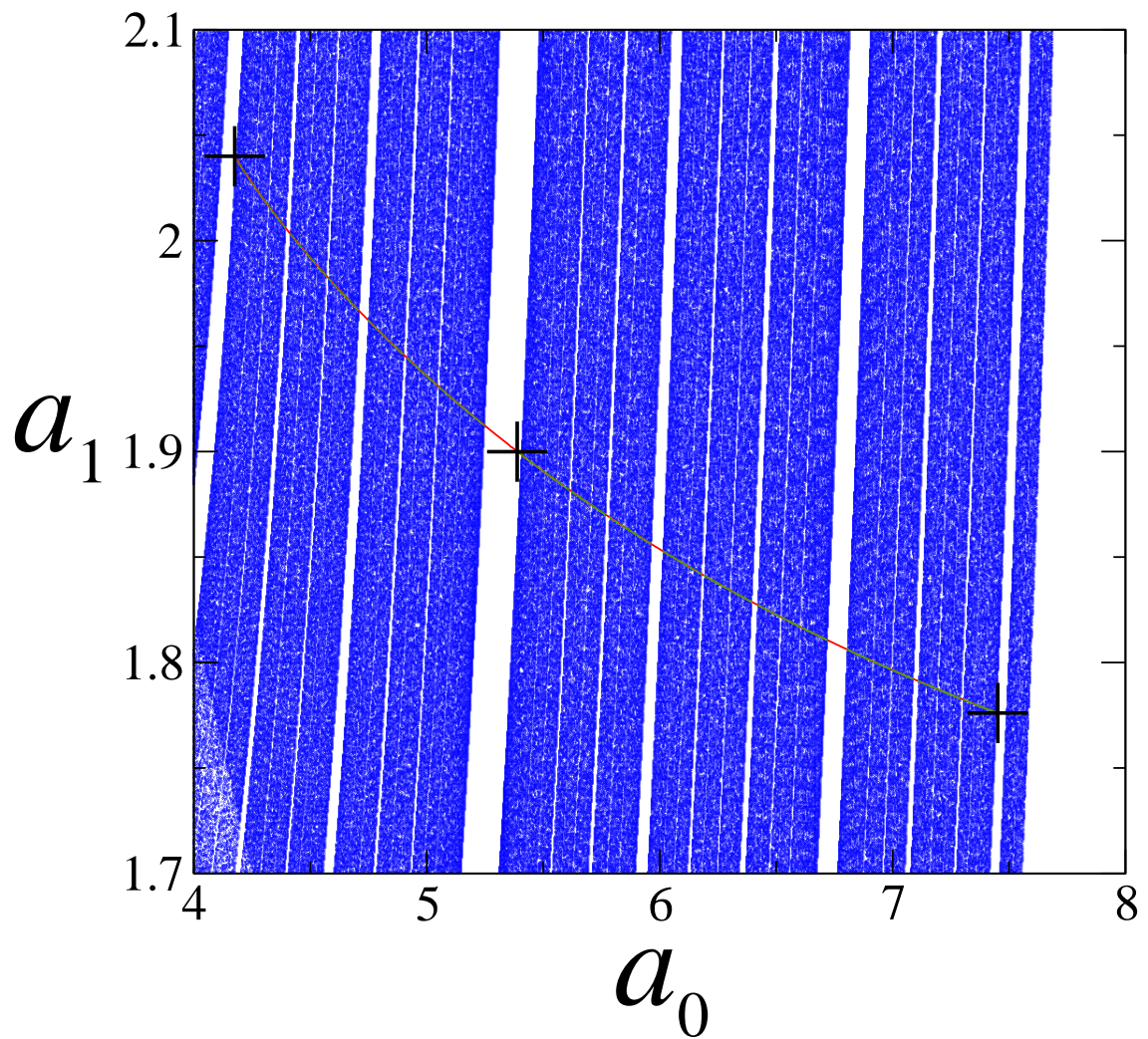


**FIGURA 4.5** - Mapas de retorno  $((a_1)_n, (a_1)_{n+3})$  para (a) uma órbita caótica em  $\nu_2 = 4.75 < \nu_{\text{SNB}}$ , e (b) o detalhe na região retangular, onde aprecia-se um espaço entre a curva e a reta  $y = x$ . (c) Uma órbita caótica em  $\nu_2 = 4.7640 \approx \nu_{\text{SNB}}$ , e (d) o detalhe num dos três pontos de tangência entre a curva e a reta  $y = x$ , um pouco antes da bifurcação sela-nó; (e) Sela caótica envolvente em  $\nu_2 = 4.8 > \nu_{\text{SNB}}$  (verde) e a curva obtida usando um ajuste cúbico (preto), onde a curva ultrapassa os três pontos de tangência com a reta  $y = x$ , criando um par de pontos fixos estável-instável nas intersecções entre a curva e a reta. (f) Detalhe da figura anterior.

entre esta curva e a reta  $y = x$ .

A Figura 4.6 mostra a sela caótica envolvente no regime periódico ( $\nu_2 = 4.7641 > \nu_{\text{SNB}}$ ) na cor verde, formada por um conjunto caótico de pontos de sela, onde cada um deles possui uma variedade estável (azul na Figura) e uma variedade instável (vermelha). A órbita periódica estável de período 3 é denotada por cruces. A sela exibe estrutura fractal na direção da sua variedade instável, seguindo a forma de um conjunto de Cantor (NUSSE; YORKE, 1989), por isto, ela apresenta buracos ou “gaps” que são refletidos na estrutura da sua variedade estável.

A sela caótica mostrada na Figura 4.6 foi calculada usando o algoritmo Sprinkler (HSU *et al.*, 1988). Para explicar o funcionamento deste algoritmo, define-se uma caixa bidimensional  $R$  no plano  $(a_0, a_1)$  que contenha a sela e nenhum atrator (Fig. 4.3). Como as selas caóticas são conjuntos não atrativos, as órbitas que tenham sua condição inicial dentro da caixa vão ser atraídas na direção da variedade estável, e logo repelidas na direção da variedade instável, eventualmente saindo da caixa,



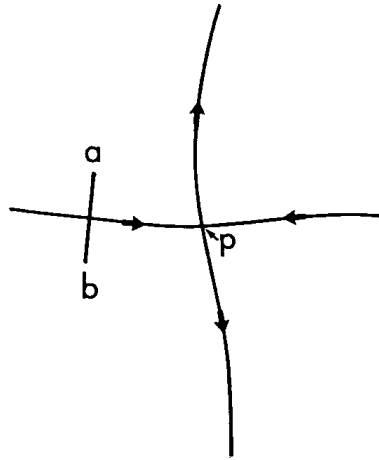
**FIGURA 4.6** - Sela caótica (verde) no espaço de fase  $(a_0, a_1)$  para  $\nu_2 = 4.7641 > \nu_{\text{SNB}}$ , e suas variedades estável (azul) e instável (vermelha). A órbita periódica de período 3 criada na bifurcação é mostrada como cruces

com exceção das órbitas que estejam (em teoria) exatamente em cima da variedade estável de um ponto de sela  $\bar{x}$  que pertence à sela caótica. Neste caso, a órbita vai convergir para o ponto  $\bar{x}$  após infinitas iterações, ou seja, vai se manter na caixa a pesar que o tempo de integração tenda ao infinito. O algoritmo Sprinkler divide a caixa numa grade bidimensional de condições iniciais, e itera cada uma delas durante um certo tempo  $t_c$ . Após este tempo, se ainda há órbitas dentro da caixa, então as condições iniciais dessas órbitas são uma aproximação da variedade estável, os pontos finais aproximam a variedade instável, e os pontos obtidos num instante  $\bar{t} = \xi t_c$  aproximam a sela caótica. O Sprinkler precisa de alguns testes para escolher o tempo  $t_c$  correto, porém geralmente usa-se a média que leva para cada uma das condições iniciais saírem da caixa, e  $\xi = 1/2$  (HSU *et al.*, 1988). Se dentro da caixa escolhida existe um atrator, deve-se redefinir a região de forma tal que o atrator seja excluído (por exemplo, pode-se “cobrir” o atrator com discos de raio pequeno, definindo esses discos como sendo regiões fora da caixa). No caso da Figura 4.6, a caixa foi definida em  $[4, 8] \times [1.7, 2.1]$ , usando uma grade de  $1000 \times 1000$  pontos, e cobrindo o atrator de período 3 com discos de raio 0.005.

Outro algoritmo utilizado para obter uma aproximação da sela caótica no espaço de fase é chamado *procedimento triple PIM* (NUSSE; YORKE, 1989). Um triple PIM (do inglês *Proper Interior Maximum*) é um conjunto de pontos  $(a, c, b)$ , onde  $(a, b)$  delimitam o segmento que corta a variedade estável da sela (no limite linear) como mostra a Figura 4.7, e  $c$  é um ponto interior. Dada uma região que contenha o triple PIM, e nenhum atrator, o ponto interior  $c$  possuirá o máximo tempo de saída, ou seja, o tempo em que uma órbita com condição inicial  $c$  sai da região definida é maior do que o tempo de saída dos pontos  $a$  e  $b$ . Definindo um intervalo inicial  $L$ , o procedimento triple PIM consiste em:

- a) Subdividir o intervalo em  $\epsilon$  partes, até achar um novo intervalo que seja suficientemente pequeno (por exemplo,  $10^{-8}$ ), e que também seja triple PIM.
- b) Iterar o intervalo, ou seja, integrar o sistema usando os pontos  $(a, b)$  como condições iniciais, registrando um desses pontos, até que o comprimento do intervalo seja maior que  $10^{-8}$ . Se for assim, repetir o passo a).

Tanto o algoritmo Sprinkler como o procedimento triple PIM podem ser usados para achar selas caóticas. O algoritmo Sprinkler possui as vantagens de ser mais simples de implementar, permite obter as variedades estável e instável da sela caótica,

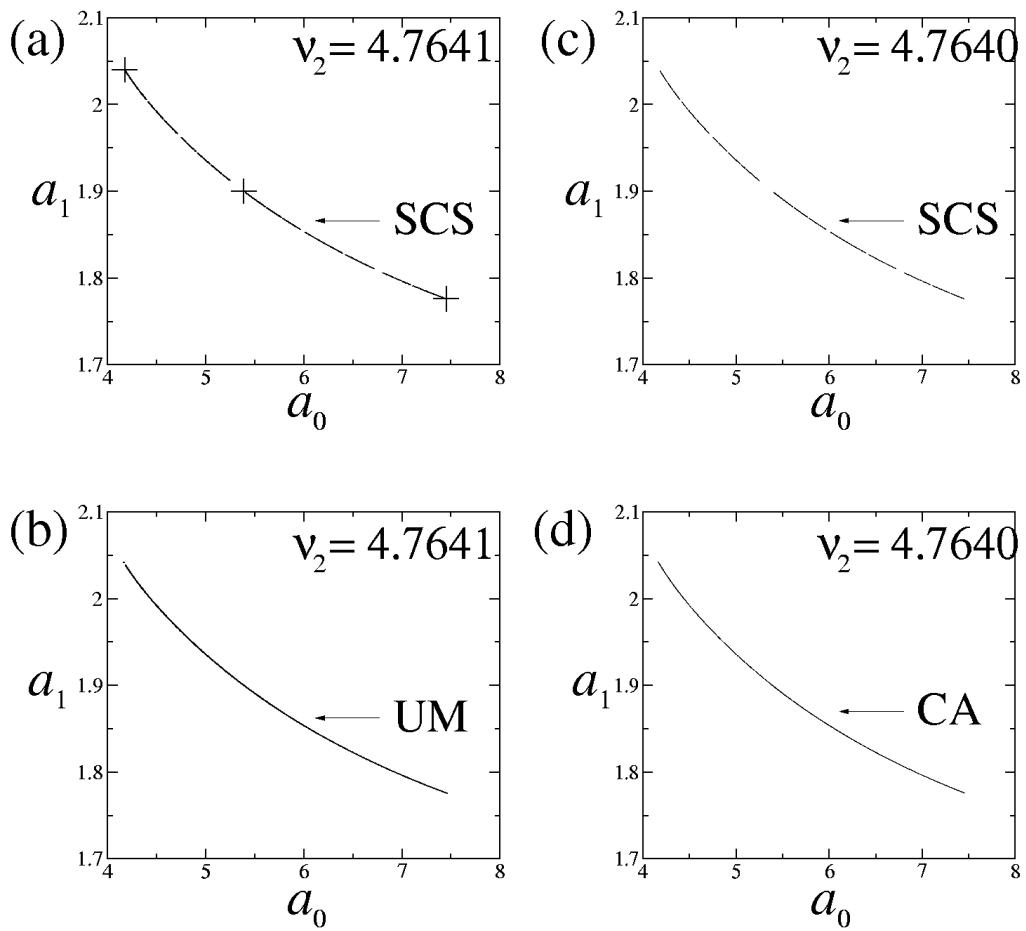


**FIGURA 4.7** - Ponto de sela  $p$  com suas variedades estável e instável, e o segmento  $(a, b)$  que corta a variedade estável  
 FONTE: Nusse e Yorke (1989)

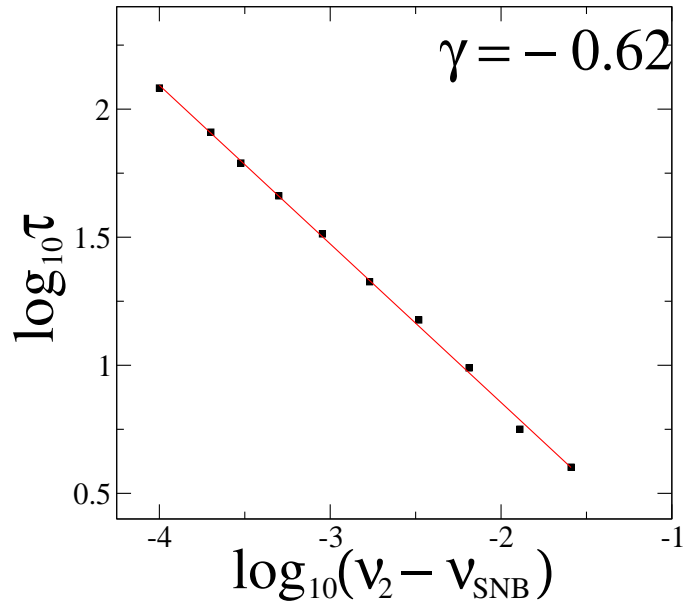
e é paralelizável, ou seja, é possível implementá-lo para sistemas de múltiplos processadores. A sua desvantagem é que precisa de algumas tentativas para obter os parâmetros corretos, por exemplo, o tempo médio de integração  $t_c$ . O procedimento triple PIM oferece uma melhor aproximação à sela caótica, porém, o algoritmo não é facilmente paralelizável.

A Figura 4.8 mostra alguns tipos de conjuntos caóticos que existem na região da bifurcação sela-nó: a sela caótica envolvente (SCS) e sua variedade instável (UM, Unstable Manifold) depois da bifurcação, e a sela caótica e o atrator caótico (CA) antes da bifurcação. As selas caóticas foram achadas usando o procedimento triple PIM. A semelhança entre as selas antes e depois da bifurcação é devida à robustez das UPOs que a formam, e a semelhança entre a variedade instável e o atrator caótico é devido ao fato de que a variedade instável representa a direção de expansão do atrator (REMPEL, 2003).

Na Figura 4.4(a) foi apresentada a ocorrência de intermitência numa série temporal representada por pontos de Poincaré. A frequência destes estouros nas séries aumenta para valores do parâmetro de controle mais afastados de  $\nu_{SNB}$  no regime caótico (ou seja, para  $\nu_2 < \nu_{SNB}$  na Figura 4.2), ou dito de outra maneira, o tempo de duração das fases laminares que são aproximadamente periódicas (representado pelo símbolo  $\tau$ ) diminui. A Figura 4.9 mostra o tempo característico das fases laminares em função da



**FIGURA 4.8** - Conjuntos invariantes na bifurcação sela-nó, projetados no espaço de fase  $(a_0, a_1)$ . (a) Sela caótica envolvente (SCS) para  $\nu_2 = 4.7641 > \nu_{SNB}$ . A órbita estável de período 3 está representada por cruces. (b) Variedade instável da sela caótica envolvente, para o mesmo valor de  $\nu_2$ . (c) Sela caótica antes da bifurcação  $\nu_2 = 4.7640 < \nu_{SNB}$ . (d) Atrator caótico antes da bifurcação.



**FIGURA 4.9** - Tempo característico  $\tau$  entre estouros (quadrados pretos) em função da “distância” entre  $\nu_2$  e  $\nu_{\text{SNB}}$  no regime caótico prévio à bifurcação sela-nó, junto com o ajuste linear (linha vermelha) com inclinação  $\gamma \approx -0.62$ , em escala logarítmica para ambos eixos

“distância” entre o valor do parâmetro de controle e do valor onde ocorre a bifurcação, em escala logarítmica para ambos eixos. Cada ponto do gráfico representa o tempo médio de duração das fases laminares obtido de uma série temporal longa. Neste gráfico apresenta-se também um ajuste linear, onde a inclinação  $\gamma \approx -0.62$ .

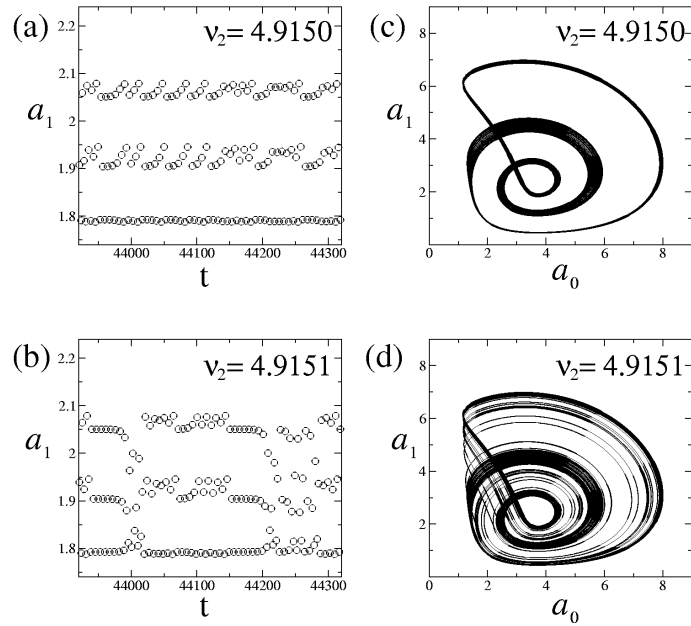
#### 4.4 Crise interior

Depois da bifurcação sela-nó, a órbita periódica estável de período 3 bifurca-se criando uma órbita de período 6, conforme aumenta o valor do parâmetro de controle na Figura 4.2. Logo bifurca-se para uma órbita de período 12, e assim diante numa cascata de duplicação de período até se transformar num atrator caótico fraco ou em bandas, chamado assim porque o valor de  $\lambda_{\text{MAX}}$  é relativamente pequeno quando comparado com o valor de  $\lambda_{\text{MAX}}$  quando  $\nu_2 > \nu_{\text{IC}}$  na Figura 4.2 (b).

Estes atratores em bandas podem apresentar outras pequenas janelas periódicas enquanto as suas larguras aumentam lentamente com o parâmetro de controle, até que uma mudança repentina acontece na dinâmica do sistema, onde o tamanho do atrator aumenta abruptamente, marcando a destruição da janela periódica. Esta mudança abrupta é chamada de *crise interior* (HILBORN, 1994).

A Figura 4.10 mostra uma seção da série temporal e o diagrama de fase antes e de-





**FIGURA 4.10** - (a) Série temporal de pontos de Poincaré, para a amplitude  $a_1$  em função do tempo, em  $\nu_2 = 4.9150 < \nu_{1C}$ . (b) Série temporal de pontos de Poincaré, para  $a_1$  em função do tempo, em  $\nu_2 = 4.9151 > \nu_{1C}$ , mostrando estouros esporádicos (intermitência induzida pela crise). (c) Projeção do espaço de fase no plano  $(a_0, a_1)$ , no cenário prévio à crise. (d) Projeção do espaço de fase no plano  $(a_0, a_1)$  após a crise.

pois da crise. Na Figura 4.10(a), antes da crise ( $\nu_2 = 4.9150 < \nu_{1C}$ ), a série temporal representada por pontos de Poincaré apresenta o comportamento caótico limitado a três regiões. Depois da crise ( $\nu_2 > \nu_{1C}$ ), a série temporal “foge” esporadicamente destas regiões criando estouros intermitentes, alternando-se com períodos “laminares” que se assemelham ao comportamento do atrator caótico pré-crise mostrado na fig. 4.10(a); este tipo de intermitência é conhecido como *intermitência induzida pela crise* (GREBOGI *et al.*, 1983). As órbitas no espaço de fase (figs. 4.10(c) e 4.10(d)) mostram que, em  $\nu_2 > \nu_{1C}$ , efetivamente a órbita escapa da região onde estava confinada na situação pré-crise.

Este aumento do tamanho do atrator caótico na crise interior ocorre devido à colisão entre o atrator caótico em bandas e a variedade estável da órbita mediadora MPO. A Figura 4.11 mostra a sela caótica (verde) e suas variedades estáveis (azul) e instáveis (vermelha); a MPO de período 3 (cruzes) e o atrator caótico fraco em preto, em  $\nu_2 = 4.9150 < \nu_{1C}$ . A Figura 4.12 mostra o detalhe desta colisão em cada uma das bandas, onde o atrator caótico toca a variedade estável da MPO (representada pelo contorno da variedade estável da sela caótica), marcada como SM (*Stable Manifold*), e que define a separação entre as regiões de banda (BR) e região envolvente (SR)

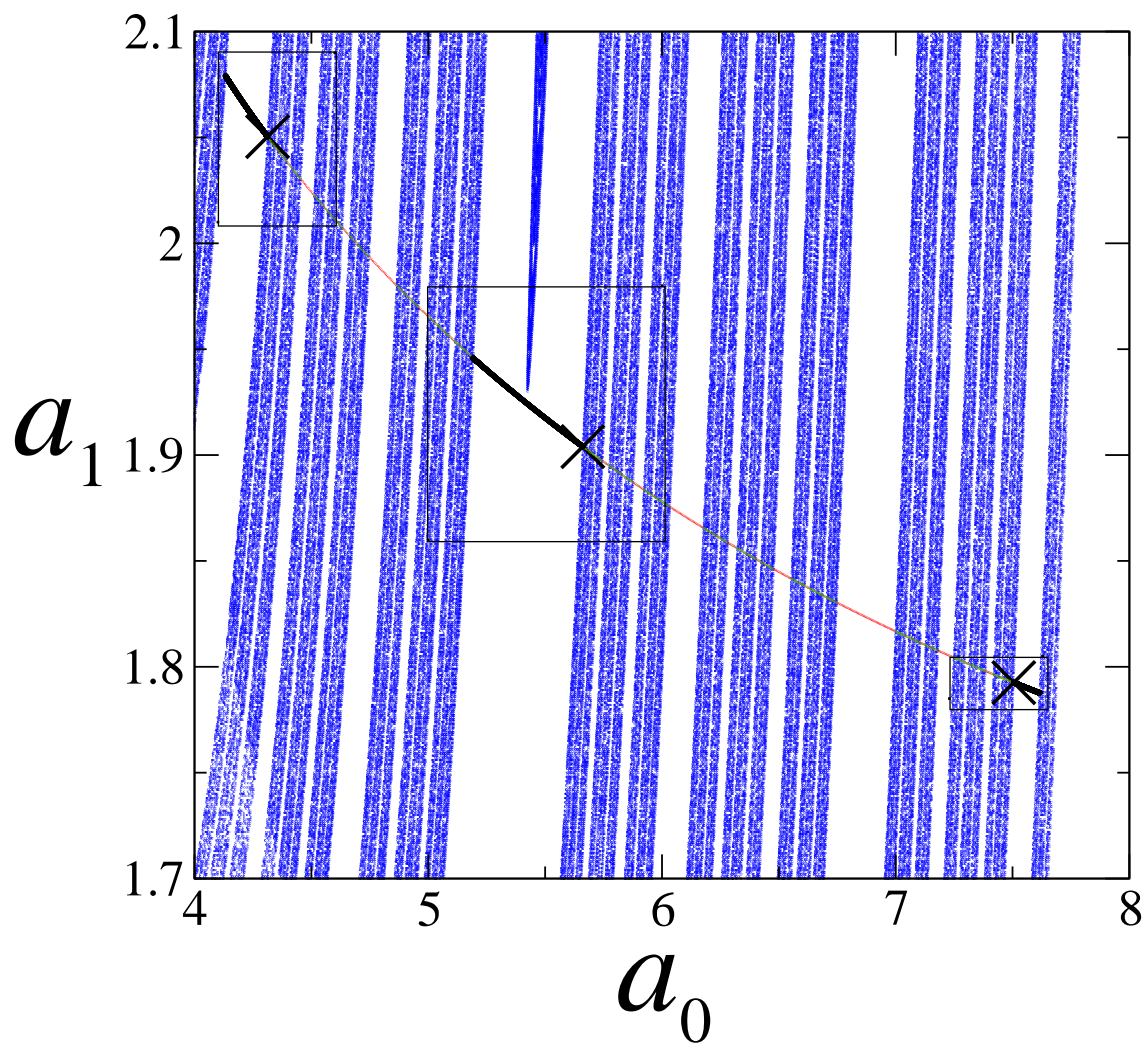
(SZABÓ *et al.*, 1996).

A Figura 4.13 mostra alguns conjuntos invariantes antes e depois da crise, da mesma forma como foi feito na bifurcação sela-nó na Figura 4.8. O atrator caótico (CA) na Figura 4.13(a) antes da crise está confinado à região de bandas, e a sela caótica envolvente (SCS) fora dela. O limite entre estas duas regiões é dada pela variedade estável da MPO (cruzes). A sela caótica envolvente não sofre maiores modificações depois da crise (fig. 4.13(c)), novamente devido à robustez das UPOs que a compõem. A incursão das órbitas na região envolvente no cenário pós-crise faz com que o atrator caótico depois da crise se assemelhe com a variedade instável da sela caótica (Figuras 4.13(b) e 4.13(d)).

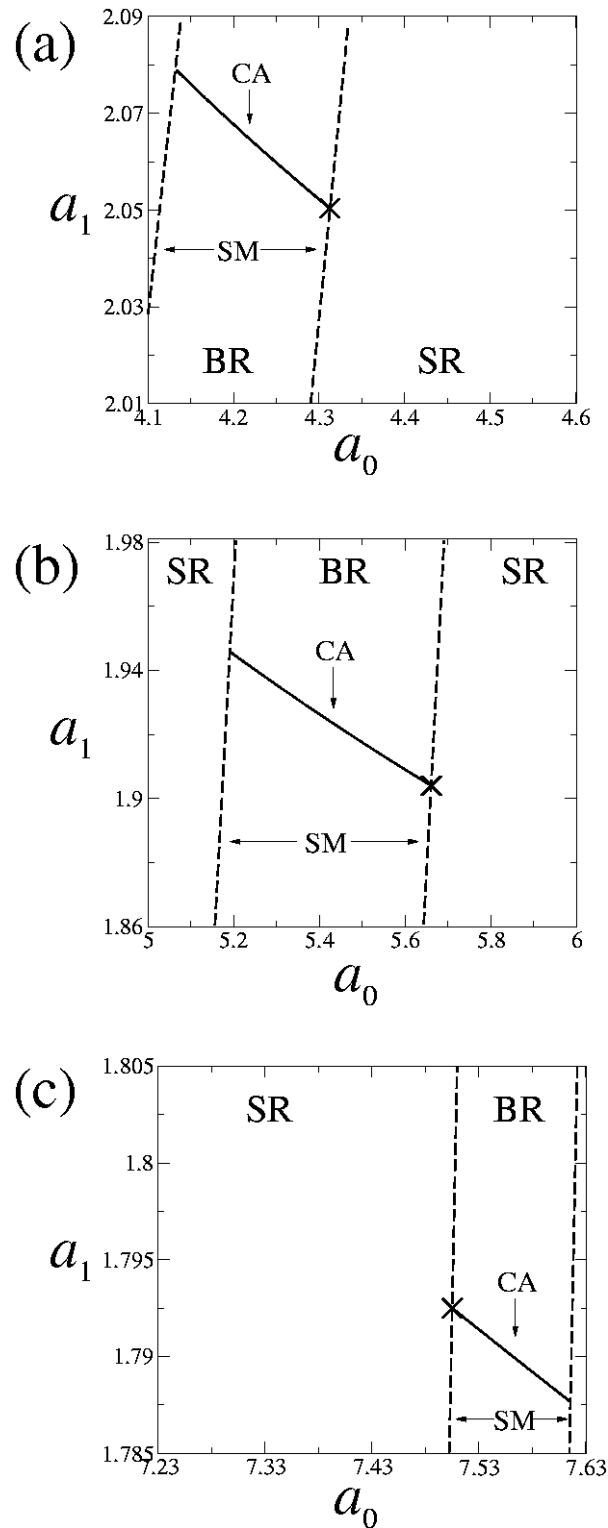
No diagrama de bifurcação mostrado na Figura 4.2(c) observa-se que a sela de bandas BCS apresenta espaços “vazios” que ampliam-se à medida que o parâmetro de controle  $\nu_2$  aumenta. Estes espaços são densamente preenchidos por um tipo especial de UPOs criadas no momento da crise, que vão unir as regiões em banda e envolvente, ou seja, a órbita destas UPOs atravessa as duas regiões, sendo representadas na seção de Poincaré por pontos localizados em ambas regiões (SZABÓ *et al.*, 1996; REMPEL, 2003). A presença destas UPOs acopladoras faz com que uma órbita sobre o atrator caótico “fuja” da região de banda para a região envolvente seguindo a variedade instável da UPO, e depois retorne à região de banda, criando a intermitência observada na série temporal apresentada na Figura 4.10.

Logo após a crise, as UPOs acopladoras possuem períodos muito longos, tendendo ao infinito quando  $\nu_2 \rightarrow \nu_{1C}$  (SZABÓ *et al.*, 1996). Conforme  $\nu_2$  aumenta, são criadas órbitas de menor período, à medida que os espaços ou “gaps” na sela caótica de banda vão se ampliando. A Figura 4.14 mostra a coexistência entre o atrator caótico em  $\nu_2 = 4.93 > \nu_{1C}$  (Fig. 4.14(a)), as selas em bandas e envolvente (Fig. 4.14(b)) referidas como o “esqueleto geométrico” do atrator por Szabó e Tel (1994), e uma órbita acopladora de período 14 no espaço de fase, onde apenas um dos pontos de Poincaré se encontra na região de bandas, e os demais encontram-se na região envolvente.

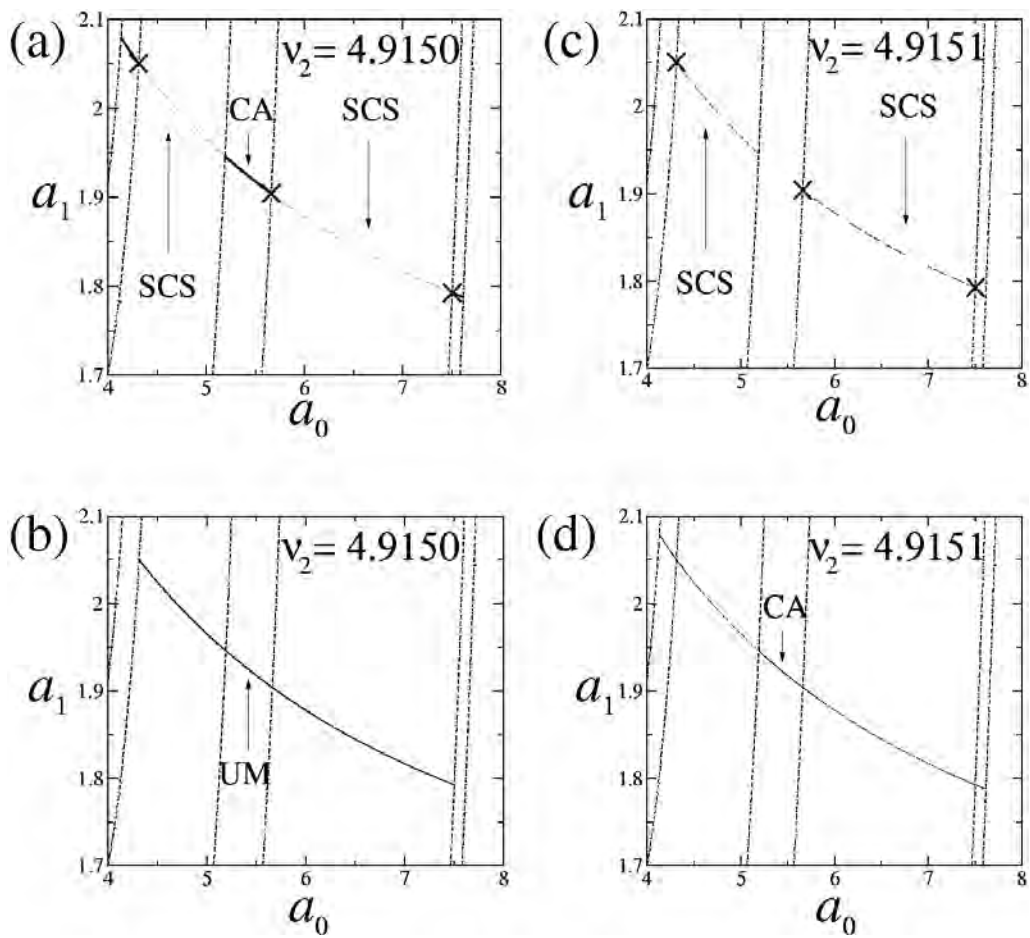
Da mesma forma que na bifurcação sela-nó, é possível calcular o tempo característico entre estouros produzidos pela intermitência induzida pela crise numa série temporal para um valor do parâmetro de controle no regime caótico ( $\nu_2 > \nu_{1C}$ ). A Figura 4.15 mostra o tempo  $\tau$  já definido na seção 4.3 em função da distância entre  $\nu_2$  e  $\nu_{1C}$ .



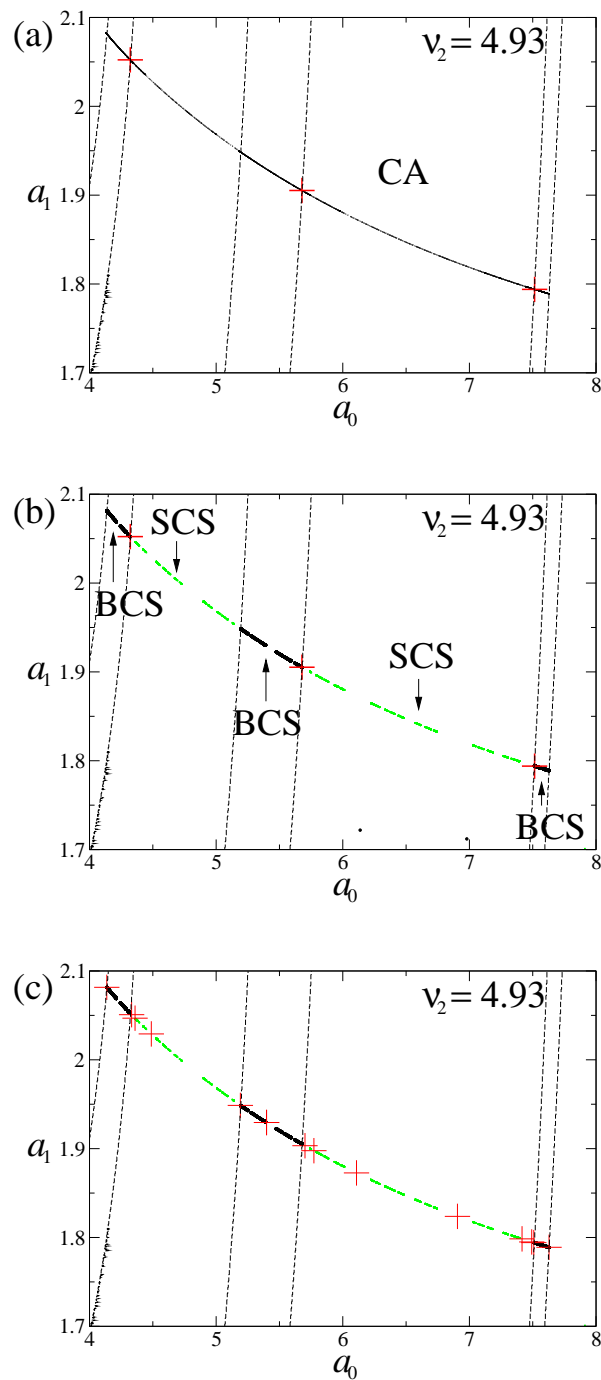
**FIGURA 4.11** - Sela caótica envolvente no regime prévio à crise,  $\nu_2 = 4.9150 < \nu_{1C}$ , e suas variedades estável (azul) e instável (vermelho). O atrator caótico em bandas é representado pelas bandas de cor preta, e a UPO mediadora de período 3 é marcada com cruces. Os quadrados pretos indicam as regiões detalhadas na Figura 4.12



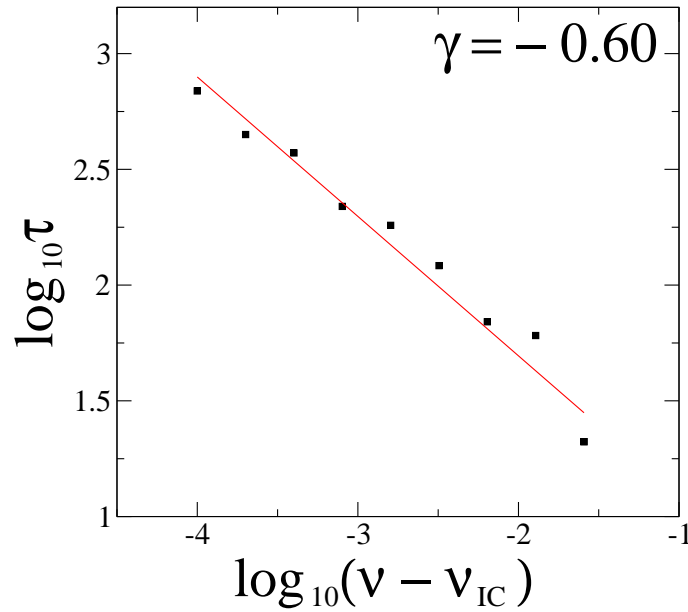
**FIGURA 4.12** - Detalhe da colisão entre o atrator caótico (CA) e o contorno da variedade estável da órbita mediadora (SM), prévio à crise interior ( $\nu_2 = 4.9150 < \nu_C$ ), para (a) a banda na esquerda, (b) no centro, (c) e na direita do eixo  $a_0$ . BR indica a região de banda e SR indica a região envolvente, projetadas no plano  $(a_0, a_1)$ . A colisão ocorre nas três bandas do atrator caótico simultaneamente



**FIGURA 4.13** - Conjuntos invariantes na crise interior, no espaço de fase  $(a_0, a_1)$ . (a) Sela caótica envolvente (SCS) para  $\nu_2 = 4.9150 < \nu_{1C}$ . O atrator caótico fraco está representado pelas três bandas em preto, e a UPO mediadora de período três por x. (b) Variedade instável da sela caótica envolvente, para o mesmo valor de  $\nu_2$ . (c) Sela caótica após a crise,  $\nu_2 = 4.9151 > \nu_{1C}$ , junto com a UPO mediadora. (d) Atrator caótico pós-crise.



**FIGURA 4.14** - Órbita acopladora no atrator caótico pós-crise ( $\nu_2 = 4.93$ ). (a) O atrator caótico (CA) e a órbita mediadora representada por cruces. (b) Selas caóticas de banda BCS (preto) e envolvente SCS (verde), e a variedade estável da MPO que separa as regiões de banda e envolvente (c) Órbita acopladora de período 14, possuindo um ponto dentro da região de banda, e os demais fora dela.



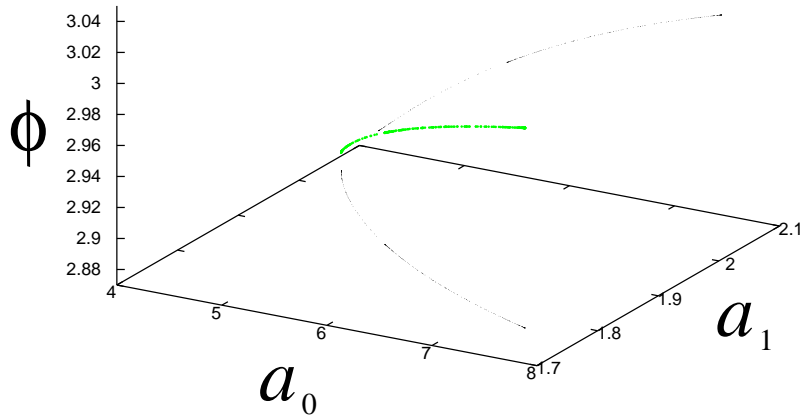
**FIGURA 4.15** - Tempo característico  $\tau$  entre estouros em função da "distância" entre  $\nu_2$  e  $\nu_{IC}$  no regime caótico pós- crise, junto com o ajuste linear com inclinação  $\gamma \approx -0.60$ , em escala logarítmica para ambos eixos

Além disso, foi calculado um ajuste linear, onde obteve-se  $\gamma \approx -0.60$ .

#### 4.5 Determinação de variedades para sistemas de 4 dimensões

As Figuras 4.6 e 4.11 mostram as variedades estável e instável das selas caóticas, achadas usando o algoritmo Sprinkler. A descrição original deste algoritmo, feita por Hsu *et al.* (1988), considera apenas sistemas discretos bidimensionais, por exemplo, o resultante de aplicar um plano de Poincaré a um sistema tridimensional, como por exemplo as equações de Rössler 2.1-2.3. Assim, as dimensões do sistema reduziriam-se de três para dois, e a definição de uma grade de condições iniciais seria feita de forma direta no plano de Poincaré. Este não é o caso do sistema 4.1-4.4, onde o "plano" de Poincaré reduz o sistema de quatro dimensões  $(a_0, a_1, a_2, \phi)$  para três  $(a_0, a_1, \phi)$ .

A primeira tentativa de implementar o método de Sprinkler consistiu em definir a grade bidimensional de condições iniciais usando  $\phi = \text{cte.}$ , mas um plano escolhido dessa forma resulta inadequado como demonstra a Figura 4.16, já que a sela caótica envolvente SCS possui uma curvatura característica no espaço de fase tridimensional. Foi necessário definir um plano expressando  $\phi$  em termos de  $a_0$ , que contenha a sela caótica fazendo uso de uma regressão linear com ajuste cúbico de  $\phi$  em termos de  $a_0$ , calculado a partir dos pontos da mesma sela caótica previamente achada usando



**FIGURA 4.16** - Sela caótica envolvente no espaço de fase tridimensional  $(a_0, a_1, \phi)$  (verde), e suas projeções nos planos  $\phi = \text{cte.}$ , e  $a_1 = \text{cte.}$  (preto), para  $\nu_2 = 4.7641$

o algoritmo PIM triple (NUSSE; YORKE, 1989). A equação foi obtida usando o programa XMGrace (disponível em <http://plasma-gate.weizmann.ac.il/Grace/>). A Figura 4.17 mostra a sela caótica e a curva obtida do ajuste. Como a curva obtida representa uma boa aproximação à sela, a equação foi finalmente usada para obter a componente  $\phi$  da grade de condições iniciais necessárias para o algoritmo Sprinkler (Figura 4.18).

O procedimento descrito é válido pelo menos para sistemas cujas selas caóticas possuam geometria simples no plano de Poincaré, como é o caso do modelo estudado neste capítulo, onde a SCS (mostrada na Figura 4.16) possui uma forma semelhante a uma curva.



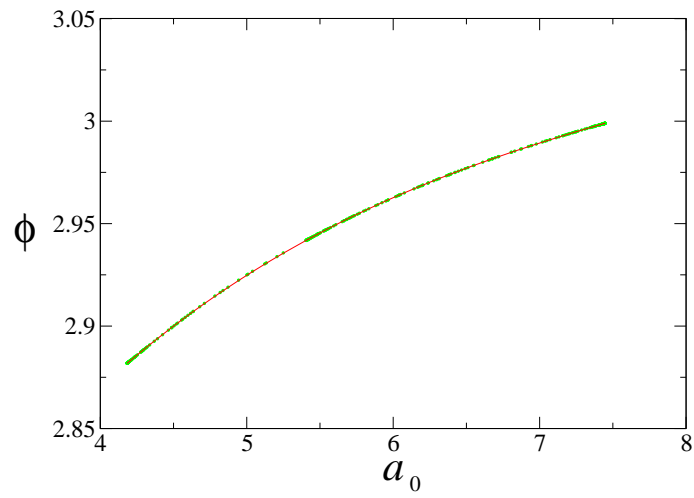


FIGURA 4.17 - Sela caótica projetada no plano  $(a_0, \phi)$  (verde), e a curva obtida da regressão cúbica (vermelho).

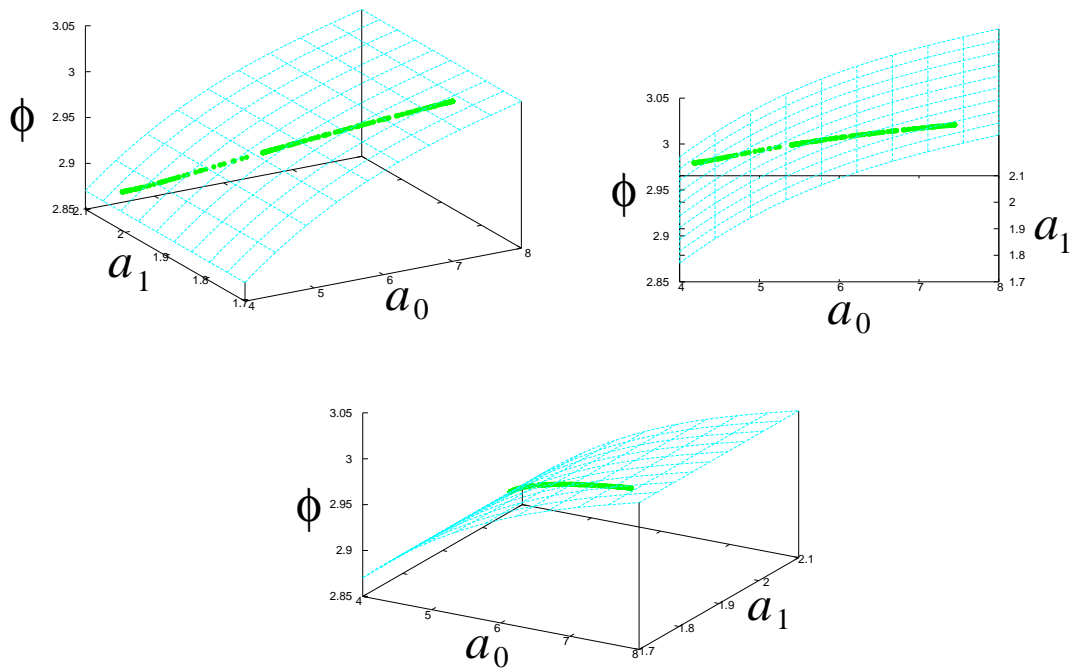


FIGURA 4.18 - Grade de condições iniciais no espaço de fase  $(a_0, a_1, \phi)$  usando três perspectivas distintas.



## CAPÍTULO 5

### TEORIA DE CAOS PARA INTERAÇÃO NÃO LINEAR DE QUATRO ONDAS

#### 5.1 Modelo de quatro ondas cúbico

O modelo a ser estudado neste capítulo foi proposto por Russell e Ott (1981):

$$\dot{a}_0 = a_0 + 2a_0a_1a_2 \sin \phi \quad (5.1)$$

$$\dot{a}_1 = -\nu_1 a_1 - a_0^2 a_2 \sin \phi \quad (5.2)$$

$$\dot{a}_2 = -\nu_2 a_2 - a_0^2 a_1 \sin \phi \quad (5.3)$$

$$\dot{\phi} = -2\delta + a_1^2 + a_2^2 - 2a_0^2 + \left[ 4a_1a_2 - a_0^2 \left( \frac{a_2}{a_1} + \frac{a_1}{a_2} \right) \right] \cos \phi, \quad (5.4)$$

onde os parâmetros são similares aos pertencentes ao sistema 4.1-4.4, com a diferença que as amplitudes  $a_{1,2}$  representam as ondas induzidas de alta frequência nos modos Stokes e anti-Stokes. O conjunto de equações 5.1-5.4 descreve a dinâmica não linear da interação de três ondas (uma indutora e duas induzidas) levando em conta que a onda de baixa frequência fica presa pela força ponderomotiva devido ao gradiente na intensidade da onda como discutido na seção 2.5.4. Para que isto ocorra é necessário que tanto a velocidade de fase da onda ion-acústica (baixa frequência) como as velocidades relacionadas com as mudanças no envoltório da onda de Langmuir sejam menores do que a velocidade do som (ROBINSON *et al.*, 2002; ROBINSON, 1997). Este mecanismo de interação é conhecido como *processo modulacional sub-sônico*. Exemplos de processos modulacionais são:

$$\begin{aligned} L &\rightleftharpoons L^- + L^+ + S^* \\ L &\rightleftharpoons T^- + L^+ + S^* \\ L &\rightleftharpoons L^- + T^+ + S^* \\ L &\rightleftharpoons T^- + T^+ + S^*, \end{aligned}$$

onde  $L$  representa uma onda de Langmuir,  $T$  uma onda eletromagnética, e  $S$  uma onda ion-acústica. O superíndice  $+$  indica que a onda encontra-se em modo Stokes, o superíndice  $-$  em modo anti-Stokes e o símbolo  $*$  indica que a onda encontra-se no limite sub-sônico, neste caso, a onda ion-acústica. O detalhe da obtenção do sistema 5.1-5.4 das equações de Zakharov encontra-se no apêndice A.2.

## 5.2 Análise não linear do modelo simplificado ( $\nu_1 = \nu_2$ )

Russell e Ott (1981) fizeram uma simplificação do sistema de equações 5.1-5.4, considerando as amplitudes  $a_1 = a_2$ , e as taxas de amortecimento  $\nu_1 = \nu_2 = \nu$ . Desta forma o sistema é reduzido de quatro equações para três:

$$\dot{a}_0 = a_0 + 2a_0a_1^2 \sin \phi \quad (5.5)$$

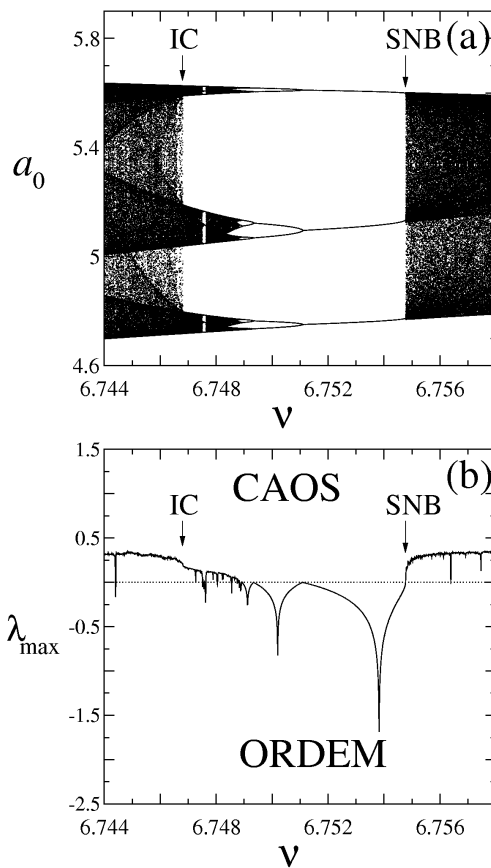
$$\dot{a}_1 = -\nu a_1 - a_0^2 a_1 \sin \phi \quad (5.6)$$

$$\dot{\phi} = -2\delta + 2(a_1^2 - a_0^2) + 2(2a_1^2 - a_0^2) \cos \phi \quad (5.7)$$

Em Miranda *et al.* (2005) foi feita uma análise da dinâmica caótica do sistema 5.5-5.7 fixando  $\delta = -6$ , e enfocando a atenção na janela de período-3 mostrada na Figura 5.1(a). O plano de Poincaré foi definido em  $a_1 = 1$ , e registraram-se os pontos onde a órbita corta o plano com  $\dot{a}_1 > 0$ , ou seja, da “esquerda” para a “direita” no eixo  $a_1$ . Analisando o diagrama de bifurcação da direita para a esquerda, temos que uma mudança abrupta na dinâmica do sistema ocorre na *bifurcação sela-nó* (marcado como SNB, do inglês *saddle-node bifurcation*), onde a janela periódica tem o seu início. Após uma série de bifurcações de duplicação de período o atrator atinge o estado de *atrator caótico fraco*, ou *em bandas*, até que uma nova mudança faz que o atrator caótico aumente o seu tamanho, num evento conhecido como *crise interior*, marcado como IC (do inglês *interior crisis*) na Figura 5.1(a).

A figura 5.1(b) mostra o valor do máximo expoente de Lyapunov  $\lambda_{\text{MAX}}$  calculado para cada valor do parâmetro de controle  $\nu$  na Fig. 5.1(a). Observa-se que quando  $\lambda_{\text{MAX}} > 0$ , a dinâmica é caótica, e quando  $\lambda_{\text{MAX}} < 0$ , a dinâmica é periódica. Podem-se apreciar descontinuidades que ocorrem cada vez que o sistema sofre uma mudança abrupta, ou seja, na bifurcação sela-nó (SNB) e na crise interior (IC).

Na Figura 5.2 são mostradas três séries temporais representadas por pontos de Poin-



**FIGURA 5.1** - (a) Diagrama de bifurcação para a amplitude  $a_0$  em função da frequência de amortecimento das ondas induzidas  $\nu$ ; SNB indica a bifurcação sela-nó e IC a crise interior. (b) Expoente máximo de Lyapunov  $\lambda_{\text{MAX}}$  em função do parâmetro de controle  $\nu$ .  
 FONTE: Miranda *et al.* (2005)

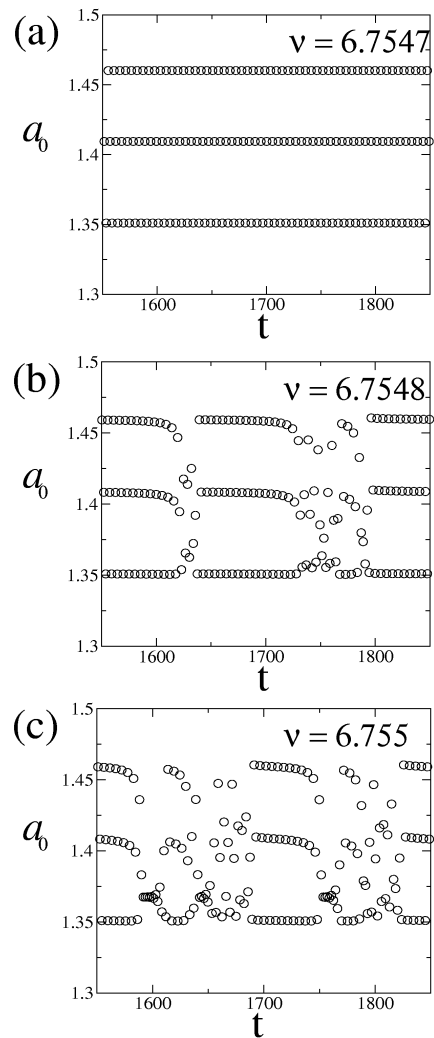
caré, para  $\nu = 6.7547 < \nu_{\text{SNB}}$  (Figura 5.2(a), período-3),  $\nu = 6.7548 > \nu_{\text{SNB}}$  (Figura 5.2(b), caótico) e  $\nu = 6.755 > \nu_{\text{SNB}}$  (Figura 5.2(c), caótico). Nesta figura é possível observar que a frequência dos estouros aumenta enquanto o valor do parâmetro de controle se afasta do valor em que ocorre a bifurcação sela-nó. A mesma situação acontece na crise interior, como mostra a Figura 5.3. Para  $\nu = 6.7469 > \nu_{\text{IC}}$  (Figura 5.3(a)), as órbitas ainda estão confinadas na região do espaço de fase ocupada pelo atrator caótico de bandas mostrado na Figura 5.3(d). Para  $\nu = 6.7468$  a série temporal apresenta interrupções esporádicas, sendo a frequência da intermitência maior em  $\nu = 6.7467$ . As figuras 5.3(e) e 5.3(f) demonstram que as órbitas “fogem” da região de bandas.

### 5.3 Análise não linear com $\nu_1 \neq \nu_2$

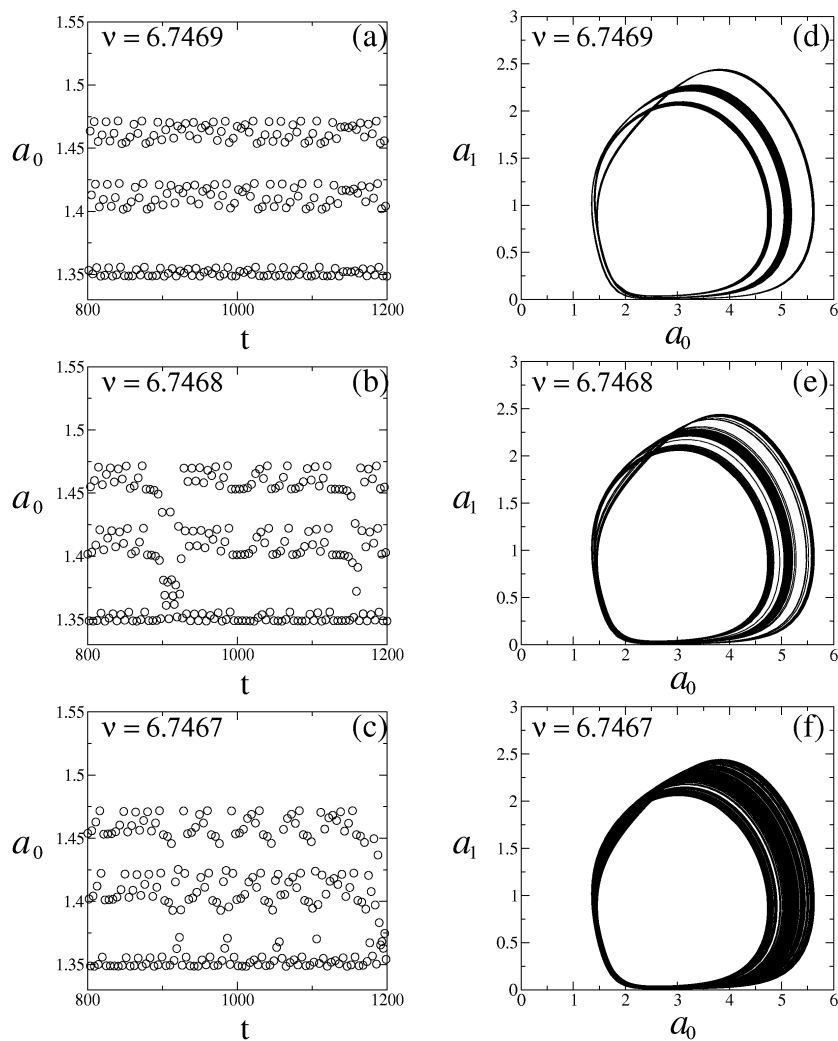
#### 5.3.1 Diagramas de bifurcação

Para a análise do sistema 5.1-5.4 fixou-se  $\nu_1 = 6.75$  e  $\nu_2$  foi escolhido como o parâmetro de controle. O plano de Poincaré foi definido em  $a_2 = 1$ , com o mesmo sentido de corte do que na análise anterior ( $\dot{a}_1 > 0$ ), e  $\delta = -6$ . Note-se que, para o modelo simplificado 5.5-5.7, em  $\nu = 6.75$  o sistema possui comportamento periódico (período 3), visível na Figura 5.1. A Figura 5.4 mostra a evolução do sistema ao variar  $\nu_2$  no intervalo [6.2, 7]. Da esquerda para a direita o sistema inicialmente apresenta comportamento periódico (ciclo limite simples) sofrendo uma bifurcação de duplicação de período em  $\nu_2 \approx 6.35$ . Eventualmente o sistema atinge o estado de atrator caótico em  $\nu_2 \approx 6.45$ . Este atrator caótico sofre uma cascata inversa de duplicação de período, para voltar ao ciclo limite em  $\nu_2 \approx 6.83$ . O cálculo dos expoentes de Lyapunov mostrado na Figura 5.4(b) confirma as mudanças do comportamento periódico para caótico. Durante a evolução do atrator caótico é possível distinguir duas janelas periódicas, sendo uma delas de período 3 (marcada com uma seta). A existência desta janela é confirmada pela queda no valor do máximo expoente de Lyapunov (mostrado na Figura 5.4(b) com uma seta).

A janela de período 3 é muito parecida com a janela estudada no capítulo anterior, no sentido de que é criada numa bifurcação sela-nó em  $\nu_2 = 6.4845 \approx \nu_{\text{SNB}}$  (marcado como SNB na Figura 5.5(a)), onde são criadas duas órbitas periódicas, uma estável e uma instável. A órbita periódica estável sofre uma série de duplicações de período enquanto aumenta o parâmetro de controle, chegando ao estado de atrator caótico fraco, onde o máximo expoente de Lyapunov possui valor positivo (Figura 5.5(b)).



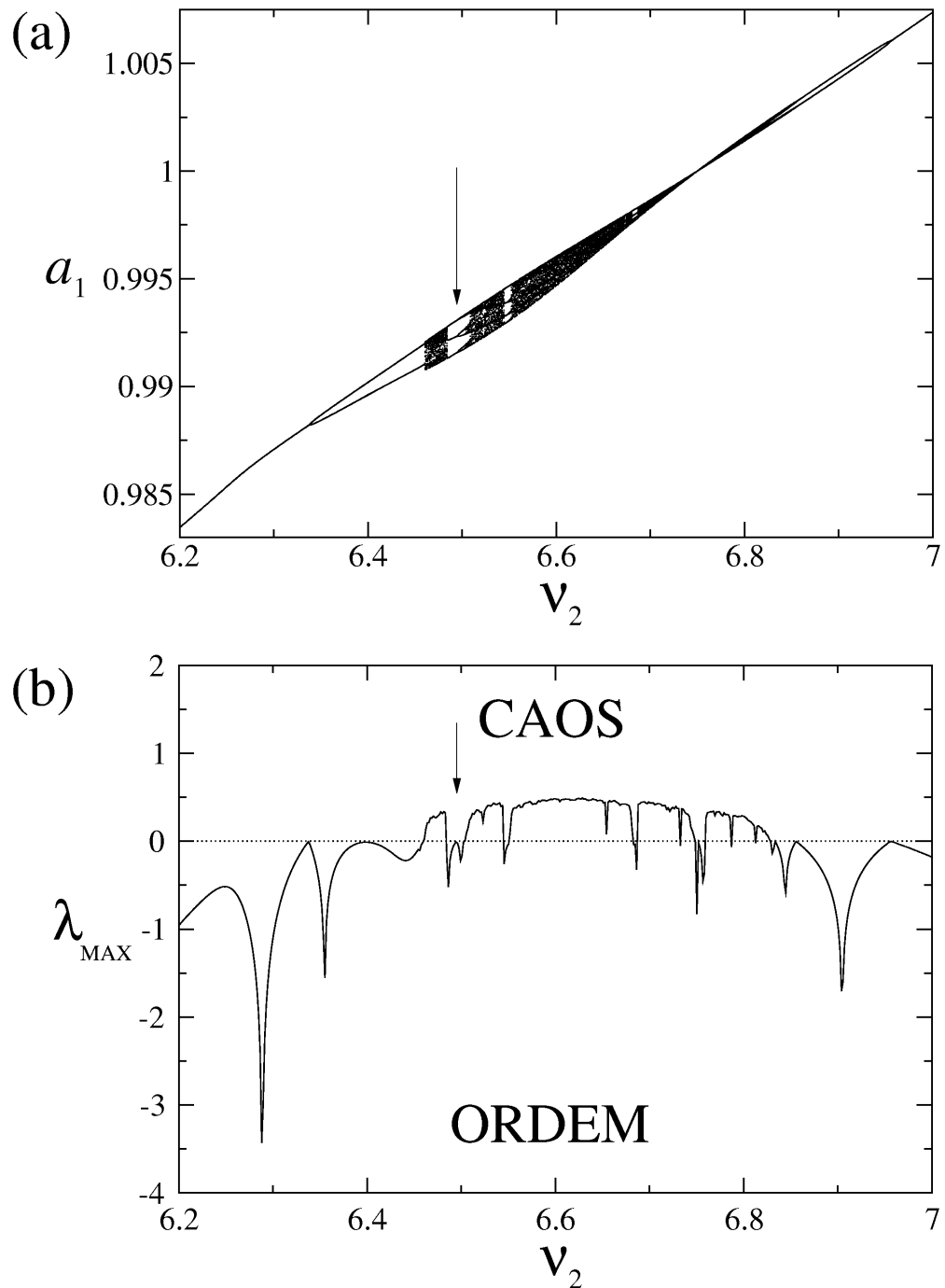
**FIGURA 5.2** - Séries temporais de  $a_0$  mostrando a ocorrência da intermitência Pomeau-Manneville de tipo I, em (a)  $\nu = 6.7547$ , (b)  $\nu = 6.7548$  e (c)  $\nu = 6.755$ .  
 FONTE: Miranda *et al.* (2005)



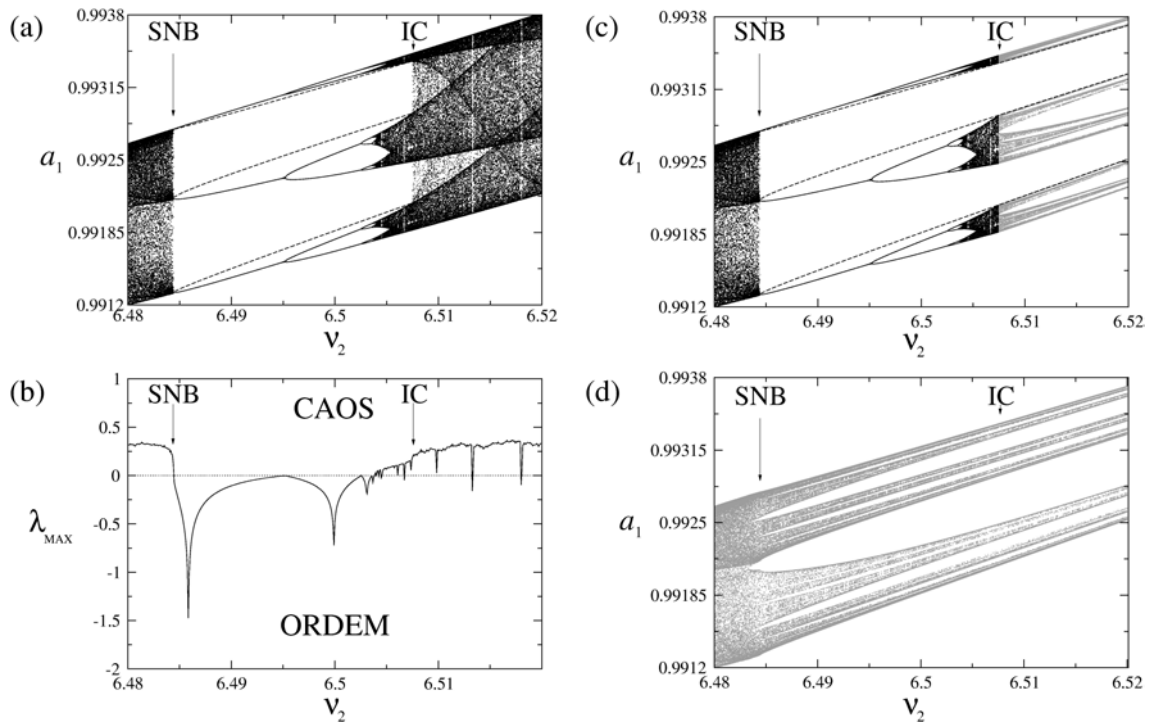
**FIGURA 5.3** - Séries temporais de  $a_0$  mostrando intermitência induzida pela crise, em (a)  $\nu = 6.7469$ , (b)  $\nu = 6.7468$  e (c)  $\nu = 6.7467$ , com as trajetórias correspondentes no espaço de fase  $(a_0, a_1)$  em (d), (e) e (f).

FONTE: Miranda *et al.* (2005)





**FIGURA 5.4** - (a) Diagrama de bifurcação do sistema 5.1-5.4 usando a variável de estado  $a_1$  em função do  $\nu_2$  no intervalo  $[6.2, 7]$ . (b) Máximo expoente de Lyapunov em função de  $\nu_2$  para o mesmo intervalo. A janela periódica de interesse está marcada com uma seta.



**FIGURA 5.5** - (a) Diagrama de bifurcação mostrando a janela periódica e a órbita mediadora criada na bifurcação sela-nó. SNB indica a bifurcação sela-nó, e IC indica a crise interior. (b) Máximo expoente de Lyapunov  $\lambda_{\text{MAX}}$ . (c) Sela caótica em bandas (cinza) criada a partir do atrator caótico fraco antes da crise. (d) Sela caótica envolvente.

Em  $\nu_2 = 6.5075 \approx \nu_{\text{IC}}$  a órbita periódica instável colide com o atrator caótico fraco produzindo uma crise interior, onde o tamanho do atrator caótico aumenta, e o valor do máximo expoente de Lyapunov sofre uma descontinuidade.

Depois da crise, o atrator caótico em bandas converte-se numa sela caótica em bandas (BCS), cuja evolução é mostrada na Figura 5.5(c). Observa-se que ela possui espaços ou “gaps” que aumentam de tamanho com o parâmetro de controle  $\nu_2$ . A sela caótica envolvente (Figura 5.5(d)) existe em todo o diagrama de bifurcação, variando de forma contínua e suave.

### 5.3.2 Bifurcação sela-nó

No diagrama de bifurcação mostrado na Figura 5.5 observa-se que a bifurcação sela-nó ocorre aproximadamente em  $\nu_2 = 6.4845$ . Neste tipo de bifurcação um par de órbitas estável e instável são criadas a partir do conjunto caótico prévio à bifurcação. A criação destas órbitas periódicas (representadas por pontos fixos no plano de Poincaré) pode ser visualizada no mapa de retorno mostrado na Figura 5.6, onde

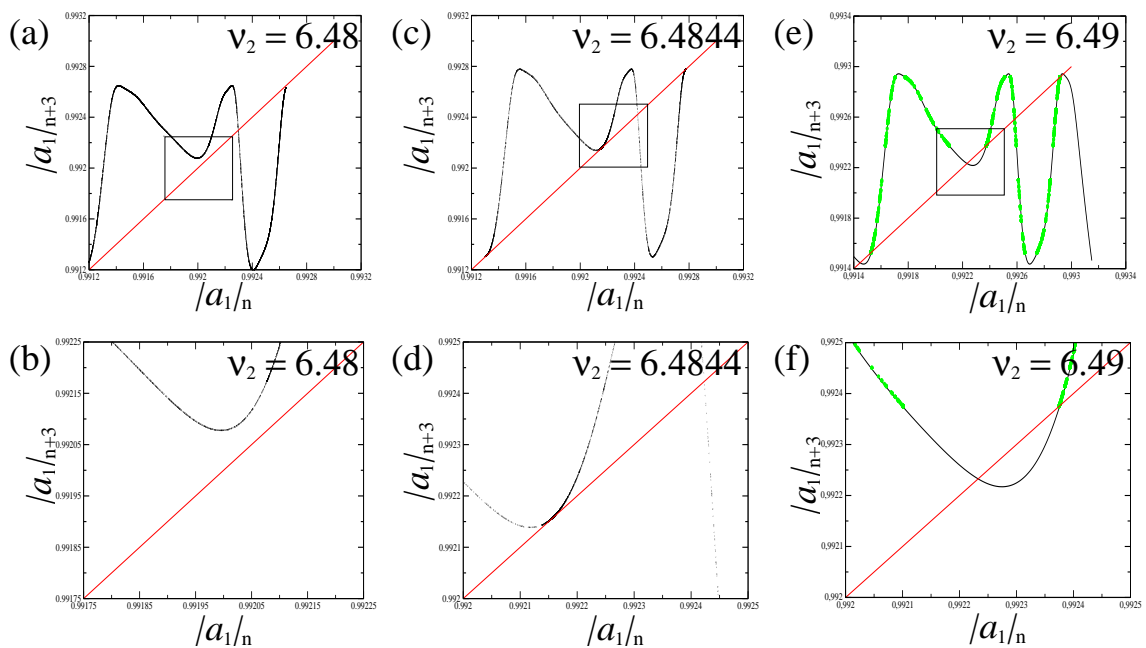
uma condição inicial e a sua terceira iteração no mapa são plotados. Os pontos fixos serão identificados como os pontos de intersecção entre a curva resultante e a reta  $y = x$ , já que, dado um plano de Poincaré  $P$ , um ponto fixo de período 3 deve satisfazer:

$$P^{[3]}(\bar{x}) = \bar{x}$$

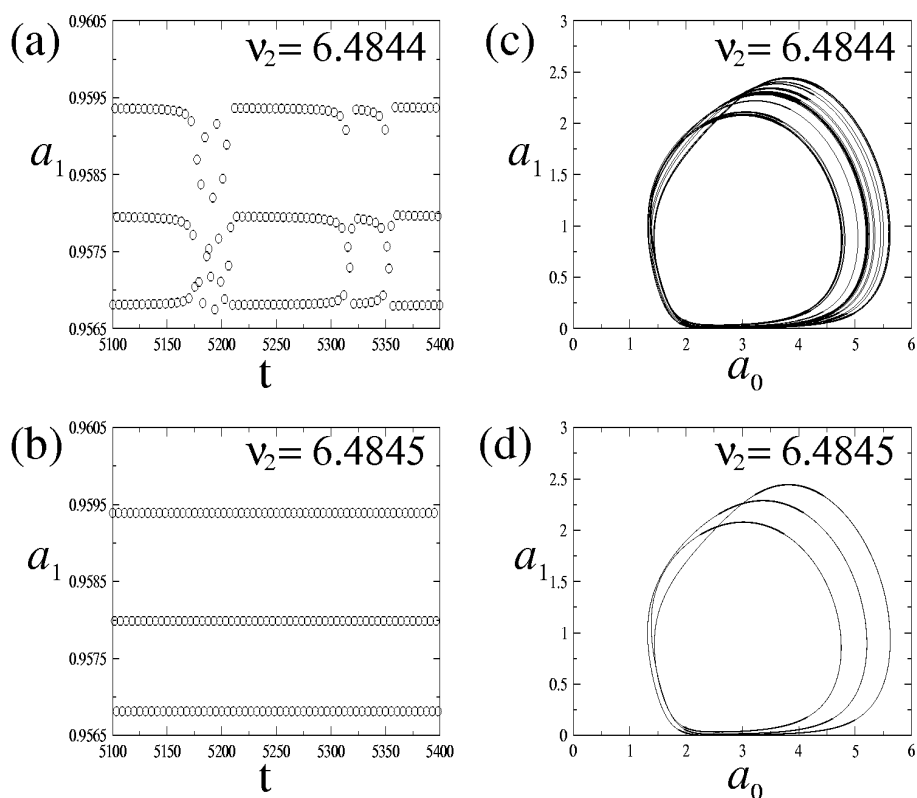
A Figura 5.6(a) mostra o mapa de retorno em  $\nu_2 = 6.48$ , onde a curva corta a reta  $y = x$  apenas num ponto, que representa uma órbita periódica instável de período 1 que não é relevante. A figura 5.6(c) mostra que, para  $\nu_2 = 6.4844 \approx \nu_{\text{SNB}}$ , a curva é tangente em forma simultânea em três pontos da reta (um deles é mostrado em detalhe na Figura 5.6(d)), em cada um dos quais um par de órbitas estável e instável será criado. A Figura 5.6(e), e o detalhe em 5.6(f), mostram que a curva em  $\nu_2 = 6.49$  ultrapassa a reta nos três pontos de tangência, criando um ponto fixo estável e um ponto instável. Estes gráficos foram obtidos usando as técnicas descritas no capítulo 4.

Antes da bifurcação sela-nó, é possível observar nas séries temporais a intermitência Pomeau-Manneville do tipo I, como é o caso da Figura 5.7(a) para  $\nu_2 = 6.4844 < \nu_{\text{SNB}}$ , onde a série temporal está representada por pontos de Poincaré. Esta intermitência caracteriza-se por fases laminares aproximadamente periódicas que são interrompidas aleatoriamente por estouros caóticos (POMEAU; MANNEVILLE, 1980). A Figura 5.7(c) mostra a trajetória para o mesmo valor do parâmetro de controle, projetada no plano  $(a_0, a_1)$ . Para  $\nu_2 = 6.4845 > \nu_{\text{SNB}}$  (o que representa uma mudança na quarta casa decimal), a série temporal apresenta comportamento periódico (período 3), e a órbita no espaço de fase converge para o ciclo limite cuja projeção no plano  $(a_0, a_1)$  é mostrada na Figura 5.7(d).

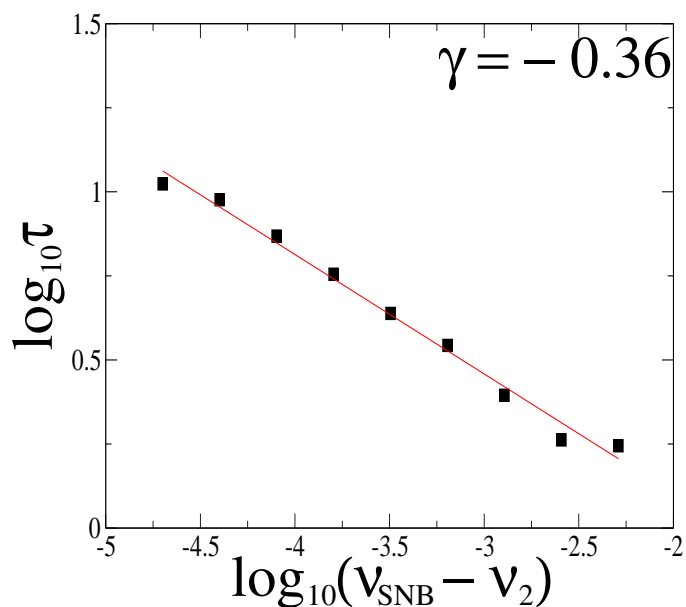
A frequência da intermitência Pomeau-Manneville do tipo I observada nas séries temporais aumenta de forma exponencial a medida que o valor no parâmetro de controle se afasta do valor onde ocorre a bifurcação (SZABÓ *et al.*, 1996). A Figura 5.8 mostra o tempo médio de duração das fases laminares nas séries temporais, em função da diferença entre o valor do parâmetro de controle e o momento da bifurcação. Ambos os eixos estão em escala logarítmica. Na mesma figura mostra-se um ajuste linear, onde a inclinação é  $\gamma \approx -0.36$ .



**FIGURA 5.6** - Mapas de retorno mostrando  $|a_1|_n$  com relação à terceira iteração no plano de Poincaré  $|a_1|_{n+3}$ , e a reta  $y = x$  para (a)  $\nu_2 = 6.48 < \nu_{SNB}$ , e (b) o detalhe do espaço entre a curva obtida do atrator caótico, e a reta. (c)  $\nu_2 = 6.4844 \approx \nu_{SNB}$ , e (d) o detalhe de um ponto de tangência entre a curva obtida do atrator caótico, e a reta. (e)  $\nu_2 = 6.49 > \nu_{SNB}$ , e (f) o detalhe da interseção entre a curva obtida através de um ajuste cúbico da sela caótica, e a reta. A curva obtida diretamente da sela caótica é mostrada em verde.



**FIGURA 5.7** - Séries temporais representadas por pontos de Poincaré para (a)  $\nu_2 = 6.4844 < \nu_{\text{SNB}}$ , mostrando intermitência Pomeau-Manneville de tipo I, e (b)  $\nu_2 = 6.4845$ , mostrando uma série temporal de período 3. (c) Trajetória caótica projetada no espaço de fase para  $\nu_2 = 6.4844$ . (d) Ciclo limite de período 3 projetado no espaço de fase  $(a_0, a_1)$  para  $\nu_2 = 6.4845$ .



**FIGURA 5.8** - Tempo característico  $\tau$  de duração das fases laminares nas séries temporais em função da “distância” entre o valor do parâmetro de controle e o momento da bifurcação sela-nó, e um ajuste linear (linha vermelha) onde a inclinação  $\gamma \approx -0.36$ . Ambos eixos estão em escala logarítmica.

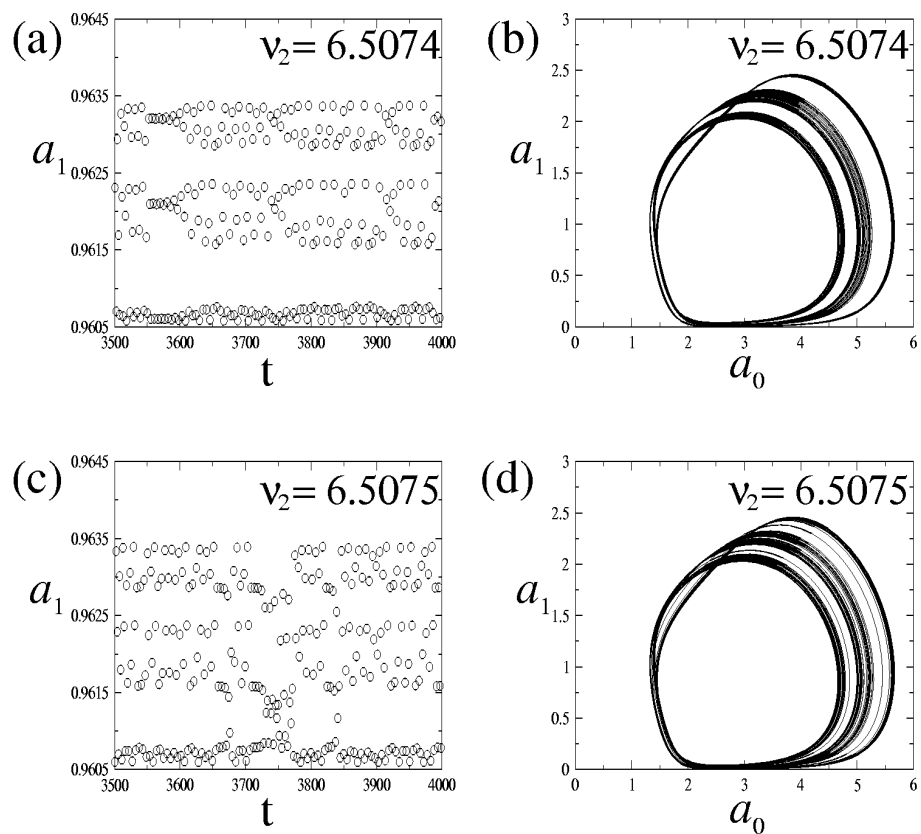
### 5.3.3 Crise interior

Na Figura 5.5 é possível observar que a crise interior ocorre quando a órbita mediadora (que foi criada na bifurcação sela-nó, em  $\nu_2 \approx 6.4845$ ) colide com o atrator caótico em bandas, que aumenta de tamanho abruptamente em  $\nu_2 \approx 6.5075$ . A Figura 5.9 mostra as mudanças sofridas pela série temporal, e pela órbita no espaço de fase, devido à crise. Em  $\nu_2 = 6.5074 < \nu_{IC}$ , a série temporal representada por pontos de Poincaré na Figura 5.9(a) apresenta um comportamento caótico, porém confinado em três bandas. No espaço de fase, as órbitas são atraídas para o atrator caótico fraco cuja projeção no plano  $(a_0, a_1)$  é mostrada na Figura 5.9(b). Depois da crise ( $\nu_2 = 6.5075$ ), a série temporal mostra a ocorrência esporádica de estouros que interrompem o comportamento anterior de maneira intermitente (chamada intermitência induzida pela crise interior), como mostra a Figura 5.9(c) para  $\nu_2 = 6.5075 > \nu_{IC}$ , fazendo que as órbitas fujam para outras regiões no espaço de fase, mostrado na Figura 5.9(d) para o mesmo valor do parâmetro de controle.

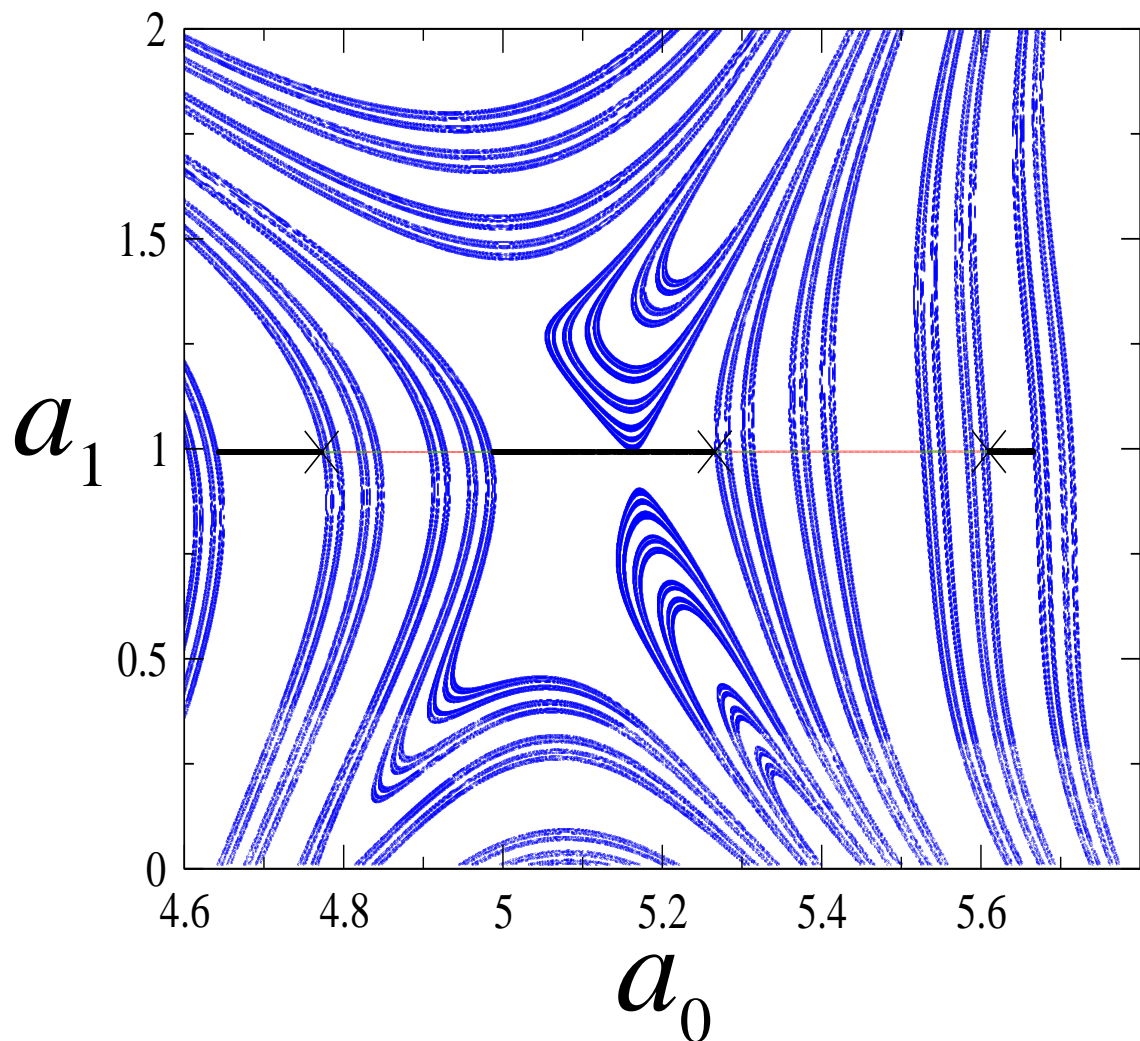
A crise interior ocorre pela colisão entre o atrator caótico em bandas e a variedade estável da órbita mediadora. A Figura 5.10 mostra o atrator caótico em bandas (preto), a sela caótica envolvente (verde), e as suas variedades estável (azul) e instável (vermelho). A órbita mediadora também é mostrada (cruzes). Observa-se que as três bandas colidem simultaneamente com a variedade estável da órbita mediadora, que fica no contorno da variedade estável da sela caótica.

A intermitência induzida pela crise mostrada na Figura 5.9(b) é devido à existência de órbitas acopladoras, as quais percorrem o espaço de fase unindo as regiões de banda e envolvente, e preenchem densamente os espaços ou “gaps” das selas caóticas depois da crise. No plano de Poincaré estas órbitas estão representadas por pontos fixos existentes em ambas as regiões. A Figura 5.11(a) mostra o atrator caótico em  $\nu_2 = 6.515 > \nu_{IC}$ , as selas de banda e envolvente (o “esqueleto” do atrator) junto com a órbita mediadora na Figura 5.11(b), e uma órbita acopladora de período 10 na Figura 5.11(c).

Finalmente, foi calculado o tempo característico da duração das fases laminares (ou seja, a média do tempo entre eventos intermitentes) observadas nas séries temporais caóticas pós-crise, para diferentes valores do parâmetro de controle  $\nu_2$ . A figura 5.12 mostra a média do tempo obtido, em função da “distância” entre o valor atual do parâmetro de controle, e o valor  $\nu_2 = 6.5075 \approx \nu_{IC}$ . Foi calculado também um ajuste

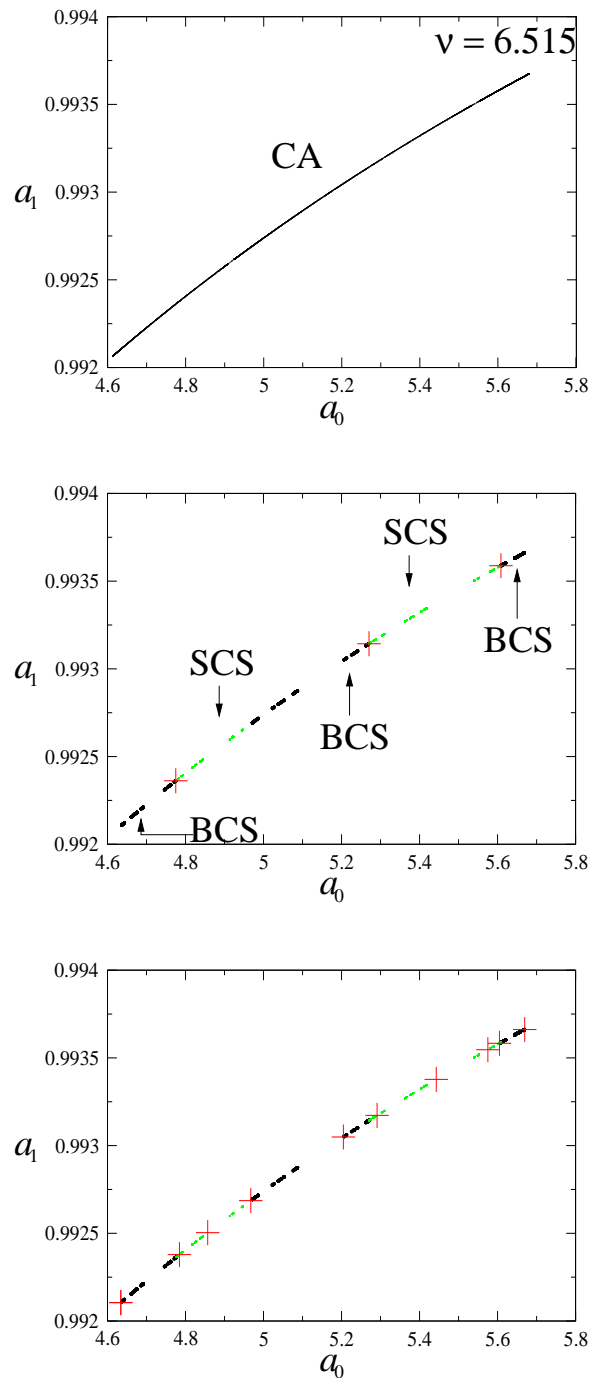


**FIGURA 5.9** - Séries temporais representadas por pontos de Poincaré para (a)  $\nu_2 = 6.5074 < \nu_{1C}$ , onde a órbita mantém-se em três regiões bem definidas, e (b)  $\nu_2 = 6.5075 > \nu_{1C}$ , mostrando intermitência induzida pela crise interior. (c) Trajetória projetada no espaço de fase ( $a_0, a_1$ ) para  $\nu_2 = 6.5074 < \nu_{1C}$ . (d) Trajetória projetada no mesmo espaço de fase, para  $\nu_2 = 6.5075 > \nu_{1C}$ , com a órbita “fugindo” esporadicamente das regiões de bandas.

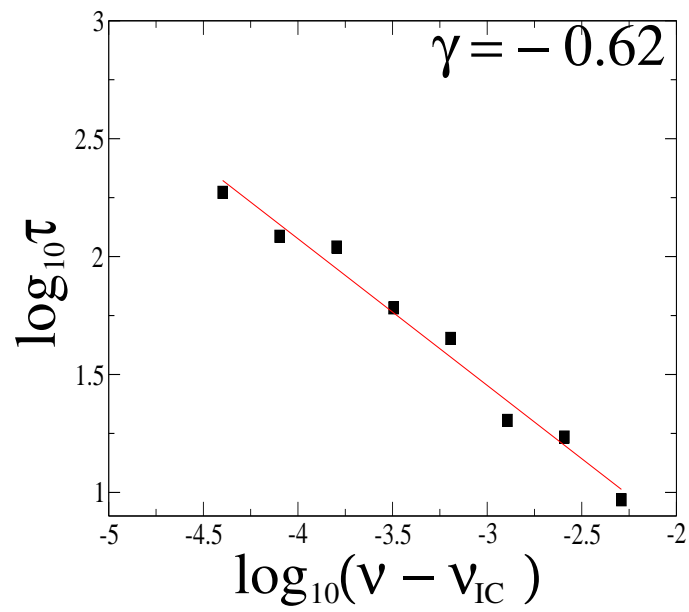


**FIGURA 5.10** - Sela caótica envolvente (verde) e as suas variedades estável (azul) e instável (vermelho), com o atrator caótico em bandas (preto), e a órbita mediadora (cruzes) para  $\nu_2 = 6.5074 < \nu_C$ . O atrator caótico colide com a variedade estável da órbita mediadora (que define o contorno da variedade estável da sela caótica) em forma simultânea nas três bandas.





**FIGURA 5.11** - Coexistência do atrator caótico, selas caóticas e órbitas acopladoras no espaço de fase, para  $\nu_2 = 6.515$ . (a) Atrator caótico. (b) Selas caóticas de banda (BCS, em preto) e envolvente (SCS, verde), e a órbita mediadora de período 3. (c) Órbita acopladora de período 10, apresentando pontos nos "gaps" das selas de banda e envolvente.



**FIGURA 5.12** - Tempo característico  $\tau$  em função da diferença entre o valor do parâmetro de controle e  $\nu_2 = 6.5075 \approx \nu_{IC}$ , e um ajuste linear (linha vermelha) onde a inclinação é  $\gamma \approx -0.62$ . Os dois eixos estão em escala logarítmica

linear (linha vermelha) onde a inclinação é  $\gamma \approx -0.62$ .

## CAPÍTULO 6

### CONCLUSÃO

A aplicação da Teoria de Caos em modelos de interação onda-onda não lineares feita durante o desenvolvimento deste trabalho demonstra que a dinâmica não-linear das ondas de plasma, tanto para o processo de decaimento (três ondas) como para o processo modulacional sub-sônico (quatro ondas), pode chegar a ser muito complexa dependendo da escolha dos valores para os parâmetros. Foi demonstrada também a existência de conjuntos caóticos não atrativos (selas caóticas) no espaço de fase, e a evolução delas ao longo do diagrama de bifurcação. Para cada modelo, dois tipos de intermitência foram estudadas: intermitência Pomeau-Manneville de tipo I, e intermitência induzida pela crise interior. Neste último caso a ocorrência dos eventos intermitentes foi atribuída à existência de órbitas acopladoras identificadas no espaço de fase, que acoplam duas selas caóticas. A análise destes modelos pode contribuir para o controle e a previsão de interações onda-onda não lineares em plasmas espaciais (LOPES; CHIAN, 1996b).

Nos diagramas de bifurcação e séries temporais apresentados nos capítulos 4 e 5 escolheu-se usar a variável  $a_1$  para o eixo vertical. A justificativa de usar esta variável é que, em muitos exemplos de interações onda-onda (como os apresentados no capítulo 2) a onda induzida é do tipo eletromagnética, comumente detectada através de instrumentos na Terra, como no exemplo dado na seção 3.2, onde emissões solares de rádio de tipo II foram detectadas pelos radioespectrógrafos em Potsdam e Ondřejov, enquanto outros tipos de ondas de plasma somente poderiam ser detectadas “in-situ” no espaço usando instrumentos em espaçonaves, já que apenas as ondas eletromagnéticas podem se propagar até o observador (KIVELSON; RUSSELL, 1995).

A análise numérica feita nos capítulos 4 e 5 demonstra que a estrutura dos conjuntos caóticos achados nos modelos propostos por Wersinger *et al.* (1980) e Russell e Ott (1981) são muito parecidos (compare-se por exemplo, as selas caóticas de banda e envolvente mostradas nas Figuras 4.14 e 5.11). Numericamente, os dois sistemas comportaram-se de maneira instável ao tentar realizar a integração em tempo reverso (ou seja, a execução de código falhava). Como o algoritmo que calcula a variedade estável de um ponto de sela depende deste tipo de integração, não foi possível determinar diretamente a variedade estável da órbita mediadora, e optou-se

por representá-la através do contorno da variedade estável da sela caótica envolvente (Figura 4.12).

Além dos exemplos enumerados no capítulo 3, existe também a possibilidade futura de detecção de planetas extrasolares magnetizados através de emissões de rádio (STEVENS, 2005). É de se esperar que os planetas fora do sistema solar detectados até hoje usando técnicas indiretas (por exemplo, pequenas variações na posição de uma estrela pela influência gravitacional do planeta) possuam muitas características comuns com o planeta Júpiter, entre elas, a existência de uma magnetosfera. No sistema solar, os planetas que possuem campos magnéticos são fonte de emissões ciclotrônicas de rádio coerentes, onde a intensidade das emissões é proporcional à intensidade do campo magnético, sendo Júpiter o maior emissor no nosso sistema (FAREWELL *et al.*, 2004), o que dá suporte à idéia de detectar exoplanetas através de emissões de rádio. Em contraste com as atuais técnicas, a detecção de exoplanetas através de emissões de rádio oferece uma maior quantidade de informação do planeta, por exemplo, a magnitude e complexidade do campo magnético, o período de rotação do planeta, e a presença de luas magnetizadas dentro da magnetosfera planetária.

Recentemente têm sido feitas algumas tentativas na detecção de planetas extrasolares através de emissões de rádio sem resultados positivos. Por exemplo, Bastian *et al.* (2000) procuraram emissões em oito planetas extrasolares conhecidos, através de três frequências (74 MHz, 333 MHz e 1465 MHz) usando o radiotelescópio *Very Large Array* (VLA). Nesse trabalho são enumeradas uma série de possíveis razões da falta de fontes de rádio, uma delas sendo a falta de sensibilidade do radiotelescópio. Segundo Bastian *et al.* (2000), seria necessário aumentar em duas ou três vezes a sensibilidade do VLA para detectar as emissões de rádio do tipo-Júpiter desde distâncias típicas de planetas extrasolares. Este problema deveria ser resolvido com o funcionamento do projeto LOFAR (do inglês *Low Frequency Array*), que será capaz de detectar frequências no intervalo de 10 a 240 MHz, e o projeto SKA (*Square Kilometre Array*) cujo limiar de sensibilidade será tal que permitirá detectar sinais análogas às transmissões de televisão terrestres em exoplanetas (LAZIO *et al.*, 2004).

Os processos de interação onda-onda não lineares estudados neste trabalho podem providenciar mecanismos alternativos às emissões ciclotrônicas de maser para explicar a geração de emissões de rádio planetárias do sistema solar e extrasolares (WU *et al.*, 1983; LOPES; CHIAN, 1996). Os resultados apresentados mostram que os sinais de emissões de rádio planetárias podem ser tanto periódicas como caóticas. Os sinais

caóticos apresentam padrões intermitentes em séries temporais.

Embora a aplicação deste trabalho esteja orientada para plasmas espaciais, as técnicas utilizadas podem servir para o estudo e controle de plasmas de fusão em laboratórios. Nesta área, o projeto ITER (*International Thermonuclear Experimental Reactor*) representa o principal esforço internacional para recriar os processos de fusão termonuclear existentes no interior das estrelas numa máquina de tipo tokamak, e depois de 20 anos de planejamentos atraiu novamente a atenção da comunidade de pesquisa em plasmas, em junho deste ano, ao decidir o local de construção do projeto em Cadarache, ao sul da França (CLERY; NORMILE, 2005).

Em resumo, o estudo da dinâmica não-linear de interação onda-onda pode contribuir para o progresso tanto da física de plasma espacial como da física de fusão termonuclear controlada.



## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALLIGOOD, K. T.; SAUER, T. D.; YORKE, J. A. **Chaos: an introduction to dynamical systems**. [S.l.]: Springer-Verlag, 1996. 603 p. 28, 32, 33, 34, 35, 38, 39, 40, 98
- BASTIAN, T. S.; DULK, G. A.; LEBLANC, Y. A search for radio emission from extrasolar planets. **The Astrophysical Journal**, v. 545, p. 1058–1063, 2000. 138
- BITTENCOURT, J. A. **Fundamentals of Plasma Physics**. 2 ed.. ed. [S.l.]: FAPESP, 1995. 676 p. 43
- BOEHM, M. H.; CARLSON, C. W.; MCFADDEN, J. P.; CLEMMONS, J. H.; MOZER, F. S. High-resolution sounding rocket observations of large-amplitude Alfvén waves. **Journal Geophysics Research**, v. 95, n. A8, p. 12157–12171, 1990. 87, 88, 89, 90
- CHEN, F. F. **Introduction to plasma physics and controlled fusion**. 2. ed. [S.l.]: Plenum Press, 1984. 421 p. 43, 45, 47, 48, 49, 73
- CHIAN, A. C.-L. Nonlinear Alfvén wave phenomena in the planetary magnetosphere. **Physica Scripta**, T60, p. 36–43, 1995. 64
- CHIAN, A. C.-L.; ABALDE, J. R. Nonlinear modulation of Langmuir waves by ion-acoustic waves in the interplanetary medium and planetary foreshocks. **Astronomy and Astrophysics**, v. 298, p. L9–L12, 1995. 51, 52, 53, 64
- \_\_\_\_\_. Nonlinear coupling of Langmuir waves with whistler waves in the solar wind. **Solar Physics**, v. 184, p. 403–419, 1999. 59, 60, 62, 63
- CHIAN, A. C.-L.; BOROTTO, F. A.; LOPES, S. R.; ABALDE, J. R. Chaotic dynamics of nonthermal planetary radio emissions. **Planetary and Space Science**, v. 48, p. 9–21, 2000. 64, 67, 68, 70, 97
- CHIAN, A. C.-L.; LOPES, S. R.; ALVES, M. V. Nonlinear excitation of Langmuir and Alfvén waves by auroral whistler waves in the planetary magnetosphere. **Astronomy and Astrophysics**, v. 288, p. 981–984, 1994. 64
- CHIAN, A. C.-L.; REMPEL, E. R.; BOROTTO, F. A.; ROGERS, C. An example of intermittency in nonlinear economic cycles. **Applied Economics Letters**, 2005. 28

CLERY, D.; NORMILE, D. ITER finds a home – with a whopping mortgage. **Science**, v. 309, n. 5731, p. 28–29, 2005. 139

FAREWELL, W. M.; LAZIO, T. J. W.; ZARKA, P.; BASTIAN, T. J.; DESCH, M. D.; RYABOV, B. P. The radio search for extrasolar planets with LOFAR. **Planetary and Space Science**, v. 52, p. 1469–1478, 2004. 138

FIEDLER-FERRARA, N.; PRADO, C. P. C. do. **Caos, uma introdução**. [S.l.]: Ed. Edgard Blücher Ltda., 1994. 41

GIBSON, S. E.; NEWMAN, D. L.; GOLDMAN, M. V. Langmuir turbulence and three-wave nonlinear dynamics. **Physical Review E**, v. 52, n. 1, p. 558–571, 1995. 50, 98

GLASS, L.; MACKEY, M. C. **From Clocks to Chaos: the rhythms of life**. [S.l.]: Princeton University Press, 1998. 28

GOLDMAN, M. V. Strong turbulence of plasma waves. **Reviews of Modern Physics**, v. 56, n. 4, p. 709–735, Oct. 1984. 83

GREBOGI, C.; OTT, E.; YORKE, J. A. Crises, sudden changes in chaotic attractors, and transient chaos. **Physica D**, v. 7, p. 181–200, 1983. 111

GUEDE, J. A. **Dinâmica não linear de Ondas de Langmuir e eletromagnéticas em Plasma Espaciais**. São José dos Campos, SP, nov. 1995. 47, 51

HIDALGO, C.; SÁNCHEZ, E.; ESTRADA, T.; NAS, B. B.; RITZ, C. P. Experimental evidence of three-wave coupling on plasma turbulence. **Physical Review Letters**, v. 71, n. 19, p. 3127–3130, Nov. 1993. 28

HILBORN, R. C. **Chaos and nonlinear dynamics: an introduction for scientists and engineers**. [S.l.]: Oxford University Press, 1994. 110

HSU, G.-H.; OTT, E.; GREBOGI, C. Strange saddles and the dimensions of their invariant manifolds. **Physics Letters A**, v. 127, n. 4, p. 199–204, 1988. 100, 102, 105, 107, 117

KAPLAN, D.; GLASS, L. **Understanding Nonlinear Dynamics**. [S.l.]: Springer-Verlag, 1995. 27



KARLICKÝ, M. Series of high-frequency slowly drifting structures mapping the flare magnetic field reconnection. **Astronomy and Astrophysics**, v. 417, p. 325–332, 2004. 79

KARLICKÝ, M.; BÁRTA, M. Diagnostics of solar flare reconnection. **Nonlinear Processes in Geophysics**, v. 11, p. 471–483, 2004. 77, 79, 80, 81, 82

KELLOGG, P. J.; GOETZ, K.; LIN, N.; MONSON, S. J.; BALOGH, A.; FORSYTH, R. J.; STONE, R. G. Low frequency magnetic signals associated with Langmuir waves. **Geophysical Research Letters**, v. 353, n. 2, p. 757–770, Jan. 1992. 47, 83, 84, 85

KHOTYAINTSEV, Y.; VAIVADS, A.; OGAWA, Y.; POPIELAWSKA, B.; ANDRÉ, M.; BUCHERT, S.; DÉCRÉAU, P.; LAVRAUD, B.; RÈME, H. Cluster observations of high-frequency waves in the exterior cusp. **Annales Geophysicae**, v. 22, p. 2403–2411, 2004. 91, 93, 94, 95

KIVELSON, M. G.; RUSSELL, C. T. **Introduction to space physics**. [S.l.]: Cambridge University Press, 1995. 137

LAZIO, T. J. W.; TARTER, J. C.; WILNER, D. J. The cradle of life. **New Astronomy Reviews**, v. 48, p. 985–991, 2004. 138

LIN, N.; KELLOGG, P. J.; MACDOWALL, R. J.; BALOGH, A.; FORSYTH, R. J.; PHILLIPS, J. L.; BUTTIGHOFFER, A.; PICK, M. Observations of plasma waves in magnetic fields. **Geophysical Research Letters**, v. 22, n. 23, p. 3417–3420, Dez. 1995. 84, 86, 87

LOPES, S. R.; CHIAN, A. C.-L. A coherent nonlinear theory of auroral Langmuir-Alfvén-whistler (LAW) events in the planetary magnetosphere. **Astronomy and Astrophysics**, v. 305, p. 669–676, 1996. 64, 138

\_\_\_\_\_. Controlling Chaos in nonlinear three-wave coupling. **Physical Review E**, v. 54, n. 1, p. 170–174, 1996b. 137

MACDOWALL, R. J.; LIN, N.; MCCOMAS, D. J. Langmuir wave activity: comparing the ulysses solar minimum and solar maximum orbits. **Space Science Reviews**, v. 97, p. 141–146, 2001. 84

\_\_\_\_\_. Heliospheric Langmuir wave observations from the ulysses spacecraft. **Advances in Space Research**, v. 32, n. 4, p. 479–483, 2003. 84

MILLIGEN, B. P. van; HIDALGO, C.; SÁNCHEZ, E. Nonlinear phenomena and intermittency in plasma turbulence. **Physical Review Letters**, v. 74, n. 3, p. 395–398, Jan. 1995. 28

MIRANDA, R. A.; REMPEL, E. L.; CHIAN, A. C.-L.; BOROTTO, F. A. Intermittent chaos in nonlinear wave-wave interactions in space plasmas. **Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics**, *in press*, 2005. 122, 123, 125, 126

NICHOLSON, D. R. **Introduction to Plasma Theory**. 1 ed.. ed. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1983. 292 p. 27, 44, 45, 50, 71

NUSSE, H. E.; YORKE, J. A. A procedure for finding numerical trajectories on chaotic saddles. **Physica D**, v. 36, p. 137–156, 1989. 100, 105, 107, 108, 118

OTT, E. **Chaos in dynamical systems**. [S.l.]: Cambridge Univ. Press, 1993. 385 p. 36

PARKER, T. S.; CHUA, L. O. **Practical numerical algorithms for chaotic systems**. [S.l.]: Springer-Verlag, 1989. 348 p. 40

PEIERLS, R. E. **Quantum theory of solids**. [S.l.]: Oxford University Press, 1955. 205 p. 51

POMEAU, Y.; MANNEVILLE, P. Intermittent transition to turbulence in dissipative dynamical systems. **Communications in Mathematical Physics**, v. 74, p. 189–197, 1980. 103, 129

REMPEL, E. L. **Análise de conjuntos caóticos atrativos e não-atrativos em sistemas dinâmicos de baixa e alta dimensão: aplicação para a dinâmica de ondas de plasma na conexão Sol-terra**. São José dos Campos, SP, 2003. 37, 108, 112

REMPEL, E. L.; CHIAN, A. C.-L.; BOROTTO, F. A. Chaotic temporal variability of magnetospheric radio emissions. **Space Science Reviews**, v. 107, p. 503–506, 2003. 69, 70

REMPEL, E. L.; CHIAN, A. C.-L.; MACAU, E. E. N.; ROSA, R. R. Analysis of chaotic saddles in low-dimensional dynamical systems: the derivative nonlinear Schrödinger equation. **Physica D**, v. 199, n. 3-4, p. 407–424, 2004. 100

- ROBINSON, P. A. Nonlinear wave collapse and strong turbulence. **Reviews of Modern Physics**, v. 69, n. 2, p. 507–573, Abril 1997. 121
- ROBINSON, P. A.; CAIRNS, I. H.; SMITH, N. I. Unified theory of monochromatic and broadband modulational and decay instabilities of langmuir waves. v. 9, n. 10, p. 4149–4159, 2002. 71, 121
- RÖSSLER, O. An equation for continuous chaos. **Physics Letters A**, v. 57, n. 5, p. 397, 1976. 33
- RUSSELL, D. A.; OTT, E. Chaotic (strange) and periodic behavior in instability saturation by the oscillating two-stream instability. **Physics of Fluids**, v. 24, n. 11, p. 1976–1988, 1981. 29, 69, 71, 72, 73, 74, 76, 121, 122, 137
- SARTORELLI, J. C.; GONÇALVES, W. M.; PINTO, R. D. Crisis and intermittence in a leaky-faucet experiment. **Physical Review E**, v. 49, n. 5, p. 3963–3975, Maio 1994. 28
- STEVENS, I. R. Magnetospheric radio emission from extrasolar giant planets: the role of the host stars. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 356, p. 1053–1063, 2005. 138
- STROGATZ, S. H. **Nonlinear dynamics and Chaos**. [S.l.]: Perseus Books Publishing, 1994. 38
- SZABÓ, K. G.; LAI, Y.-C.; TÉL, T.; GREBOGI, C. Critical exponent for gap filling at crisis. **Physical Review Letters**, v. 77, p. 3102–3105, 1996. 102, 104, 112, 129
- SZABÓ, K. G.; TEL, T. Transient Chaos as the backbone of dynamics on strange attractors. **Physics Letters A**, v. 196, p. 173–180, 1994. 112
- TSURUTANI, B. T.; LAKHINA, G. S. Some basic concepts of wave-particle interactions in collisionless plasmas. **Reviews of Geophysics**, v. 35, n. 4, p. 491–502, Nov. 1997. 47
- VAIVADS, A.; KHOTYAINTSEV, Y.; ANDRÉ, M.; RETINÒ, A.; BUCHERT, S. C.; ROGERS, B. N.; DÉCRÉAU, P.; PASCHMANN, G.; PHAN, T. D. Cluster observations of high-frequency waves in the exterior cusp. **Physical Review Letters**, v. 93, n. 10, 2004. 92

VOITENKO, Y.; GOOSSENS, M.; SIRENKO, O.; CHIAN, A. C.-L. Nonlinear excitation of kinetic Alfvén waves and whistler waves by electron beam-driven Langmuir waves in the solar corona. **Astronomy and Astrophysics**, v. 409, p. 331–345, 2003. 54, 55, 58, 59, 60

WERSINGER, J.-M.; FINN, J. M.; OTT, E. Bifurcation and “strange” behavior in instability saturation by nonlinear three-wave mode coupling. **Physics of Fluids**, v. 23, n. 6, p. 1142–1154, 1980. 28, 97, 137

WOLF, A.; SWIFT, J. B.; SWINNEY, H. L.; VASTANO, J. A. Determining Lyapunov exponents from a time-series. **Physica D**, v. 16, p. 285–317, 1985. 39, 98

WOO, R. Kilometre-scale structures in the sun’s corona. **Reviews of Modern Physics**, v. 379, p. 321–311, Jan. 1996. 55

WU, C. S.; DILLENBURG, D.; ZIEBELL, L. F.; FREUND, H. P. Excitation of whistler waves by reflected auroral electrons. **Planetary and Space Science**, v. 31, n. 5, p. 499–507, 1983. 138

ZAKHAROV, V. E. Collapse of Langmuir waves. **Soviet Physics-JETP**, v. 35, n. 5, p. 908–914, 1972. 53

\_\_\_\_\_. **Handbook of plasma physics**. [S.l.]: Amsterdam:North-Holland, 1984. 49

## APÊNDICE A

### EQUAÇÕES DE ZAKHAROV E SCHRÖDINGER NÃO LINEAR

#### A.1 Derivação das equações de Zakharov

As equações de Zakharov podem ser obtidas à partir das seguintes equações:

$$\frac{\partial \mathbf{V}_\alpha}{\partial t} + (\mathbf{V}_\alpha \cdot \nabla) \mathbf{V}_\alpha = \frac{q}{m} (\mathbf{E} + \mathbf{V}_\alpha \times \mathbf{B}) - \nu_\alpha \mathbf{V}_\alpha - \frac{\gamma_\alpha K_B T_\alpha \nabla n_\alpha}{n_\alpha m_\alpha} \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (n_\alpha \mathbf{V}_\alpha) = 0 \quad (\text{A.2})$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{A.3})$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (\text{A.4})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (\text{A.5})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (\text{A.6})$$

Onde (A.1) é a equação de movimento, (A.2) representa a equação da continuidade, e (A.3) - (A.6) são as equações de Maxwell.

Se derivamos (A.4) com relação a  $t$ :

$$\nabla \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mu_0 \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (\text{A.7})$$

Aplicando o rotacional em (A.3) tem-se:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\nabla \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{A.8})$$

E, substituindo (A.8) em (A.7) obtém-se:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (\text{A.9})$$

O que representa a equação de onda eletromagnética na presença de correntes.

Considerando duas escalas de tempo, e supondo a quase-neutralidade do plasma, podemos definir as seguintes aproximações para a linearização:

$$\begin{aligned}
n_e &= n_0 + n_l + n_h \\
n_i &= n_0 + n_l \\
\mathbf{V}_e &= \mathbf{V}_l + \mathbf{V}_h \\
\mathbf{J} &= \mathbf{J}_l + \mathbf{J}_h \\
\mathbf{E} &= \mathbf{E}_l + \mathbf{E}_h
\end{aligned}$$

Onde o subíndice 0 representa o valor não perturbado da variável, o subíndice  $l$  indica termos de baixa frequência (escala lenta) e  $h$  termos de alta frequência (escala rápida).

Inserindo as variáveis linearizadas em (A.2) e mantendo os termos de alta frequência obtém-se:

$$\frac{\partial n_h}{\partial t} + (n_0 + n_l)\nabla \cdot \mathbf{V}_h = 0$$

No caso da equação de movimento (A.1) para os elétrons obtém-se:

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{V}_h = -\frac{e}{m_e}\mathbf{E}_h - \frac{e}{m_e}(\mathbf{V}_h \times \mathbf{B}) - \nu_e\mathbf{V}_h - \frac{\gamma K_B T_e \nabla n_h}{(n_0 + n_h)m_e} \quad (\text{A.10})$$

Onde os termos de baixa frequência, e os harmônicos das perturbações foram ignorados.

Linearizando a equação da onda eletromagnética (A.9):

$$\begin{aligned}
\nabla \times \nabla \times (\mathbf{E}_l + \mathbf{E}_h) &= -\nu_0 \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{J}_l + \mathbf{J}_h) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\mathbf{E}_l + \mathbf{E}_h) \\
\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_h &= -\nu_0 \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{J}_h - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{E}_h
\end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Temos que a densidade de corrente:

$$\mathbf{J} = e(n_i \mathbf{V}_i - n_e \mathbf{V}_e),$$

e que considerando apenas os termos na escala rápida (alta frequência):

$$\mathbf{J}_h = -e(n_0 + n_l) \mathbf{V}_h \quad (\text{A.12})$$

Ao substituir A.12 em A.11 é possível obter:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E}_h + \nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_h = \mu_0 e (n_0 + n_l) \frac{\partial \mathbf{V}_h}{\partial t} \quad (\text{A.13})$$

Linearizando a equação de Maxwell-Gauss (A.5), e mantendo os termos de alta frequência tem-se:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E}_h &= -\frac{en_h}{\varepsilon_0} \\ -\frac{\varepsilon_0}{e} \nabla \cdot \mathbf{E}_h &= n_h \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Aplicando o gradiente obtém-se:

$$-\frac{\varepsilon_0}{e} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}_h) = \nabla n_h \quad (\text{A.15})$$

Substituindo (A.15) em (A.10), e considerando que o efeito das ondas de Langmuir eletrostáticas sobre o campo magnético é nulo, o termo  $\mathbf{V}_h \times \mathbf{B}$ , na equação (A.10) pode ser ignorado.

$$\frac{\partial \mathbf{V}_h}{\partial t} = -\frac{e}{m_e} \mathbf{E}_h - \nu_e \mathbf{E}_h + \frac{\gamma K_B T_e \varepsilon_0 \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}_h)}{em_e (n_0 + n_h)} \quad (\text{A.16})$$

Aplicando A.16 na equação A.13:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}_h}{\partial t^2} + \nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_h + \frac{\mu_0 e^2}{m_e} (n_0 + n_l) \mathbf{E}_h + \mu_0 \nu_e e (n_0 + n_l) \mathbf{V}_h - \frac{\mu_0 \varepsilon_0 \gamma_e K_B T_e \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}_h)}{m_e} = 0 \quad (\text{A.17})$$

Lembrando que a frequência de plasma e a velocidade térmica dos elétrons são dadas por:

$$\begin{aligned} \omega_{pe}^2 &= \frac{n_0 e^2}{\varepsilon_0 m_e} \\ v_{th}^2 &= \frac{K_B T_e}{m_e} \end{aligned}$$

De (A.17) obtém-se a seguinte relação:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{E}_h}{\partial t^2} + c^2 \nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_h + \omega_{pe}^2 \mathbf{E}_h + \frac{\mu_0 \nu_e}{\varepsilon_0} e (n_0 + n_l) \mathbf{V}_h - \gamma_e v_{th}^2 \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}_h) \\ = -\omega_{pe}^2 \frac{n_l}{n_0} \mathbf{E} \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Mas, da lei de Ampère, considerando que  $\nabla \times (\mathbf{B}_l + \mathbf{B}_h) \ll \partial(\mathbf{E}_l + \mathbf{E}_h)/\partial t$ :

$$\begin{aligned} -\mu_0 e (n_0 + n_l) \mathbf{V}_h &= -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}_h}{\partial t} \\ \mathbf{V}_h &= \frac{\varepsilon_0}{\mu_0 e (n_0 + n_l)} \frac{\partial \mathbf{E}_h}{\partial t} \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

Levando (A.19) em (A.18):



$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{E}_h}{\partial t^2} + c^2 \nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_h + \omega_{pe}^2 \mathbf{E}_h + \nu_e \frac{\partial \mathbf{E}_h}{\partial t} - \gamma_e v_{th}^2 \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}_h) &= -\omega_{pe}^2 \frac{n_l}{n_0} \mathbf{E}_h \\ \left[ \frac{\partial^2}{\partial t^2} + c^2 \nabla \times (\nabla \times) + \omega_{pe}^2 + \nu_e \frac{\partial}{\partial t} - \gamma_e V_{th}^2 \nabla (\nabla \cdot) \right] \mathbf{E}_h &= -\omega_{pe}^2 \frac{n_l}{n_0} \mathbf{E}_h \quad (\text{A.20}) \end{aligned}$$

A equação A.20 descreve a evolução não linear de uma onda de Langmuir propagando-se no sentido paralelo ao campo magnético ambiental, e é a primeira das *equações generalizadas de Zakharov*.

É possível analisar também a parte lenta das nossas equações iniciais. Na equação de movimento (A.1) para os elétrons temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{V}_l}{\partial t} + (\mathbf{V}_l \cdot \nabla) \mathbf{V}_l + \langle (\mathbf{V}_h \cdot \nabla) \mathbf{V}_h \rangle + \frac{e}{m_e} \mathbf{E}_l + \frac{e}{m_e} \langle \mathbf{V}_h \times \mathbf{B} \rangle \\ + \frac{\gamma_e K_B T_e \nabla n_l}{n_0 m_e} + \nu_e \mathbf{V}_l = 0 \quad (\text{A.21}) \end{aligned}$$

Mas

$$\frac{\partial \mathbf{V}_h}{\partial t} = -\frac{e}{m_e} \mathbf{E}_h \Rightarrow \mathbf{E}_h = -\frac{m_e}{e} \frac{\partial \mathbf{V}_h}{\partial t} \quad (\text{A.22})$$

Substituindo A.22 na equação de Faraday A.3, e considerando os termos de escala rápida, obtemos:

$$\mathbf{B}_h = \frac{m_e}{e} \nabla \times \mathbf{V}_h \quad (\text{A.23})$$

Usando A.23 podemos escrever os termos da equação (A.21) da seguinte maneira:

$$\langle (\mathbf{V}_h \cdot \nabla) \mathbf{V}_h \rangle + \frac{e}{m_e} \langle \mathbf{V}_h \times \mathbf{B} \rangle = \langle (\mathbf{V}_h \cdot \nabla) \mathbf{V}_h + \mathbf{V}_h \times \nabla \times \mathbf{V}_h \rangle \quad (\text{A.24})$$

E usando a identidade vetorial:

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} + (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B})$$

Tem-se que A.24 é equivalente a:

$$\langle (\mathbf{V}_h \cdot \nabla)\mathbf{V}_h \rangle + \frac{e}{m_e} \langle \mathbf{V}_h \times \mathbf{B}_h \rangle = \frac{1}{2} \nabla(\mathbf{V}_h \cdot \mathbf{V}_h) \quad (\text{A.25})$$

De A.23 tem-se que:

$$m_e \frac{\partial \mathbf{V}_h}{\partial t} = -e \mathbf{E}_h$$

Mas, supondo-se que a velocidade  $\mathbf{V}_h \propto e^{-i\omega_r t}$ , obtém-se  $\partial/\partial t = -i\omega_r$ , e

$$\mathbf{V}_h = \frac{-ie \mathbf{E}_h}{\omega_r m_e} \quad (\text{A.26})$$

Substituindo A.26 no resultado obtido em A.25 obtemos:

$$\frac{1}{2} \nabla(\mathbf{V}_h \cdot \mathbf{V}_h) = \frac{1}{2} \frac{e^2}{\omega_r^2 m_e^2} \nabla \langle E_h^2 \rangle \quad (\text{A.27})$$

E substituindo (A.27) em (A.21):

$$\frac{\partial \mathbf{V}_l}{\partial t} + (\mathbf{V}_l \cdot \nabla)\mathbf{V}_l + \frac{e}{m_e} \mathbf{E}_l + \frac{\gamma_e K_B T_e \nabla n_l}{n_0 m_e} + \nu_e \mathbf{V}_l + \frac{1}{2} \frac{e^2}{\omega_r^2 m_e^2} \nabla \langle E_h^2 \rangle = 0 \quad (\text{A.28})$$

No caso dos íons, a equação de movimento é da forma:

$$\frac{\partial \mathbf{V}_l}{\partial t} + (\mathbf{V}_l \cdot \nabla)\mathbf{V}_l - \frac{e}{m_e} \mathbf{E}_l + \frac{\gamma_e K_B T_i \nabla n_{il}}{n_0 m_i} + \nu \mathbf{V}_{il} + \frac{1}{2} \frac{e^2}{\omega_r^2 m_i^2} \nabla \langle E_h^2 \rangle = 0 \quad (\text{A.29})$$

Na equação (A.27) podemos pôr em evidência o termo  $\mathbf{E}_l$ :

$$\mathbf{E}_l = \frac{m_e}{e} \left[ -\frac{\partial \mathbf{V}_l}{\partial t} - (\mathbf{V}_l \cdot \nabla) \mathbf{V}_l - \frac{\gamma_e K_B T_e \nabla n_l}{n_0 m_e} - \nu_e \mathbf{V}_l - \frac{1}{2} \frac{e^2}{\omega_r^2 m_e^2} \nabla \langle E_h^2 \rangle \right] \quad (\text{A.30})$$

Assim, pode-se substituir (A.30) em (A.29) para obter-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{V}_l}{\partial t} + (\mathbf{V}_l \cdot \nabla) \mathbf{V}_l + \frac{\gamma_e T_e + \gamma_i T_i}{m_e + m_i} \frac{K_B \nabla n_i}{n_0} + \frac{m_e \nu_e + m_i \nu_i}{m_e + m_i} \mathbf{V}_l \\ + \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0}{n_0 m_i} \nabla \langle E_h^2 \rangle = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

Da equação de continuidade linearizada na escala lenta:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_l}{\partial t} + n_0 \nabla \cdot \mathbf{V}_l &= 0 \\ -\frac{1}{n_0} \frac{\partial n_l}{\partial t} &= \nabla \cdot \mathbf{V}_l \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

Ao aplicar o operador  $\nabla$  na equação (A.31), e logo inserindo a expressão achada em (A.32) (desprezando termos de segunda ordem), obtém-se:

$$-\frac{\partial^2 n_l}{\partial t^2} + \frac{\gamma_e T_e + \gamma_i T_i}{m_e + m_i} K_B \nabla^2 n_l - \frac{m_e \nu_e + m_i \nu_i}{m_e + m_i} \frac{\partial n_l}{\partial t} = -\frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0}{m_i} \nabla^2 \langle E_h^2 \rangle \quad (\text{A.33})$$

Levando em conta que a velocidade ion-acústica é:

$$v_s^2 = \frac{\gamma_e T_e + \gamma_i T_e}{m_i}, \quad m_i \gg m_e$$

E que:

$$\frac{m_e \nu_e + m_i \nu_i}{m_e + m_i} \approx \nu_i$$

A equação (A.33) pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial t^2} - V_s^2 \nabla^2 + \nu_i \frac{\partial}{\partial t} \right] n_l = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0}{m_i} \nabla^2 \langle E_h^2 \rangle \quad (\text{A.34})$$

A equação A.34 representa a evolução não linear de uma onda ion-acústica representada por uma perturbação de baixa frequência na densidade.

Num plasma não magnetizado ( $\mathbf{B} = 0$ ) as equações de Zakharov A.20 A.34 reduzem-se às seguintes equações:

$$(\partial_t^2 + \nu_e \partial_t - \gamma_e v_{th}^2 \nabla^2 + \omega_{pe}^2) \mathbf{E} = -\frac{\omega_{pe}^2}{n_0} n \mathbf{E} \quad (\text{A.35})$$

$$(\partial_t^2 + \nu_i \partial_t - v_S^2 \nabla^2) n = \frac{\varepsilon_0}{2m_i} \nabla^2 \langle E^2 \rangle \quad (\text{A.36})$$

As equações A.35-A.36 são conhecidas como as *equações eletrostáticas de Zakharov*. O termo na direita da equação (A.35) representa o efeito da corrente não linear no plasma, e o termo na direita da equação (A.36) representa o efeito da força ponderomotiva.

## A.2 Derivação da equação Schrödinger não linear, e seu formalismo de interações onda-onda

Considerando uma coleção de ondas Langmuir em uma dimensão, onde o campo elétrico pode ser representado por:

$$E_h(x, t) = \frac{1}{2} \tilde{E}(x, t) \exp(-i\omega_{pe}t) + c.c., \quad (\text{A.37})$$

Onde *c.c.* representa o complexo conjugado, e  $\tilde{E}(x, t)$  representa a amplitude da onda que varia lentamente no espaço e no tempo, ou seja:

$$\left| \frac{\partial^2 \tilde{E}}{\partial t^2} \right| \ll \left| \omega_{pe} \frac{\partial \tilde{E}}{\partial t} \right| \quad (\text{A.38})$$

$$\left| \frac{\partial^2 \tilde{E}}{\partial x^2} \right| \ll \left| \frac{1}{k} \frac{\partial \tilde{E}}{\partial x} \right| \quad (\text{A.39})$$

Substituindo A.37 em A.35, levando em conta apenas os termos proporcionais a  $\exp(-i\omega_{pe}t)$  (ou seja, ignorando os termos que provêm do termo complexo conjugado em A.35) e desprezando alguns termos ao levar em conta as condições A.38 e A.39 obtém-se:

$$\begin{aligned} -i\omega_{pe} \dot{\tilde{E}} \exp(-i\omega_{pe}t) - \frac{1}{2} v_{th}^2 \exp(-i\omega_{pe}t) \frac{\partial^2 \tilde{E}}{\partial x^2} &= -\omega_{pe} \frac{n_{el}}{n_0} \frac{1}{2} \tilde{E} \exp(-i\omega_{pe}t) \\ -i\dot{\tilde{E}} - \frac{1}{2} \gamma_e \frac{v_{th}^2}{\omega_{pe}} \frac{\partial^2 \tilde{E}}{\partial x^2} &= -\frac{1}{2} \omega_{pe} \frac{n_{el}}{n_0} \tilde{E} \end{aligned} \quad (\text{A.40})$$

No caso da equação (A.36):

$$\frac{\partial^2 n_{el}}{\partial t^2} - v_s^2 \frac{\partial^2 n_{el}}{\partial x^2} = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0}{m_i} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\langle \tilde{E} \exp(-i\omega_{pe}t) \right\rangle^2$$

Mas,  $\left\langle \tilde{E} \exp(-i\omega_{pe}t) \right\rangle = |\tilde{E}|$ .

Assim,

$$\frac{\partial^2 n_{el}}{\partial t^2} - v_s^2 \frac{\partial^2 n_{el}}{\partial x^2} = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0}{m_i} \frac{\partial^2}{\partial x^2} |\tilde{E}|^2 \quad (\text{A.41})$$

Neste caso, têm-se que (A.40) e (A.41) são equações que acoplam a amplitude  $\tilde{E}$  complexa do campo elétrico com a perturbação da densidade de baixa frequência  $n_l$ .

Definindo as seguintes variáveis adimensionais no sistema MKS:

$$\begin{aligned}
\eta &= \frac{\gamma_e K_B T_e + \gamma_i K_B T_i}{K_B T_e} \\
z &= \left(\frac{2}{\gamma_e}\right) \left(\frac{\eta m_e}{m_i}\right)^{1/2} \left(\frac{x}{\lambda_D}\right) \\
\tau &= \left(\frac{2}{\gamma_e}\right) \left(\frac{\eta m_e}{m_i}\right) \omega_{pe} t
\end{aligned}$$

De forma tal que os operadores:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial z} &= \left(\frac{\gamma_e}{2}\right) \left(\frac{m_i}{\eta m_e}\right)^{1/2} \lambda_D \frac{\partial}{\partial x} \\
\frac{\partial}{\partial \tau} &= \left(\frac{\gamma_e}{2}\right) \left(\frac{m_i}{\eta m_e}\right) \frac{1}{\omega_{pe}} \frac{\partial}{\partial t}
\end{aligned}$$

E também as variáveis adimensionais para a amplitude e densidade:

$$\begin{aligned}
E &= \left(\frac{1}{\eta}\right) \left(\frac{m_i}{m_e}\right)^{1/2} \left(\frac{\gamma_e \varepsilon_0 \tilde{E}^2}{8n_0 K_B T_e}\right)^{1/2} \\
n &= \left(\frac{\gamma_e}{4}\right) \left(\frac{m_i}{m_e \eta}\right) \left(\frac{n_{el}}{n_0}\right)
\end{aligned}$$

Pode-se achar expressões normalizadas das equações (A.40) e (A.41) em termos destas variáveis. Para isso, é necessário reescrever as equações, como por exemplo na equação A.40:

$$\begin{aligned}
-i\dot{\tilde{E}} - \frac{1}{2}\gamma_e \frac{v_{th}^2}{\omega_{pe}} \frac{\partial^2 \tilde{E}}{\partial x^2} &= -\frac{1}{2}\omega_{pe} \frac{n_{el}}{n_0} \tilde{E} / \cdot \left(\frac{\gamma_e}{2}\right) \left(\frac{m_i}{\eta m_e}\right) \frac{1}{\omega_{pe}} \\
i\frac{\partial E}{\partial \tau} + \left(\frac{1}{2}\gamma_e \frac{v_{th}^2}{\omega_{pe}}\right) \left(\frac{\gamma_e m_i}{2\eta m_e \omega_{pe}}\right) \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} &= \left(\frac{1}{2}\omega_{pe}\right) \left(\frac{\gamma_e m_i}{2\eta m_e \omega_{pe}}\right) \frac{n_{el}}{n_0} E \quad (\text{A.42})
\end{aligned}$$

Lembrando que a velocidade térmica no sistema MKS é dada por:

$$v_{th}^2 = \frac{K_B T_e}{m_e}$$

E que a frequência do plasma:

$$\omega_{pe}^2 = \frac{K_B T_e}{\lambda_D^2 n_e}$$

Portanto,  $v_{th}^2/\omega_{pe}^2 = \lambda_D^2$ .

Substituindo em (A.42):

$$\begin{aligned} i \frac{\partial E}{\partial \tau} + \left(\frac{\gamma_e}{2}\right)^2 \left(\frac{m_i}{\eta m_e}\right) \lambda_D^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} E &= \left(\frac{\gamma_e}{4}\right) \left(\frac{m_i}{\eta m_e}\right) \left(\frac{n_{el}}{n_0}\right) E \\ i \frac{\partial E}{\partial \tau} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} E &= nE \end{aligned} \quad (\text{A.43})$$

No caso da equação (A.41), lembrando que a velocidade acústica é dada por:

$$v_s^2 = \frac{\gamma_e K_B T_e + \gamma_i K_B T_i}{m_i} = \frac{\eta K_B T_e}{m_i} \quad (\text{A.44})$$

E seguindo uma seqüência similar de passos, pode-se chegar à seguinte equação adimensional:

$$\frac{\partial n}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 n}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial z^2} |E|^2 \quad (\text{A.45})$$

No limite estático, têm-se que a perturbação na densidade se desloca auto-consistentemente com o envoltório da onda de Langmuir. O termo  $\partial n/\partial \tau$  na equação (A.45) é zero, logo tem-se:

$$-\frac{\partial^2 n}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial z^2} |E|^2$$

Integrando duas vezes, e fazendo as constantes de integração iguais a zero obtém-se:

$$n = -|E|^2$$

E, substituindo em (A.43):

$$i\frac{\partial E}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + |E|^2 E = 0 \quad (\text{A.46})$$

A equação (A.46) é conhecida como a equação não linear de Schrödinger (NLS), já que tem a estrutura da equação de Schrödinger da mecânica quântica. Nesta equação a onda ion-acústica está implícita no termo não linear. Russell e Ott (1981) acrescentam um termo que representa o crescimento ou amortecimento linear das ondas:

$$i\left(\frac{\partial E}{\partial t} + \hat{\gamma}E\right) + \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + (|E|^2 - |E|_0^2)E = 0, \quad (\text{A.47})$$

onde voltamos a utilizar as variáveis  $x$  e  $t$ , seguindo a notação utilizada por Russell e Ott (1981). O termo  $|E|_0^2$  representa a media espacial de  $|E|^2$ .

Considere-se a seguinte solução aproximada de (A.47), que consiste em três ondas propagantes:

$$E(x, t) = E_0(t) \exp[-i(k_0 x - \omega_0 t)] + E_1(t) \exp[-i(k_1 x - \omega_1 t)] + E_2(t) \exp[-i(k_2 x - \omega_2 t)] \quad (\text{A.48})$$

Agora será feita a substituição de A.48 em A.47 supondo a condição de ressonância  $2k_0 = k_1 + k_2$ , a relação de dispersão  $\omega_\sigma = -k_\sigma^2$  ( $\sigma = 0, 1, 2$ ), e  $\omega_{1,2} = \omega_0 = \delta_{1,2}$ .

- O primeiro termo à esquerda de A.47:



$$\begin{aligned}
\frac{\partial E}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \{E_0 \exp[-i(k_0 x - \omega_0 t)] + E_1 \exp[-i(k_1 x - \omega_1 t)] \\
&\quad + E_2 \exp[-i(k_2 x - \omega_2 t)]\} \\
&= \dot{E}_0 \exp[-i(k_0 x - \omega_0 t)] + i\omega_0 E_0 \exp[-i(k_0 x - \omega_0 t)] \\
&\quad + \dot{E}_1 \exp[-i(k_1 x - \omega_1 t)] + i\omega_1 E_1 \exp[-i(k_1 x - \omega_1 t)] \\
&\quad + \dot{E}_2 \exp[-i(k_2 x - \omega_2 t)] + i\omega_2 E_2 \exp[-i(k_2 x - \omega_2 t)] \quad (\text{A.49})
\end{aligned}$$

- O termo da segunda derivada espacial em A.47:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \{(-ik_0)E_0 \exp[-i(k_0 x - \omega_0 t)] + (-ik_1)E_1 \exp[-i(k_1 x - \omega_1 t)] \\
&\quad + (-ik_2)E_2 \exp[-i(k_2 x - \omega_2 t)]\} \\
&= -k_0^2 E_0 \exp[-i(k_0 x - \omega_0 t)] - k_1^2 E_1 \exp[-i(k_1 x - \omega_1 t)] \\
&\quad - k_2^2 E_2 \exp[-i(k_2 x - \omega_2 t)] \quad (\text{A.50})
\end{aligned}$$

Substituindo (A.49) e (A.50) em (A.47):

$$\begin{aligned}
\dot{E}_0 \exp[-i(k_0 x - \omega_0 t)] + \dot{E}_1 \exp[-i(k_1 x - \omega_1 t)] \\
+ \dot{E}_2 \exp[-i(k_2 x - \omega_2 t)] = -\hat{\gamma}E + i|E|^2 E \quad (\text{A.51})
\end{aligned}$$

Agora expandirá-se o termo não linear (cúbico) da equação A.47. Lembrando que a amplitude do campo elétrico é uma variável complexa, têm-se:

$$|E|^2 E = E^2 \bar{E} \quad (\text{A.52})$$

Para simplificar a visualização durante a expansão, vamos definir os seguintes símbolos:

$$\begin{aligned}
e_0 &= \exp[-i(k_0x - \omega_0t)] \\
e_1 &= \exp[-i(k_1x - \omega_1t)] \\
e_2 &= \exp[-i(k_2x - \omega_2t)]
\end{aligned}$$

Do termo não linear, e fazendo uso de (A.52) obtém-se:

$$\begin{aligned}
(|E|^2 - |E|_0^2)E &= (E_0e_0 + E_1e_1 + E_2e_2)^2 \overline{(E_0e_0 + E_1e_1 + E_2e_2)} \\
&= E_0^2 \bar{E}_1 e_0^2 \bar{e}_1 + E_0^2 \bar{E}_2 e_0^2 \bar{e}_2 \\
&\quad + \bar{E}_0 E_1^2 \bar{e}_0 e_1^2 + E_1^2 \bar{E}_2 e_1^2 \bar{e}_2 \\
&\quad + \bar{E}_0 E_2^2 \bar{e}_0 e_2^2 + \bar{E}_1 E_2^2 \bar{e}_1 e_2^2 \\
&\quad + E_0 \bar{E}_0 E_1 e_0 \bar{e}_0 e_1 + E_0 E_1 \bar{E}_1 e_0 e_1 \bar{e}_1 + 2E_0 E_1 \bar{E}_2 e_0 e_1 \bar{e}_2 \\
&\quad + E_0 \bar{E}_0 E_2 e_0 \bar{e}_0 e_2 + 2E_0 \bar{E}_1 E_2 e_0 \bar{e}_1 e_2 + E_0 E_2 \bar{E}_2 e_0 e_2 \bar{e}_2 \\
&\quad + 2\bar{E}_0 E_1 E_2 \bar{e}_0 e_1 e_2 + E_1 \bar{E}_1 E_2 e_1 \bar{e}_1 e_2 + E_1 E_2 \bar{E}_2 e_1 e_2 \bar{e}_2 \quad (\text{A.53})
\end{aligned}$$

Analisando cada um dos 18 termos em forma separada:

$$\begin{aligned}
E_0^2 \bar{E}_1 e_0^2 \bar{e}_1 &= E_0^2 \bar{E}_1 \exp[-i(k_0x - \omega_0t)]^2 \exp[i(k_0x - \omega_0t)] \\
&= E_0^2 \bar{E}_1 \exp[-i(k_0x - \omega_0t)] \quad (\text{A.54})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_1^2 \bar{E}_2 e_1^2 \bar{e}_2 &= E_1^2 \bar{E}_2 \exp[-i(k_1x - \omega_1t)]^2 \exp[i(k_1x - \omega_1t)] \\
&= E_1^2 \bar{E}_2 \exp[-i(k_1x - \omega_1t)] \quad (\text{A.55})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_2^2 \bar{E}_2 e_2^2 \bar{e}_2 &= E_2^2 \bar{E}_2 \exp[-i(k_2x - \omega_2t)]^2 \exp[i(k_2x - \omega_2t)] \\
&= E_2^2 \bar{E}_2 \exp[-i(k_2x - \omega_2t)] \quad (\text{A.56})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{E}_0 E_1^2 \bar{e}_0 e_1^2 &= \bar{E}_0 E_1^2 \exp[i(k_0 x - \omega_0 t)] \exp[-2i(k_0 x - \omega_0 t)] \\
&= \bar{E}_0 E_1^2 \exp\{-i[(2k_1 - k_0)x - (2\omega_1 - \omega_0)t]\} \quad (\text{A.57})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_0^2 \bar{E}_1 e_0^2 \bar{e}_1 &= E_0^2 \bar{E}_1 \exp[-2i(k_0 x - \omega_0 t)] \exp[i(k_1 x - \omega_1 t)] \\
&= E_0^2 \bar{E}_1 \exp\{-i[(2k_0 - k_1)x - (2\omega_0 - \omega_1)t]\} \\
&= E_0^2 \bar{E}_1 \exp\{-i[(k_1 + k_2 - k_1)x - (2\omega_0 - \omega_1 + \omega_2 - \omega_2)t]\} \\
&= E_0^2 \bar{E}_1 \exp\{-i[k_2 x - \omega_2 t - (\omega_0 - \omega_1 + \omega_0 - \omega_2)t]\} \\
&= E_0^2 \bar{E}_1 \exp[-i(k_2 x - \omega_2 t)] \exp[-i(\delta_1 + \delta_2)t] \\
&= E_0^2 \bar{E}_1 \exp[-i(k_2 x - \omega_2 t)] \exp[-2i\delta t] \quad (\text{A.58})
\end{aligned}$$

$$E_0^2 \bar{E}_2 e_0^2 \bar{e}_2 = E_0^2 \bar{E}_2 \exp[-i(k_1 x - \omega_1 t)] \exp[-2i\delta t] \quad (\text{A.59})$$

$$\begin{aligned}
E_1^2 \bar{E}_0 e_1^2 \bar{e}_2 &= E_1^2 \bar{E}_2 \exp[-2i(k_1 x - \omega_1 t)] \exp[i(k_2 x - \omega_2 t)] \\
&= E_1^2 \bar{E}_2 \exp\{-i[(2k_1 - k_2)x - (2\omega_1 - \omega_2)t]\} \\
&= E_1^2 \bar{E}_2 \exp\{-i[(2k_1 - 2k_0 + k_1)x - (2\omega_1 - \omega_2)t]\} \\
&= E_1^2 \bar{E}_2 \exp\{-i[(3k_1 - 2k_0)x - (2\omega_1 - \omega_2)t]\} \quad (\text{A.60})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{E}_0 E_2^2 \bar{e}_0 e_2^2 &= \bar{E}_0 E_2^2 \exp[i(k_0 x - \omega_0 t)] \exp[-2i(k_2 x - \omega_2 t)] \\
&= \bar{E}_0 E_2^2 \exp\{-i[(2k_2 - k_0)x - (2\omega_2 - \omega_0)t]\} \quad (\text{A.61})
\end{aligned}$$

$$E_2^2 \bar{E}_1 e_2^2 \bar{e}_1 = E_2^2 \bar{E}_2 \exp\{-i[(3k_2 - 2k_0)x - (2\omega_2 - \omega_1)t]\} \quad (\text{A.62})$$

$$\begin{aligned}
E_0 \bar{E}_0 E_1 e_0 \bar{e}_0 e_1 &= E_0 \bar{E}_0 E_1 \exp[-i(k_1 x - \omega_1 t)] \\
&= |E_0|^2 E_1 \exp[-i(k_1 x - \omega_1 t)] \quad (\text{A.63})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_0 \bar{E}_1 E_1 e_0 \bar{e}_1 e_1 &= E_0 \bar{E}_1 E_1 \exp[-i(k_0 x - \omega_0 t)] \\
&= |E_1|^2 E_0 \exp[-i(k_0 x - \omega_0 t)] \quad (\text{A.64})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2E_0E_1\bar{E}_2e_0e_1e_2 &= 2E_0E_1\bar{E}_2 \exp[-i(k_0x - \omega_0t)] \exp[-i(k_1x - \omega_1t)] \exp[i(k_2x - \omega_2t)] \\
&= 2E_0E_1\bar{E}_2 \exp\{-i[(k_0 + k_1 - k_2)x - (\omega_0 + \omega_1 - \omega_2)t]\} \\
&= 2E_0E_1\bar{E}_2 \exp\{-i[(k_0 + k_1 - 2k_0 + k_1)x - (\omega_0 + \omega_1 - \omega_2)t]\} \\
&= 2E_0E_1\bar{E}_2 \exp\{-i[(2k_1 - k_0)x - (\omega_0 + \omega_1 - \omega_2)t]\} \quad (\text{A.65})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_0\bar{E}_0E_2e_0\bar{e}_0e_2 &= E_0\bar{E}_0E_2 \exp[-i(k_2x - \omega_2t)] \\
&= |E_0|^2 E_2 \exp[-i(k_2x - \omega_2t)] \quad (\text{A.66})
\end{aligned}$$

$$2E_0E_2\bar{E}_1e_0e_2\bar{e}_1 = 2E_0E_2\bar{E}_1 \exp\{-i[(2k_2 - k_0)x - (\omega_0 - \omega_1 + \omega_2)t]\} \quad (\text{A.67})$$

$$\begin{aligned}
E_0\bar{E}_2E_2e_0\bar{e}_2e_2 &= E_0\bar{E}_2E_2 \exp[-i(k_0x - \omega_0t)] \\
&= |E_2|^2 E_0 \exp[-i(k_0x - \omega_0t)] \quad (\text{A.68})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2\bar{E}_0E_1E_2\bar{e}_0e_1e_2 &= \bar{E}_0E_1E_2 \exp[i(k_0x - \omega_0t)] \exp[-i(k_1x - \omega_1t)] \exp[-i(k_2x - \omega_2t)] \\
&= 2\bar{E}_0^2E_1E_2 \exp\{i[(-k_0 + k_1 + k_2)x - (-\omega_0 + \omega_1 + \omega_2)t]\} \\
&= 2\bar{E}_0E_1E_2 \exp\{-i[(-k_0 + 2k_0)x - (-\omega_0 + \omega_1 + \omega_2 + \omega_0 - \omega_0)t]\} \\
&= 2\bar{E}_0E_1E_2 \exp\{-i[(k_0x - \omega_0t - (\omega_1 - \omega_0 + \omega_2 - \omega_0)t]\} \\
&= 2\bar{E}_0E_1E_2 \exp[-i(k_0x - \omega_0t)] \exp[i(\delta_1 + \delta_2)t] \\
&= 2\bar{E}_0E_1E_2 \exp[-i(k_0x - \omega_0t)] \exp[2i\delta t] \quad (\text{A.69})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_1\bar{E}_1E_2e_1\bar{e}_1e_2 &= E_1\bar{E}_1E_2 \exp[-i(k_2x - \omega_2t)] \\
&= |E_1|^2 E_2 \exp[-i(k_2x - \omega_2t)] \quad (\text{A.70})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_1\bar{E}_2E_2e_1\bar{e}_2e_2 &= E_1\bar{E}_2E_2 \exp[-i(k_1x - \omega_1t)] \\
&= |E_2|^2 E_1 \exp[-i(k_1x - \omega_1t)] \quad (\text{A.71})
\end{aligned}$$

Desprezando os termos (A.57), (A.60), (A.61), (A.62), (A.65), (A.67) por serem componentes de amplitude pequena (fortemente amortecidos) e substituindo em

(A.51) obtém-se:

$$\begin{aligned}
\dot{E}_0 \exp[-i(k_0x - \omega_0t)] + \dot{E}_1 \exp[-i(k_1x - \omega_1t)] + \dot{E}_2 \exp[-i(k_2x - \omega_2t)] = \\
-\hat{\gamma}E + i[|E_0|^2 E_0 \exp[-i(k_0x - \omega_0t)] + |E_1|^2 E_1 \exp[-i(k_1x - \omega_1t)] \\
+ |E_2|^2 E_2 \exp[-i(k_2x - \omega_2t)] \\
+ E_0^2 \bar{E}_1 \exp[-i(k_2x - \omega_2t)] \exp[-2i\delta t] \\
+ E_0^2 \bar{E}_2 \exp[-i(k_1x - \omega_1t)] \exp[-2i\delta t] \\
+ |E_0|^2 E_1 \exp[-i(k_1x - \omega_1t)] \\
+ |E_1|^2 E_0 \exp[-i(k_0x - \omega_0t)] \\
+ |E_0|^2 E_2 \exp[-i(k_2x - \omega_2t)] \\
+ |E_2|^2 E_0 \exp[-i(k_0x - \omega_0t)] \\
+ 2\bar{E}_0 E_1 E_2 \exp[-i(k_0x - \omega_0t)] \exp[2i\delta t] \\
+ |E_1|^2 E_2 \exp[-i(k_2x - \omega_2t)] \\
+ |E_2|^2 E_1 \exp[-i(k_1x - \omega_1t)]
\end{aligned} \tag{A.72}$$

Separando em componentes:

$$\begin{aligned}
\dot{E}_0 = -\gamma(k_0)E_0 + i[|E_1|^2 E_0 + |E_2|^2 E_0 \\
+ 2\bar{E}_0 E_1 E_2 \exp(2i\delta t)]
\end{aligned} \tag{A.73}$$

$$\begin{aligned}
\dot{E}_1 = -\gamma(k_1)E_1 + i[|E_0|^2 E_1 + |E_2|^2 E_1 \\
+ E_0^2 \bar{E}_2 \exp(-2i\delta t)]
\end{aligned} \tag{A.74}$$

$$\begin{aligned}
\dot{E}_2 = -\gamma(k_2)E_2 + i[|E_0|^2 E_2 + |E_1|^2 E_2 \\
+ E_0^2 \bar{E}_1 \exp(-2i\delta t)]
\end{aligned} \tag{A.75}$$

Introduzindo as seguintes variáveis na amplitude e fase:

$$E_\sigma = a_\sigma(t) \exp(i\psi_\sigma(t)) \quad \sigma = 0, 1, 2 \tag{A.76}$$

Onde  $a_\sigma$  e  $\psi_\sigma$  são reais, na equação (A.73) obtém-se:

$$\begin{aligned}
\dot{E}_0 &= -\gamma(k_0)E_0 + i[|E_1|^2 E_0 + |E_2|E_0 + 2\bar{E}_0 E_1 E_2 \exp(2i\delta t)] \\
\frac{\partial}{\partial t} [a_0 \exp(i\psi_0)] &= -\gamma(k_0)a_0 \exp(i\psi_0) + i[E_1 \bar{E}_1 E_0 + E_2 \bar{E}_2 E_0 \\
&\quad + 2\bar{E}_0 E_1 E_2 \exp(2i\delta t)] \\
\dot{a}_0 \exp(i\psi_0) + i\dot{\psi}_0 a_0 \exp(i\psi_0) &= -\gamma(k_0)a_0 \exp(i\psi_0) + ia_1^2 a_0 \exp(i\psi_0) + ia_2^2 a_0 \exp(i\psi_0) \\
&\quad + 2ia_0 a_1 a_2 \exp(i(-\psi_0 + \psi_1 + \psi_2 + 2\delta t))] \\
\dot{a}_0 + i\dot{\psi}_0 &= -\gamma(k_0)a_0 + ia_1^2 a_0 + ia_2^2 a_0 \\
&\quad + 2ia_0 a_1 a_2 \exp[i(-2\psi_0 + \psi_1 + \psi_2 + 2\delta t)] \quad (\text{A.77})
\end{aligned}$$

Definindo  $\theta = 2\psi_0 - \psi_1 - \psi_2 - 2\delta t$ ,  $\gamma(k_0) = -\gamma_0$ :

$$\dot{a}_0 + i\dot{\psi}_0 = -\gamma_0 a_0 + ia_1^2 a_0 + ia_2^2 a_0 + 2ia_0 a_1 a_2 \cos \theta + 2a_0 a_1 a_2 \sin \theta \quad (\text{A.78})$$

Da parte real de A.78 obtém-se:

$$\dot{a}_0 = \gamma_0 a_0 + 2a_0 a_1 a_2 \sin \theta \quad (\text{A.79})$$

Ao substituir A.76 em A.74, e seguindo uma seqüência similar de passos obtém-se:

$$\dot{a}_1 + i\dot{\psi}_1 = -\gamma(k_1)a_1 + ia_0^2 a_1 + ia_2^2 a_1 + ia_0^2 a_2 \cos \theta - a_0^2 a_2 \sin \theta \quad (\text{A.80})$$

Fazendo  $\gamma(k_1) = \gamma_1$ , da parte real obtém-se:

$$\dot{a}_1 = -\gamma_1 a_1 - a_0^2 a_2 \sin \theta \quad (\text{A.81})$$

No caso da equação (A.74), seguindo o mesmo procedimento pode-se obter:

$$\dot{a}_2 + i\dot{\psi}_2 = -\gamma(k_2)a_2 + ia_0^2a_2 + ia_1^2a_2 + ia_0^2a_1 \cos \theta - a_0^2a_1 \sin \theta \quad (\text{A.82})$$

E da parte real:

$$\dot{a}_2 = -\gamma_2a_2 - a_0^2a_1 \sin \theta \quad (\text{A.83})$$

Reunindo as partes imaginárias de (A.78), (A.80) e (A.82):

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_0 a_0 &= a_1^2 a_0 + a_2^2 a_0 + 2a_0 a_1 a_2 \cos \theta \\ \dot{\psi}_1 a_1 &= a_0^2 a_1 + a_2^2 a_1 + a_0^2 a_2 \cos \theta \\ \dot{\psi}_2 a_2 &= a_0^2 a_2 + a_1^2 a_2 + a_0^2 a_1 \cos \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_0 &= a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos \theta \\ \dot{\psi}_1 &= a_0^2 + a_2^2 + \frac{a_0^2 a_2}{a_1} \cos \theta \\ \dot{\psi}_2 &= a_0^2 + a_1^2 + \frac{a_0^2 a_1}{a_2} \cos \theta \end{aligned}$$

Lembrando  $\theta = 2\psi_0 - \psi_1 - \psi_2 - 2\delta t$ , de forma que  $\dot{\theta} = 2\dot{\psi}_0 - \dot{\psi}_1 - \dot{\psi}_2 - 2\delta$ :

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= 2a_1^2 + 2a_2^2 + 4a_1 a_2 \cos \theta - a_0^2 - a_2^2 - \frac{a_0^2 a_2}{a_1} \cos \theta - a_0^2 - a_1^2 - \frac{a_0^2 a_1}{a_2} \cos \theta - 2\delta \\ \dot{\theta} &= -2\delta + a_1^2 + a_2^2 - 2a_0^2 + \left[ 4a_1 a_2 - \frac{a_0^2 a_2}{a_1} - \frac{a_0^2 a_1}{a_2} \right] \cos \theta \\ \dot{\theta} &= -2\delta + a_1^2 + a_2^2 - 2a_0^2 + \left[ 4a_1 a_2 - a_0^2 \left( \frac{a_2}{a_1} + \frac{a_1}{a_2} \right) \right] \cos \theta \end{aligned} \quad (\text{A.84})$$

Reescrevendo as equações A.79, A.81, A.83 e A.84 através da notação usada nesta monografia:

$$\dot{a}_0 = a_0 + 2a_0 a_1 a_2 \sin \phi \quad (\text{A.85})$$

$$\dot{a}_1 = -\nu_1 a_1 - a_0^2 a_2 \sin \phi \quad (\text{A.86})$$

$$\dot{a}_2 = -\nu_2 a_2 - a_0^2 a_1 \sin \phi \quad (\text{A.87})$$

$$\dot{\phi} = -2\delta + a_1^2 + a_2^2 - 2a_0^2 + \left[ 4a_1 a_2 - a_0^2 \left( \frac{a_2}{a_1} + \frac{a_1}{a_2} \right) \right] \cos \phi, \quad (\text{A.88})$$

Este modelo representado por um sistema de equações diferenciais não-lineares acopladas descreve a interação não linear de três ondas no processo modulacional sub-sônico. Se  $\nu_0 = 1$ , então o modo 0 torna-se linearmente instável. Supondo as taxas de amortecimento das ondas induzidas  $\nu_1 = \nu_2$  e as amplitudes destas ondas  $a_1 = a_2$ , as equações A.85-A.88 reduzem-se para três equações:

$$\dot{a}_0 = a_0 + 2a_0 a_1^2 \sin \phi \quad (\text{A.89})$$

$$\dot{a}_1 = -\nu a_1 - a_0^2 a_1 \sin \phi \quad (\text{A.90})$$

$$\dot{\phi} = -2\delta + 2(a_1^2 - a_0^2) + 2(2a_1^2 - a_0^2) \cos \phi \quad (\text{A.91})$$