



Ministério da
Ciência e Tecnologia



INPE-16641-TDI/1605

TRANSFERÊNCIAS ÓTIMAS A BAIXO EMPUXO E POTÊNCIA LIMITADA ENTRE ÓRBITAS ELÍPTICAS QUAISQUER

Francisco das Chagas Carvalho

Tese de Doutorado do Curso de Pós-Graduação em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica Espacial e Controle, orientada pelos Drs. Sandro da Silva Fernandes, e Antonio Fernando Bertachini de Almeida Prado, aprovada em 27 de maio de 2004.

Registro do documento original:
<<http://urlib.net/sid.inpe.br/jeferson/2004/08.03.16.03>>

INPE
São José dos Campos
2010

PUBLICADO POR:

Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE

Gabinete do Diretor (GB)

Serviço de Informação e Documentação (SID)

Caixa Postal 515 - CEP 12.245-970

São José dos Campos - SP - Brasil

Tel.:(012) 3945-6911/6923

Fax: (012) 3945-6919

E-mail: pubtc@sid.inpe.br

CONSELHO DE EDITORAÇÃO:

Presidente:

Dr. Gerald Jean Francis Banon - Coordenação Observação da Terra (OBT)

Membros:

Dr^a Maria do Carmo de Andrade Nono - Conselho de Pós-Graduação

Dr. Haroldo Fraga de Campos Velho - Centro de Tecnologias Especiais (CTE)

Dr^a Inez Staciarini Batista - Coordenação Ciências Espaciais e Atmosféricas (CEA)

Marciana Leite Ribeiro - Serviço de Informação e Documentação (SID)

Dr. Ralf Gielow - Centro de Previsão de Tempo e Estudos Climáticos (CPT)

Dr. Wilson Yamaguti - Coordenação Engenharia e Tecnologia Espacial (ETE)

BIBLIOTECA DIGITAL:

Dr. Gerald Jean Francis Banon - Coordenação de Observação da Terra (OBT)

Marciana Leite Ribeiro - Serviço de Informação e Documentação (SID)

Jefferson Andrade Ancelmo - Serviço de Informação e Documentação (SID)

Simone A. Del-Ducca Barbedo - Serviço de Informação e Documentação (SID)

REVISÃO E NORMALIZAÇÃO DOCUMENTÁRIA:

Marciana Leite Ribeiro - Serviço de Informação e Documentação (SID)

Marilúcia Santos Melo Cid - Serviço de Informação e Documentação (SID)

Yolanda Ribeiro da Silva Souza - Serviço de Informação e Documentação (SID)

EDITORAÇÃO ELETRÔNICA:

Viveca Sant´Ana Lemos - Serviço de Informação e Documentação (SID)



Ministério da
Ciência e Tecnologia



INPE-16641-TDI/1605

TRANSFERÊNCIAS ÓTIMAS A BAIXO EMPUXO E POTÊNCIA LIMITADA ENTRE ÓRBITAS ELÍPTICAS QUAISQUER

Francisco das Chagas Carvalho

Tese de Doutorado do Curso de Pós-Graduação em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica Espacial e Controle, orientada pelos Drs. Sandro da Silva Fernandes, e Antonio Fernando Bertachini de Almeida Prado, aprovada em 27 de maio de 2004.

Registro do documento original:
<<http://urlib.net/sid.inpe.br/jeferson/2004/08.03.16.03>>

INPE
São José dos Campos
2010

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

C253t Carvalho, Francisco das Chagas .
Transferências ótimas a baixo empuxo e potência limitada entre órbitas elípticas quaisquer / Francisco das Chagas Carvalho. – São José dos Campos : INPE, 2010.
191 p. ; (INPE-16641-TDI/1605)

Tese (Doutorado em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica Espacial e Controle) – Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 2009.

Orientadores : Drs. Sandro da Silva Fernandes, e Antonio Fernando Bertachini de Almeida Prado.

1. Órbitas. 2. Órbitas circulares. 3. Órbitas elípticas. 4. Mecânica orbital. 5. Satélites artificiais. 6. Baixo empuxo. 7. Potência limitada. 8. Otimização de trajetória. 9. Princípio de máximo de Pontryagin. 10. Transformação canônica. I. Título.

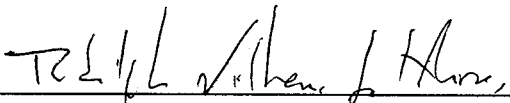
CDU 629.783

Copyright © 2010 do MCT/INPE. Nenhuma parte desta publicação pode ser reproduzida, armazenada em um sistema de recuperação, ou transmitida sob qualquer forma ou por qualquer meio, eletrônico, mecânico, fotográfico, reprográfico, de microfilmagem ou outros, sem a permissão escrita do INPE, com exceção de qualquer material fornecido especificamente com o propósito de ser entrado e executado num sistema computacional, para o uso exclusivo do leitor da obra.

Copyright © 2010 by MCT/INPE. No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted in any form or by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording, microfilming, or otherwise, without written permission from INPE, with the exception of any material supplied specifically for the purpose of being entered and executed on a computer system, for exclusive use of the reader of the work.

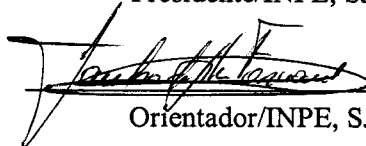
Aprovado(a) pela Banca Examinadora em cumprimento ao requisito exigido para a obtenção do Título de **Doutor(a) em Engenharia e Tecnologia Espacial/Mecânica Espacial e Controle.**

Dr. Rodolpho Vilhena de Moraes



Presidente/INPE, SJCampos-SP

Dr. Sandro da Silva Fernandes



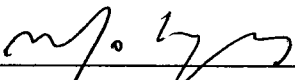
Orientador/INPE, SJCampos-SP

Dr. Antonio Fernando Bertachini A. Prado




Orientador/INPE, SJCampos-SP

Dr. Marcelo Lopes de Oliveira e Souza



Membro da Banca/INPE, SJCampos-SP

Dra. Maria Cecília F. P. Santos Zanardi



Membro da Banca/Convidada – UNESP/FEG

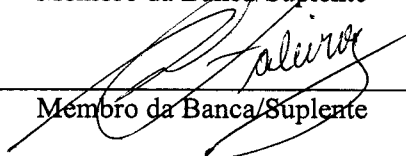
Dr. Roberto Vieira Martins

Membro da Banca/Convidado – Observ. Nacional

Dr. Roberto Vieira da Fonseca Lopes

Membro da Banca/Suplente

Dr. Antônio Cândido Faleiros



Membro da Banca/Suplente

Candidato: Francisco das Chagas Carvalho

São José dos Campos, 27 de maio de 2004.

"O que haverá pelas bandas do futuro? Esta Interrogação, perene no meu espírito, já se me tornou em perigosa obsessão; todos os meus atos, sinto-os em função dela, de sorte que vivo num constante oscilar - do desânimo maior às maiores esperanças."

Euclides da Cunha
escritor brasileiro
1866 – 1909

"By three methods we may learn wisdom: first, by reflection which is noblest; second, by imitation, which is the easiest; and third, by experience, which is the bitterest."

Confucius
chinese ethical teacher, philosopher
551 - 479 B.C.

"Embora ninguém possa voltar atrás e fazer um novo começo, qualquer um pode começar agora e fazer um novo fim".

Chico Xavier
1910 – 2002

Nunca Esmoreças

Alma fraterna, recorda:
Os momentos infelizes
parecem noites de crises
Em que o céu lembra um vulcão;
Ribombam trovões no espaço,
Coriscos falam da morte,
Passa irado o vento forte,
Tombando troncos no chão...
Os animais pequeninos
Gritam pedindo socorro
Descendo de morro em morro,
Cai a enxurrada a correr...
Mas finda a borrasca enorme,
No escuro da madrugada,
Em riscas de luz dourada,
Vem o novo amanhecer.
Assim também na vida,
Se atravessas grandes provas,
Na estrada em que te renovas,
Guarda a calma ativa e sã;
Sofre, mas serve e caminha,
Vence a sombra que te invade,
Se a hora é de tempestade,
Há novo dia amanhã...

Emmanuel (Poema psicografado pelo médium Francisco Cândido Xavier, publicado no "Jornal Município de Pitangui, no. 25, setembro de 1991)

Dedico este trabalho aos meus pais:

Francisco Lima de Carvalho

Francisca das Chagas de Carvalho

À minha esposa:

Cleonides Alves de Oliveira Carvalho

Aos meus

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE)

Ao CNPq pela bolsa de pesquisa.

Ao Amigo e Orientador Dr. Sandro da Silva Fernandes, pela orientação, pela amizade, pelo apoio, espírito científico, pela dedicação e principalmente pela paciência que teve comigo ao longo desses anos.

Ao Dr. Antônio Fernando Bertachini de Almeida Prado, pela orientação, pelo apoio e espírito científico.

À Cleonides Alves de Oliveira Carvalho, minha esposa, pela paciência e dedicação que teve comigo ao longo destes anos.

E aos colegas e amigos do INPE, pela amizade.

A todos o meu muito obrigado.

RESUMO

Neste trabalho é apresentada uma análise do problema de transferências espaciais ótimas entre órbitas coplanares e coaxiais diretas, entre órbitas coplanares não coaxiais diretas e entre órbitas não-coplanares coaxiais diretas em campo central Newtoniano, realizadas através de sistemas propulsivos a baixo empuxo e potência limitada. O problema geral de transferências é inicialmente formulado como um problema de Mayer da teoria de controle ótimo com elementos cartesianos – vetores posição e velocidade – como variáveis de estado. Após a determinação da Hamiltoniana máxima que descreve as trajetórias extremas, pelo Princípio de Máximo de Pontryagin, elementos orbitais clássicos são introduzidos através de uma transformação canônica – transformação de Mathieu – definida a partir da solução geral do núcleo integrável da função Hamiltoniana. Os termos de curto período são eliminados da Hamiltoniana máxima através de uma transformação canônica infinitesimal construída através do método de Hori. A Hamiltoniana máxima “média” que descreve as trajetórias extremas associadas às manobras de longa duração para as transferências simples acima citadas possui uma forma quadrática nas variáveis adjuntas que possibilita a resolução das equações canônicas. Para as manobras de longa duração, é investigada a existência de pontos conjugados através da condição de Jacobi e são construídas as curvas de isoconsumo referentes a uma manobra de duração especificada.

OPTIMAL LOW THRUST LIMITED POWER TRANSFERS BETWEEN ARBITRARY ELLIPTIC ORBITS

ABSTRACT

The problem of low thrust limited power propulsion maneuvers in a central gravity field is analyzed in this work. The problem of optimal direct transfer between coplanar coaxial orbits, direct transfer between coplanar non-coaxial orbits and direct transfer between non-coplanar coaxial orbits are treated. The general problem of transfers is formulated initially as a Mayer problem of the theory of optimal control, in which Cartesian elements – position and velocity vectors – are taken as state variables. After the determination of the maximum Hamiltonian that describes the extremals trajectories, through the Maximum Pontryagin Principle, classical orbital elements are introduced through a canonical transformation - Mathieu transformation- defined from the general solution of the kernel integrable of the Hamiltonian function. The terms of short period are eliminated from the maximum Hamiltonian through an infinitesimal canonical transformation constructed with the Hori's method. The "mean" maximum Hamiltonian that describes the extremal trajectories associated with the maneuvers of long duration for the simple transfers mentioned has a quadratic form in the adjoint variables that facilitates the resolution of the canonical equations. For the maneuvers of long duration, the existence of conjugate points through the Jacobi conditions is investigated and the curves of equal propellant consumption with respect to a maneuver of specified duration are constructed.

SUMÁRIO

Pág

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

CAPÍTULO 1 - APRESENTAÇÃO.....	27
CAPÍTULO 2 - HISTÓRICO DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO DE TRAJETÓRIAS ESPACIAIS	29
2.1 – Definição e Pequeno Histórico.....	29
CAPÍTULO 3 - TEORIA DE CONTROLE ÓTIMO SISTEMAS CANÔNICOS SEMI-GENERALIZADOS E MÉTODO DE HORI	35
3.1 - Introdução.....	35
3.2 - Teoria de Controle Ótimo.....	35
3.2.1 - Problema de Mayer	35
3.2.2 - Princípio de Máximo de Pontryagin	37
3.3 - Sistemas Canônicos Semi-generalizados	39
3.4 – Método de Hori	41
3.4.1 - Método de Hori para Sistemas Canônicos Semi-generalizados	41
CAPÍTULO 4 - PROBLEMA GERAL DE TRANSFERÊNCIA	55
4.1 – Introdução	55
4.2 - Definição de Transferência Espacial Ótima	56
4.3 – Modelos Matemáticos dos Sistemas Propulsivos	57
4.4 - Formulação do Problema	59
4.5 - Transformação de Elementos Cartesianos para Elementos Orbitais	63
4.5.1 - Solução do Sistema Governado pelo Núcleo Integrável	64
4.5.2- A Nova Função Hamiltoniana.....	68

CAPÍTULO 5 - TRANSFERÊNCIAS ÓTIMAS A BAIXO EMPUXO E POTÊNCIA LIMITADA ENTRE ÓRBITAS COPLANARES E COAXIAIS DIRETAS	71
5.1– Introdução	71
5.2 - Aplicação do Método de Hori para Transferências entre Órbitas Coplanares Coaxiais Diretas.	71
5.2.1 – Solução do Novo Sistema Dinâmico	76
5.3 – Trajetórias Ótimas	81
5.4 – Análise da Condição de Suficiência para Transferências entre Órbitas Coplanares Coaxiais Diretas	82
5.5 - Análise Numérica para Transferências entre Órbitas Coplanares Coaxiais Diretas.....	85
5.6 - Conclusões.....	94
 CAPÍTULO 6 - TRANSFERÊNCIAS ÓTIMAS A BAIXO EMPUXO E POTÊNCIA LIMITADA ENTRE ÓRBITAS COPLANARES NÃO-COAXIAIS DIRETAS	97
6.1 - Introdução.....	97
6.2 - Aplicação do Método de Hori para Transferências entre Órbitas Coplanares não Coaxiais Diretas.	97
6.2.1 – Solução do Novo Sistema Dinâmico	102
6.3 – Trajetórias Extremas	109
6.4 - Análise da Condição de Suficiência para Transferências entre Órbitas Coplanares não Coaxiais Diretas	110
6.5 – Análise Numérica para Transferências entre Órbitas Coplanares Não-Coaxiais Diretas.....	113
6.6 - Conclusões.....	115
 CAPÍTULO 7 - TRANSFERÊNCIAS ÓTIMAS A BAIXO EMPUXO E POTÊNCIA LIMITADA ENTRE ÓRBITAS NÃO COPLANARES COAXIAIS DIRETAS	117

7.1 - Introdução.....	117
7.2- Aplicação do Método de Hori para Transferências entre Órbitas não Coplanares Coaxiais Diretas.	117
7.3 – Trajetórias Extremais	121
7.4 - Análise da Condição de Suficiência para Transferências entre Órbitas não Coplanares Coaxiais Diretas	122
7.5 - Conclusões.....	123
CAPÍTULO 8 - CONCLUSÃO	125
8.1 - Introdução.....	125
8.2 – Análise do Problema de Transferência Estudado	125
8.3 – Proposta Para Trabalhos Futuros	126
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	129
BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTAR.....	137
APÊNDICE A - DETERMINAÇÃO DA MATRIZ JACOBIANA	139
A.1 - Construção da Matriz de Transformação.....	139
APÊNDICE B - RESULTADOS NUMÉRICOS PARA TRANSFERÊNCIAS ENTRE ÓRBITAS COPLANARES COAXIAIS DIRETAS	147
B.1 - Introdução	147
B.2 – Validação Numérica.....	147
B.3 – Comparação entre Resultados Médios e Osculadores.....	155
B.4 – Conclusões Finais	166
APÊNDICE C - RESULTADOS NUMÉRICOS PARA TRANSFERÊNCIAS ENTRE ÓRBITAS COPLANARES NÃO-COAXIAIS DIRETAS.....	167
C.1 - Introdução.....	167
C.2 – Validação Numérica	167
C.3 – Comparação entre os Resultados Médios e Osculadores.....	176
C.4 – Conclusões Finais.....	179

APÊNDICE D - RESULTADOS NUMÉRICOS PARA TRANSFERÊNCIAS ENTRE ÓRBITAS NÃO-COPLANARES COAXIAIS DIRETAS.....	181
D.1 - Introdução.....	181
D.2 – Validação Numérica	181
D.3 – Comparação entre Resultados Médios e Osculadores	188
D.4 – Conclusões Finais.....	191

LISTA DE FIGURAS

	Pág
4.1: Transferência em um campo de força central. FONTE: Marec (1979).....	56
4.2: Geometria da transferência. FONTE: Marec (1979).....	60
4.3: Vetores unitários do sistema móvel.....	67
5.1 – Campo de extremais e curvas de isoconsumo (transversais) para $e_0 = 0$	87
5.2 – Campo de extremais e curvas de isoconsumo (transversais) para $e_0 = 0,5$	88
5.3 – Campo de extremais periódicas para $e_0 = 0$	91
5.4 – Campo de extremais e curvas de isoconsumo periódicas (transversais) para $e_0 = 0$	92
5.5 – Curvas de isoconsumo periódicas (transversais) para $e_0 = 0,5$	93
6.1 - Estrutura de um extremal para $\phi_0 = 45^\circ$	113
6.2 - Estrutura de um extremal para $\phi_0 = 30^\circ$	114
6.3 Estrutura de um extremal para $\phi_0 = 60^\circ$	115
7.1 – Rotação em torno da linha dos apsis.	118
A.1 - Representação dos vetores \vec{e} , \vec{h} e \vec{N}	141
B.1(a) - Semi-eixo maior em função do tempo para a manobra I	151
B.1(b) - Semi-eixo maior em função do tempo para a manobra I.....	151
B.2(a) - Excentricidade em função do tempo para a manobra I.....	152
B.2(b) - Excentricidade em função do tempo para a manobra I.....	152
B.3(a) - Semi-eixo maior em função do tempo para a manobra II.....	153
B.3(b) - Semi-eixo maior em função do tempo para a manobra II.	153
B.4(a) - Excentricidade em função do tempo para a manobra II.	154
B.4(b) - Excentricidade em função do tempo para a manobra II.	154
B.5 - Comparação entre o valor médio e osculador do semi-eixo maior($e_0 = 0$).....	156
B.6 - Comparação entre o valor médio e osculador da excentricidade.	157

B.7 - Comparação entre o valor médio e osculador da excentricidade semi-eixo maior.	157
B.9 - Comparação entre o valor médio e osculador do semi-eixo maior ($e_0 = 0,3$).	159
B.10 - Comparação entre o valor médio e osculador da excentricidade ($e_0 = 0,3$).	159
B.11 - Comparação entre o valor médio e osculador da excentricidade e semi-eixo maior ($e_0 = 0,3$).	160
B.12 - Evolução temporal do consumo ($e_0 = 0,3$)	160
B.13 - Comparação entre o valor médio e osculador do semi-eixo maior ($e_0 = 0,5$). .	161
B.14 - Comparação entre os valores médio e osculador da excentricidade ($e_0 = 0,5$). 162	
B.15 - Comparação entre os valores médio e osculador da excentricidade e semi-eixo maior ($e_0 = 0,5$).	162
B.16 - Evolução temporal do consumo ($e_0 = 0,5$)	163
B.17 - Comparação entre o valor médio e osculador do semi-eixo maior ($e_0 = 0,6$). 164	
B.18 - Comparação entre o valor médio e osculador da excentricidade ($e_0 = 0,6$).	164
B.19 - Comparação entre o valor médio e osculador da excentricidade e semi-eixo maior ($e_0 = 0,6$).	165
B.20 - Evolução temporal do consumo ($e_0 = 0,6$)	165
C.1 - Semi-eixo Maior em função do tempo.	173
C.2 - Excentricidade em função do tempo.	174
C.3 - Argumento do Pericentro em função do tempo.	175
C.4 - Comparação entre o valor médio e osculador do semi-eixo maior.	177
C.5 - Comparação entre o valor médio e osculador da excentricidade.	177
C.6 - Comparação entre o valor médio e osculador do argumento do pericentro.	178
C.7 - Evolução temporal do consumo.	178
D.1 - Semi-eixo maior em função do tempo.	185
D.2 - Excentricidade em função do tempo.	186
D.3 - Inclinação em função do tempo.	187
D.4 - Comparação entre o valor médio e osculador do semi-eixo maior.	189

D.5 - Comparação entre o valor médio e osculador da excentricidade.	189
D.6 - Comparação entre o valor médio e osculador da longitude do nodo ascendente.	190
D.7 – Evolução temporal do consumo.....	190

LISTA DE TABELAS

	Pág
5.1 – Valores de k_0	86
5.2 – Valores de u	86
5.3 – Valores de k_0	90
5.4 – Valores de u	90
B.1 – Dados de entrada para a comparação dos resultados analítico e numérico para transferências entre órbitas coplanares coaxiais diretas.	150
B.2 – Exemplos de transferências entre órbitas coplanares coaxiais diretas.....	155
C.1 – Dados de entradas para a comparação dos resultados analítico e numérico para transferências entre órbitas coplanares não-coaxiais diretas.	172
C.2 – Exemplos de transferências entre órbitas coplanares não-coaxiais diretas	176
D.1 – Dados de entradas para a comparação dos resultados analítico e numérico para transferências entre órbitas não-coplanares coaxiais diretas.	184
D.2 – Exemplos de transferências entre órbitas não-coplanares coaxiais diretas	188

CAPÍTULO 1

APRESENTAÇÃO

A presente tese visa ao estudo das transferências espaciais ótimas (consumo mínimo de combustível) entre órbitas elípticas quaisquer realizadas através de sistemas propulsivos de baixo empuxo e potência limitada em um campo gravitacional de força central. Está dividida em oito capítulos e quatro apêndices. Este primeiro descreve a organização do trabalho.

No Capítulo 2 é apresentado um breve histórico do problema de otimização de trajetórias espaciais e uma descrição geral do objetivo de estudo deste trabalho.

No Capítulo 3 são apresentados resultados básicos sobre Teoria de Controle Ótimo: enunciado do problema de Mayer e as condições necessárias expressas através do Princípio de Máximo de Pontryagin; bem como, algumas propriedades dos sistemas canônicos semi-generalizados. É mostrado que o método de Hori quando aplicado a sistemas canônicos semi-generalizados possui importante característica definida pela solução geral do núcleo integrável da nova Hamiltoniana e que uma transformação de Mathieu, definida por esta solução geral, introduz significativas simplificações ao algoritmo.

No Capítulo 4 é apresentada uma visão geral do estudo das transferências espaciais ótimas (consumo mínimo de combustível) entre órbitas elípticas quaisquer realizadas através de sistemas propulsivos a baixo empuxo e potência limitada – sistema PL, e livremente orientável em um campo de força central Newtoniano. Também será apresentada a teoria de transformações de elementos cartesianos para elementos orbitais, que pode ser empregada na análise completa do problema.

No Capítulo 5 são analisadas as transferências de consumo mínimo de combustível, realizadas por sistemas propulsivos a baixo empuxo e potência limitada, entre órbitas coplanares coaxiais diretas, apresentando resultados mais gerais em que a órbita inicial

é elíptica. É aplicada a versão canônica do método de Hori na determinação da solução do problema de otimização. A análise da condição de suficiência é investigada através da determinação de pontos conjugados - condição de Jacobi. Para as manobras de duração qualquer, relativa às transferências entre órbitas coplanares coaxiais diretas, os termos periódicos são diretamente calculados a partir da função geratriz que define a transformação canônica infinitesimal construída através do método de Hori, e, também são construídas as trajetórias extremas e as curvas de isoconsumo.

No Capítulo 6 é apresentado um estudo completo do problema de transferências de consumo mínimo de combustível entre órbitas elípticas coplanares não-coaxiais diretas, incluindo a análise de condições de suficiência correspondente à determinação de pontos conjugados – condição de Jacobi. Para as manobras de duração qualquer, relativa às transferências entre órbitas coplanares e não-coaxiais diretas.

No Capítulo 7 é apresentado um estudo completo do problema de transferências de consumo mínimo de combustível entre órbitas elípticas não-coplanares coaxiais diretas. É também apresentada a análise de condições de suficiência correspondente à determinação de pontos conjugados – condição de Jacobi. Para as manobras de duração qualquer, relativa às transferências entre órbitas não coplanares coaxiais diretas.

No Capítulo 8 são apresentados os resultados finais desta tese e sugestões para trabalho futuros.

No Apêndice A é apresentada a determinação da matriz Jacobiana da transformação de elementos cartesianos para elementos orbitais.

No Apêndice B são apresentados os resultados numéricos para o problema de transferências entre órbitas coplanares coaxiais diretas.

No Apêndice C são apresentados os resultados numéricos para o problema de transferências entre órbitas coplanares não coaxiais diretas.

No Apêndice D são apresentados os resultados numéricos para o problema de transferências entre órbitas não coplanares coaxiais diretas.

CAPÍTULO 2

HISTÓRICO DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO DE TRAJETÓRIAS ESPACIAIS

2.1 – Definição e Pequeno Histórico

O problema de transferir um veículo espacial entre dois pontos em um campo gravitacional com gasto mínimo de combustível é conhecido como problema fundamental da Astronáutica. Teve início com R. H. Goddard (1919) que propôs soluções ótimas aproximadas para o problema de enviar um foguete a grandes altitudes, da forma mais econômica possível. Deve-se ressaltar que o primeiro estudo analítico sobre o problema de transferências espaciais ótimas foi desenvolvido por Hohmann em 1925, antes do advento da Era Espacial. Hohmann estabeleceu uma elipse bitangente como a trajetória de menor consumo de combustível entre as órbitas de dois planetas (assumidas como circulares), considerando que a transferência é realizada através de impulsos.

No início dos anos 50, Lawden (1950) estabeleceu os fundamentos da moderna navegação espacial através do Cálculo de Variações clássico (Teoria de Euler-Lagrange Bliss, 1946; Gelfand e Fomin, 1963; Elsgolts, 1977). Em dois importantes trabalhos, Lawden (1953 e 1954) introduziu a noção de "*primer vector*", multiplicador de Lagrange associado ao vetor velocidade, que desempenha importante papel nas teorias modernas de otimização de trajetórias espaciais. Na década de 60 e posteriores, teorias mais modernas de otimização - Princípio de Máximo de Pontryagin (Pontryagin et al, 1962) e Teoria de Contínuo (1962) - foram amplamente utilizadas na análise de tais problemas.

Os principais resultados analíticos têm sido desenvolvidos para transferências de pequenas amplitudes com duração fixa realizadas através de sistemas propulsivos de baixo empuxo e potência limitada, e, para transferências impulsivas entre órbitas

quaisquer com duração livre (Marchal, 1967, 1976; Marchal, Marec e Winn, 1967; Bell, 1968; Edelbaun, 1967; Gobetz e Doll, 1969). Excelentes sínteses sobre estes problemas podem ser encontradas nos trabalhos de Marec (1967), Marchal (1967), Gobetz e Doll (1969). Trabalhos mais recentes têm considerado manobras impulsivas com duração fixa (Eckel e Vihn, 1984; Lawden, 1993) e problemas de "rendez-vous" em torno de um ponto (estação espacial) em órbita (Carter, 1984, 1989, 1990; Carter e Humi, 1987; Carter e Brient, 1991, 1992).

A maioria destes estudos, realizados nas décadas de 60 e 70, e em parte da década de 80, consideram a hipótese de campo central Newtoniano. A possibilidade de se empregar forças secundárias tais como o achatamento do corpo central, o arrasto nas manobras na atmosférica, as forças atrativas devido a outros planetas no caso de viagens interplanetárias no sistema solar, foi ressaltada por Marchal (Marchal, Marec e Winn, 1967), e têm recentemente despertado o interesse dos pesquisadores. Estudos analíticos, envolvendo a hipótese mais geral de campo não-central e considerando-se transferências de pequenas amplitudes com duração fixada, realizadas por sistemas propulsivos de baixo empuxo e potência limitada têm sido desenvolvidos utilizando-se dos métodos de teoria de perturbações (Da Silva Fernandes, 1989, 1992, 1993, 1995; Da Silva Fernandes e Sessin, 1989). Estudos numéricos para manobras mais gerais têm tido seu interesse renovado (Pardis e Carter, 1995; Guelman, 1995; Ulybyshev, 1995; Markopoulos, 1996), em particular, os que envolvem a hipótese de campo não-central (Kechichian, 1995, 1997a, 1997b).

Uma abordagem semelhante para o caso impulsivo, mas levando em conta o efeito do achatamento da Terra nas equações de movimento, pode ser encontrada em Da Silva Fernandes (1986), Da Silva Fernandes e Moraes (1989) (que estuda os casos não-singulares) e Da Silva Fernandes (1989) (que estuda os casos singulares). Outra possibilidade estudada, por Da Silva Fernandes e Sessin (1989), é sobre a influência do achatamento da Terra em uma transferência de baixo e contínuo empuxo, através de uma expansão analítica e aplicação do método de Hori para sistemas canônicos.

Ambos os modelos linearizado e não-linear para sistemas propulsivos de baixo empuxo e potência limitada podem ser encontrados nos trabalhos de Edelbaum (1964, 1966) e Marec (1979), que tratam do estudo de transferências entre órbitas coplanares e não-coplanares em um campo de força central.

Devido ao grande número de trabalhos que surgiram na década de 60 em otimização de trajetórias espaciais, muitos trabalhos de revisão foram feitos, dentre eles destacam-se Bell (1968), Gobetz e Doll (1969) que apresentam um resumo histórico do problema de transferência de trajetórias espaciais. Um excelente trabalho de revisão foi feito por Marchal, Marec e Winn (1967) onde é apresentada uma síntese dos resultados analíticos para transferências orbitais entre órbitas Keplerianas. No início da década de 90 um outro trabalho de revisão foi feito por Broucke (1991). Neste trabalho ele apresenta uma visão geral do problema de otimização de trajetórias, e apresenta um bom exemplo de resultados analíticos aproximados, onde é considerado o problema de uma transferência ótima com aplicação de um empuxo baixo e contínuo.

Marec e Vinh (1982) tratam do estudo das transferências entre órbitas coplanares não-coaxiais diretas e as transferências entre órbitas não-coplanares coaxiais diretas, na qual é feita uma generalização dos trabalhos de Edelbaum para o problema de transferências entre órbitas coplanares e coaxiais. Nesse trabalho é introduzida a noção de "Hamiltoniana média" e a solução do problema de transferência é reduzida a solução de um sistema de equações diferenciais de segunda ordem, seguido por duas quadraturas.

Na década de 90, Da Silva Fernandes (1995), estudou o problema de transferências entre órbitas elípticas próximas utilizando sistemas propulsivos a baixo empuxo e potência limitada em um campo de força não-central que inclui os efeitos da não-esfericidade do corpo principal. Nesse trabalho é desenvolvida uma solução analítica de primeira ordem para o problema de transferência de baixo empuxo e potência limitada entre órbitas elípticas vizinhas, em que o problema de otimização é formulado na forma de Mayer (Marec, 1979) com elementos cartesianos como variáveis de estado, na qual o método de Hori é aplicado na determinação da solução analítica de primeira ordem, e, são obtidas soluções analíticas para transferências de longa duração. Os problemas de

transferências entre órbitas elípticas quaisquer também têm sido tema de novos estudos semi-analíticos e numéricos por diversos autores. Os trabalhos de Lembeck e Prussing (1993), Kechichian (1997a, 1997b, 1997c, 1995, 1999) Guelman (1995), Wenzel e Prussing (1996), Gefroy e Epenoy (1997) tratam de sistemas propulsivos a baixo empuxo e consideram campo de força central ou não. Por outro lado, Pardis e Carter (1995), Ulybyshev (1995) e Markoupolos (1996) estudam as trajetórias ótimas relativas a sistemas propulsivos a baixo empuxo e potência limitada, considerando campo de força central Newtoniano.

Haissig, Mease e Vinh (1993) analisam dois métodos para o cálculo das transferências entre órbitas coplanares em um campo de força central Newtoniano realizadas por meio de sistemas propulsivos a baixo empuxo e potência limitada com soluções aproximadas obtidos por métodos de média. Neste trabalho é feita uma comparação dos resultados obtidos por métodos de média em primeira aproximação com os resultados numéricos obtidos para o problema geral de transferência. Vale a pena ressaltar que nesta análise não foram incluídos os termos periódicos.

Nesta tese é apresentada uma análise do problema de transferências espaciais ótimas entre órbitas coplanares coaxiais diretas, entre órbitas coplanares não-coaxiais diretas e entre órbitas não-coplanares coaxiais diretas em campo central Newtoniano, realizadas através de sistemas propulsivos a baixo empuxo e potência limitada. O problema geral de transferências orbitais coplanares é inicialmente formulado como um problema de Mayer da teoria de controle ótimo com elementos cartesianos – vetores posição e velocidade – como variáveis de estado. Após a determinação da Hamiltoniana máxima que descreve as trajetórias extremas, pelo Princípio de Máximo de Pontryagin, elementos orbitais clássicos são introduzidos através de uma transformação canônica – transformação de Mathieu – definida a partir da solução geral do núcleo integrável da função Hamiltoniana. Os termos de curto período são eliminados da Hamiltoniana máxima através de uma transformação canônica infinitesimal construída através do método de Hori – método de perturbações baseado em séries de Lie (Hori, 1966; Da Silva Fernandes e Sessin 1989; Da Silva Fernandes, 2003). A nova função Hamiltoniana máxima, resultante da transformação canônica infinitesimal, descreve as trajetórias

“extremais” associadas às manobras de longa duração para as transferências simples (sem “rendez-vous”). A análise inclui a investigação da existência de pontos conjugados através da condição de Jacobi e são construídas as trajetórias “extremais” e as curvas de isoconsumo, curvas transversais ao campo de “extremais”, referentes a uma manobra de duração especificada.

Para as manobras de duração qualquer, os termos periódicos são diretamente calculados a partir da função geratriz que define a transformação canônica infinitesimal construída através do método de Hori.

CAPÍTULO 3

TEORIA DE CONTROLE ÓTIMO SISTEMAS CANÔNICOS SEMI- GENERALIZADOS E MÉTODO DE HORI

3.1 - Introdução

Neste capítulo são apresentados resultados básicos sobre Teoria de Controle Ótimo: enunciado do problema de Mayer e as condições necessárias expressas através do Princípio de Máximo de Pontryagin (1962) - estritamente necessários ao desenvolvimento de nosso estudo; bem como algumas propriedades dos sistemas canônicos semi-generalizados (Da Silva Fernandes, 1994). Por último, apresentamos o método de Hori (1966), método de perturbações baseado em série de Lie.

3.2 - Teoria de Controle Ótimo

A seguir enunciamos o problema de otimização na forma de Mayer e o Princípio de Máximo de Pontryagin.

3.2.1 - Problema de Mayer

Seja o sistema de equações diferenciais ordinárias:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u) , \tag{3.1}$$

onde $x \in R^n$ e $u \in U \subset R^m$.

O problema consiste em determinar a lei de controle $U(u(t), t_0, t_f, x(t_0), x(t_f))$ que conduz o ponto $x(t)$ do espaço de fase de uma condição inicial $x(t_0)$ em t_0 , que satisfaz p condições

$$\varphi_l(x_1(t_0), \dots, x_n(t_0), t_0) = 0, \quad (3.2)$$

$l = 1, \dots, p, p < n+1$; para uma condição final $x(t_f)$ em t_f que satisfaz q condições

$$\psi_m(x_1(t_f), \dots, x_n(t_f), t_f) = 0, \quad (3.3)$$

$m = 1, \dots, q, q < n+1$; e que minimiza o funcional

$$IP[\mathcal{U}] = g(t_0, x(t_0), t_f, x(t_f)). \quad (3.4)$$

As funções $x_i(t)$, $i = 1, \dots, n$, definem as variáveis de estado e as funções $u_j(t)$, $j = 1, \dots, m$, definem as variáveis de controle. O subconjunto U é, por hipótese, fechado e limitado (compacto) e define o domínio de controle. As funções $f_k(\cdot)$ são contínuas para todos os valores de $(x, u) \in R^n \times U$. Além disto, as derivadas parciais $\partial f_k / \partial x_i$, $i, k = 1, \dots, n$, também são definidas e contínuas em todo espaço $R^n \times U$. A função $g(\cdot)$ também é contínua para todos os valores de $(t_0, x(t_0), t_f, x(t_f))$ e as suas derivadas parciais com respeito a todos os argumentos são definidas e contínuas em todo R^{2n+2} .

Introduzindo a notação vetorial, reescrevemos as Equações (3.2) e (3.3), respectivamente, como:

$$\varphi(x(t_0), t_0) = 0,$$

$$\psi(x(t_f), t_f) = 0.$$

É importante notar que o domínio de controle U impõe restrições sobre as variáveis de controle, de forma que assumiremos que as funções $u_j(t), j = 1, \dots, m$, são seccionalmente contínuas, admitindo descontinuidades de primeira ordem e que as trajetórias geradas por $u(t)$, i.e. as funções $x_i(t), i = 1, \dots, n$, são contínuas.

3.2.2 - Princípio de Máximo de Pontryagin

As condições necessárias ao problema de Mayer acima enunciado são sintetizadas no seguinte teorema, conhecido como Princípio de Máximo de Pontryagin:

Teorema 1: Se $u^*(t), t \in [t_0^*, t_f^*]$, é um controle ótimo então existem multiplicadores $\lambda_0 \geq 0, v_0 \in R^p, v_f \in R^q$ e $\lambda(t) \in R^n$, não se anulando simultaneamente, e a função

$$H(x, \lambda, u) = \lambda \bullet f(x, u), \quad (3.5)$$

tais que as seguintes condições são satisfeitas:

i - multiplicadores λ_0, v_0 e v_f são constantes;

ii - $\lambda(t)$ é contínuo e satisfaz o sistema de equações diferenciais

$$\frac{dx^*}{dt} = \mathcal{H}_\lambda^T$$

$$\frac{d\lambda^*}{dt} = -\mathcal{H}_x^T, \quad (3.6)$$

com $H = H(x^*(t), \lambda(t), u^*(t))$;

iii - para todo $t \in [t_0^*, t_f^*]$ a função $H(x^*(t), \lambda(t), u)$ atinge o seu máximo em $u^*(t)$,

$$u^*(t) = \arg \max_{u \in U} H(x^*(t), \lambda(t), u); \quad (3.7)$$

iv - as condições de transversalidade são verificadas, i.e. a condição

$$\left[-H \delta t + \lambda \bullet \delta x \right]_{t_0^*}^{t_f^*} + \delta \bar{g} = 0, \quad (3.8)$$

com

$$\bar{g} = \lambda_0 g(t_0, x(t_0), t_f, x(t_f)) + \nu_0 \bullet \varphi(t_0, x(t_0)) + \nu_f \bullet \psi(t_f, x(t_f)). \quad (3.9)$$

v - a função H é uma integral primeira do sistema (3.6).

O símbolo ‘•’ é utilizado para indicar o produto escalar.

Notamos que o multiplicador λ_0 é utilizado como fator de escala; usualmente, adota-se $\lambda_0 = 1$.

O Princípio de Máximo de Pontryagin é condição necessária para a otimalidade, pois afirma que certas condições são satisfeitas por um controle ótimo. Por outro lado, um controle para o qual o Princípio de Máximo é verificado, não é necessariamente ótimo. Denominamos de “controle extremal”, o controle para o qual o princípio é verificado. Portanto, um controle ótimo é um controle extremal, mas a recíproca não é verdadeira. O Princípio de Máximo deve ser interpretado como um método para determinação de candidatos a controle ótimo. Se um controle ótimo existe, então pertence a um conjunto de controles extremais. Existem, contudo, condições suficientes que asseguram a otimalidade de um controle, mas são de difícil aplicação. Para algumas classes especiais de problemas o Princípio de Máximo de Pontryagin é, no entanto, condição necessária e suficiente.

3.3 - Sistemas Canônicos Semi-generalizados

A seguir apresentamos alguns resultados sobre sistemas canônicos semi-generalizados (Da Silva Fernandes, 1994) de fundamental importância para a teoria a ser desenvolvida neste trabalho.

Consideremos o sistema de equações diferenciais

$$\frac{dx}{dt} = H_{\lambda}^T$$

$$\frac{d\lambda}{dt} = -H_x^T, \quad (3.10)$$

governado pela função Hamiltoniana $H(x, \lambda)$,

$$H(x, \lambda) = \lambda \bullet f(x) + R(x, \lambda), \quad (3.11)$$

onde $x \in R^n$ denota o vetor de coordenadas generalizadas (vetor de estado), $\lambda \in R^n$ denota o vetor de momentos associados (vetor adjunto). As funções $f_i(\cdot)$, $i = 1, \dots, n$, e as derivadas parciais de $R(x, \lambda)$ com respeito a x e λ satisfazem as hipóteses do Teorema de Existência e Unicidade.

Assumiremos que o sistema de equações diferenciais

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

$$\frac{d\lambda}{dt} = - \left[\frac{\partial f}{\partial x} \right]^T \lambda, \quad (3.12)$$

é integrável.

A solução geral deste sistema é, para o caso de solução periódica, expressa por

$$x = \varphi(c_1, \dots, c_{n-1}, \theta)$$

$$\lambda = (\Delta_\varphi^{-1})^T b, \quad (3.13)$$

onde Δ_φ é a matriz Jacobiana

$$\Delta_\varphi = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial c} \end{bmatrix}, \quad (3.14)$$

com $c = [c_1 \dots c_{n-1} \ \theta]^T$; c_k , $k = 1, \dots, n-1$, são constantes arbitrárias de integração; θ é a fase rápida, função da frequência ω , e $b \in R^n$ é um vetor de parâmetros arbitrários envolvendo n constantes e a fase θ . A frequência ω pode ser função das constantes c_k , $k = 1, \dots, n-1$. Assumiremos que $\omega = \omega(c_1)$.

Se a solução geral for expressa em termos de outro conjunto de parâmetros (constantes e fase) arbitrários de integração, B e C ; então existe a seguinte relação entre os dois conjuntos de parâmetros arbitrários,

$$C = \psi(c)$$

$$B = (\Delta_\psi^{-1})^T b, \quad (3.15)$$

onde Δ_ψ é a matriz Jacobiana

$$\Delta_{\psi} = \left[\begin{array}{c} \frac{\partial \psi}{\partial c} \end{array} \right], \quad (3.16)$$

com $C = [C_1 \dots C_{n-1} \Theta]^T$ e $B \in R^n$ é um novo vetor de parâmetros arbitrários.

Os seguintes resultados podem ser estabelecidos:

i - a Equação (3.13) define uma transformação de Mathieu independente do tempo entre as variáveis do sistema e os parâmetros arbitrários de integração

$$(\lambda; x) \xrightarrow{\text{MATHIEU}} (b; c);$$

ii - a Equação (3.15) define uma transformação de Mathieu entre dois conjuntos de parâmetros arbitrários de integração

$$(b; c) \xrightarrow{\text{MATHIEU}} (B; C);$$

iii - a função Hamiltoniana H é invariante com respeito a estas transformações.

Os resultados apresentados nos parágrafos acima serão amplamente utilizados no Capítulo 4 para realizar a transformação de elementos cartesianos para orbitais.

3.4 – Método de Hori

Nesta seção é mostrado que o método de Hori (1966) quando aplicado a sistemas canônicos semi-generalizados possui uma importante característica definida pela solução geral do sistema canônico integrável. Uma transformação de Mathieu, definida por esta solução geral, introduz significativas simplificações ao algoritmo.

3.4.1 - Método de Hori para Sistemas Canônicos Semi-generalizados

Seja a função Hamiltoniana $H(x, \lambda; \varepsilon)$ desenvolvida em série de potências de um pequeno parâmetro ε

$$H(x, \lambda; \varepsilon) = H_0(x, \lambda) + R(x, \lambda; \varepsilon), \quad (3.17)$$

com

$$R(x, \lambda; \varepsilon) = \sum_{i=1} \varepsilon^i H_i(x, \lambda). \quad (3.18)$$

A função Hamiltoniana não-perturbada $H_0(x, \lambda)$ é, por hipótese, linear nas variáveis adjuntas

$$H_0(x, \lambda) = \lambda \bullet f(x), \quad (3.19)$$

e define um sistema dinâmico integrável.

Seja a transformação canônica infinitesimal definida pela função geratriz $S(\xi, \eta; \varepsilon)$,

$$(\lambda; x) \xrightarrow{S} (\eta; \xi),$$

sendo $S(\xi, \eta; \varepsilon)$ também desenvolvida em série de potências do pequeno parâmetro ε ,

$$S(\xi, \eta; \varepsilon) = \sum_{i=1} \varepsilon^i S_i(\xi, \eta). \quad (3.20)$$

A transformação gerada pela função S entre as antigas variáveis canônicas (λ, x) e as novas (η, ξ) deve ser tal que o novo sistema dinâmico seja mais tratável que o original; por exemplo, seja livre de termos periódicos com frequências finitas (curto e/ou longo período).

O novo sistema dinâmico será

$$\frac{d\xi^T}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta}$$

$$\frac{d\eta^T}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \xi}, \quad (3.21)$$

sendo a nova função Hamiltoniana $H(x, \lambda; \varepsilon)$ também desenvolvível em série de potências do pequeno parâmetro ε ,

$$H(\xi, \eta; \varepsilon) = H_0(\xi, \eta) + \sum_{i=1} \varepsilon^i H_i(\xi, \eta). \quad (3.22)$$

De acordo com o algoritmo do método de Hori (1966), a nova função Hamiltoniana H e a função geratriz S são obtidas a partir das equações abaixo:

- ordem zero: $H_0(\xi, \eta) = \mathcal{H}_0(\xi, \eta)$ (3.23)

- ordem um: $\{H_0, S_1\} + H_1 = H_1$ (3.24)

- ordem dois: $\{H_0, S_2\} + \frac{1}{2}\{H_1 + H_1, S_1\} + H_2 = H_2$ (3.25)

-
-
-

onde as chaves representam os parêntesis de Poisson. Todas as funções envolvidas nas equações acima são expressas em termos das novas variáveis canônicas (η, ξ) .

Considere a equação de m-ésima ordem do algoritmo do método proposto por Hori (1966):

$$\{H_0^*, S_m\} + \Theta_m = H_m^*, \quad (3.26)$$

onde as chaves representam os parêntesis de Poisson, H_0^* é a Hamiltoniana não perturbada, Θ_m é função obtida das ordens anteriores, envolvendo H_0^* , H_m , S_k , H_k^* e H_k , $k = 1, \dots, m-1$. Todas estas funções são escritas em termos do novo conjunto de variáveis canônicas (ξ, η) e definida através das equações:

$$H(x, y) = H_0(x, y) + \sum_{k=1} \varepsilon^k H_k(x, y), \quad (3.27)$$

$$H^*(\xi, \eta) = H_0^*(\xi, \eta) + \sum_{k=1} \varepsilon^k H_k^*(\xi, \eta), \quad (3.28)$$

$$\varepsilon S(\xi, \eta) = \sum_{k=1} \varepsilon^k S_k(\xi, \eta), \quad (3.29)$$

onde (x, y) é o conjunto de variáveis canônicas iniciais, $H(x, y)$ é a Hamiltoniana original, $H_0^*(\xi, \eta)$ é a nova Hamiltoniana e $S(\xi, \eta)$ é a função geratriz da transformação canônica, $(x, y) \rightarrow (\xi, \eta)$. Esta transformação deve ser tal que o novo sistema dinâmico seja mais tratável que o original.

Para determinar as funções S_m e H_m^* , Hori introduz um parâmetro auxiliar t^* através do seguinte sistema de equações canônicas:

$$\frac{d\xi_i}{dt^*} = \frac{\partial H_0^*}{\partial \eta_i}, \quad (3.30)$$

$$\frac{d\eta_i}{dt^*} = -\frac{\partial H_0^*}{\partial \xi_i}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Substituindo na Equação (3.26) esta se reduz a

$$\frac{dS_m}{dt^*} = \Theta_m - H_m^*,$$

com Θ_m escrita em termos da solução geral do sistema dado pela Equação (3.30), envolvendo $2n$ constantes de integração. S_m e H_m^* são funções desconhecidas.

No que segue, uma forma diferente é apresentada para resolver o problema de integração dado pela Equação (3.26), proposta por Da Silva Fernandes (2003). Para isto, algumas proposições são apresentadas.

PROPOSIÇÃO 1. Seja F uma função diferenciável das variáveis canônicas $\xi_i, \eta_i, i = 1, \dots, n$, as quais satisfazem o sistema de equações diferenciais

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \frac{\partial H^*}{\partial \eta_i}, \quad (3.31)$$

$$\frac{d\eta_i}{dt} = -\frac{\partial H^*}{\partial \xi_i}, \quad i = 1, \dots, n$$

com a Hamiltoniana H^* :

$$H^*(\xi, \eta; \varepsilon) = H_0^*(\xi, \eta) + R^*(\xi, \eta; \varepsilon), \quad (3.32)$$

onde $H_0^*(\xi, \eta)$ descreve um sistema canônico integrável,

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \frac{\partial H_0^*}{\partial \eta_i}, \quad (3.33)$$

$$\frac{d\eta_i}{dt} = -\frac{\partial H_0^*}{\partial \xi_i}, \quad i = 1, \dots, n,$$

cujas soluções gerais são dadas por

$$\begin{aligned} \xi_i &= \xi_i(c_1, \dots, c_{2n}; t), \\ \eta_i &= \eta_i(c_1, \dots, c_{2n}; t), \quad i = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (3.34)$$

c_1, \dots, c_{2n} , são constantes arbitrárias de integração, então

$$\{F, H_0^*\} = \frac{\partial F}{\partial t}. \quad (3.35)$$

PROVA. Considere o sistema de equações diferenciais definido pelas Equações (3.31) e (3.32). Seguindo o método de variação das constantes, a solução desse sistema pode ser posta na forma

$$\begin{aligned} \xi_i &= \xi_i(c_1(t), \dots, c_{2n}(t); t), \\ \eta_i &= \eta_i(c_1(t), \dots, c_{2n}(t); t), \quad i = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (3.36)$$

com $c_1(t), \dots, c_{2n}(t)$ funções do tempo, satisfazendo o sistema de equações diferenciais

$$\sum_{j=1}^{2n} \frac{\partial \xi_i}{\partial c_j} \frac{dc_j}{dt} = \frac{\partial R^*}{\partial \eta_i}, \quad (3.37)$$

$$\sum_{j=1}^{2n} \frac{\partial \eta_i}{\partial c_j} \frac{dc_j}{dt} = \frac{\partial R^*}{\partial \xi_i}, \quad i = 1, \dots, n,$$

com as derivadas parciais da função R^* escritas em termos de $c_1(t), \dots, c_{2n}(t)$ e t .

Seja F uma função diferenciável nas variáveis canônicas $\xi_i, \eta_i, i = 1, \dots, n$. A derivada de F com respeito ao tempo é dada por

$$\frac{\partial F(\xi, \eta)}{\partial t} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial \xi_i} \frac{\partial \xi_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{2n} \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial \xi_i} \frac{\partial \xi_i}{\partial c_j} \frac{dc_j}{dt} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial \eta_i} \frac{\partial \eta_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{2n} \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial \eta_i} \frac{\partial \eta_i}{\partial c_j} \frac{dc_j}{dt}. \quad (3.38)$$

Combinando as Equações (3.37) e (3.38), resulta

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(\xi, \eta)}{\partial t} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial \xi_i} \frac{\partial \xi_i}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial \xi_i} \frac{\partial R^*}{\partial \eta_i} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial \eta_i} \frac{\partial \eta_i}{\partial t} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial \eta_i} \frac{\partial R^*}{\partial \xi_i} \\ &= \frac{\partial F}{\partial t} + \{F, R^*\} \end{aligned} \quad (3.39)$$

Por outro lado,

$$\frac{dF}{dt} = \{F, H^*\} = \{F, H_0^* + R^*\} = \{F, H_0^*\} + \{F, R^*\}. \quad (3.40)$$

Portanto, das Equações (3.39) e (3.40), tem-se que

$$\{F, H_0^*\} = \frac{dF}{dt}.$$

Lembrando que F e R^* são escritas como função de c_1, \dots, c_{2n} e t .

PROPOSIÇÃO 2. Considere as condições da Proposição 1 e assuma que a solução geral do sistema canônico integrável, definido pela Equação (3.33), é dada por

$$\begin{aligned}\xi_i &= \xi_i(c_1, \dots, c_{2n-2}, E, M), \\ \eta_i &= \eta_i(c_1, \dots, c_{2n-2}, E, M), \quad i = 1, \dots, n,\end{aligned}\tag{3.41}$$

c_1, \dots, c_{2n-2} , sendo constantes arbitrárias de integração, E a integral da energia para o sistema não perturbado e $M = t + c$, onde c é uma constante aditiva, então

$$\{F, H_0^*\} = \frac{\partial F}{\partial M}.\tag{3.42}$$

PROVA. De acordo com o método de variação dos parâmetros, a solução geral do sistema, dado pela Equação (3.31), com Hamiltoniana H^* , dada pela Equação (3.32), pode ser posta, em virtude da Equação (3.41), na forma

$$\begin{aligned}\xi_i &= \xi_i(c_1(t), \dots, c_{2n-2}(t), E(t), M(t)), \\ \eta_i &= \eta_i(c_1(t), \dots, c_{2n-2}(t), E(t), M(t)), \quad i = 1, \dots, n,\end{aligned}\tag{3.43}$$

Neste ponto, assume-se que E depende do tempo t , em virtude dos termos de ordens superiores em R^* , e $M(t)$ correspondente a $t + c(t)$. Portanto, as funções dependentes do tempo $c_1(t), \dots, c_{2n-2}(t)$, $E(t)$ e $c(t)$ satisfazem o seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\sum_{j=1}^{2n-2} \frac{\partial \xi_i}{\partial c_j} \frac{dc_j}{dt} + \frac{\partial \xi_i}{\partial E} \frac{dE}{dt} + \frac{\partial \xi_i}{\partial c} \frac{dc}{dt} = \frac{\partial R^*}{\partial \eta_i}, \quad (3.44)$$

$$\sum_{j=1}^{2n-2} \frac{\partial \eta_i}{\partial c_j} \frac{dc_j}{dt} + \frac{\partial \eta_i}{\partial E} \frac{dE}{dt} + \frac{\partial \eta_i}{\partial c} \frac{dc}{dt} = -\frac{\partial R^*}{\partial \xi_i}, \quad i = 1, \dots, n.$$

As derivadas parciais $\frac{\partial R^*}{\partial \xi_i}$ e $\frac{\partial R^*}{\partial \eta_i}$ são escritas em termo de $c_1(t), \dots, c_{2n-2}(t)$, $E(t)$ e

$M(t)$. A derivada no tempo da função diferenciável $F(\xi, \eta)$ é então dada por

$$\begin{aligned} \frac{F(\xi, \eta)}{dt} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial \xi_i} \left[\sum_{j=1}^{2n-2} \frac{\partial \xi_i}{\partial c_j} \frac{dc_j}{dt} + \frac{\partial \xi_i}{\partial E} \frac{dE}{dt} + \frac{\partial \xi_i}{\partial M} \frac{dM}{dt} \right] + \\ &+ \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial \eta_i} \left[\sum_{j=1}^{2n-2} \frac{\partial \eta_i}{\partial c_j} \frac{dc_j}{dt} + \frac{\partial \eta_i}{\partial E} \frac{dE}{dt} + \frac{\partial \eta_i}{\partial M} \frac{dM}{dt} \right]. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Por outro lado,

$$\frac{dM}{dt} = 1 + \frac{dc}{dt}, \quad (3.46)$$

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial M} = \frac{\partial \xi_i}{\partial c} = \frac{\partial \xi_i}{\partial t}, \quad (3.47)$$

$$\frac{\partial \eta_i}{\partial M} = \frac{\partial \eta_i}{\partial c} = \frac{\partial \eta_i}{\partial t}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.48)$$

Combinando as Equações (3.45) - (3.48), e substituindo na Equação (3.39), e desde que a Equação (3.40) se aplica, segue que

$$\{F, H_0^*\} = \frac{\partial F}{\partial t}.$$

Em virtude das Equações (3.47) e (3.48), encontra-se que

$$\{F, H_0^*\} = \frac{\partial F}{\partial M}.$$

Aqui, F e R^* são escritos como função de c_1, \dots, c_{2n-2} , E e M .

Agora, consideremos o problema de determinar as funções S_m e H_m^* na Equação (3.26).

Seguindo as Proposições 1 e 2, a Equação (3.26) pode ser posta na forma

$$\frac{\partial S_m}{\partial t} = \Theta_m - H_m^* \quad (3.49)$$

com Θ_m escrita em termos das constantes arbitrárias de integração da solução geral definida através das Equações (3.34) ou (3.41), de acordo com as Proposições 1 ou 2 respectivamente. S_m e H_m^* são funções desconhecidas.

Seguindo Hori (1966), supõe-se que a transformação canônica gerada pela função geratriz S é tal que o tempo t é eliminado da nova Hamiltoniana. Isto é realizado tomando H_m^* como o valor médio da função Θ_m . Portanto, as funções S_m e H_m^* são dadas através das equações

$$H_m^* = \langle \Theta_m \rangle, \quad (3.50)$$

$$S_m = \int [\Theta_m - \langle \Theta_m \rangle] dt, \quad (3.51)$$

onde $\langle \rangle$ denota a média com respeito a t . Pode ser notado que o processo de média na integração das Equações (3.50) e (3.51) são feitos considerando a dependência explícita no tempo ou na variável M das funções. Em outras palavras, c_1, \dots, c_{2n} ou c_1, \dots, c_{2n-2} , E são tomadas como parâmetros. Um importante resultado é obtido desse processo (Hori, 1966):

PROPOSIÇÃO 3. Se transformação canônica gerada pela função S é tal que o tempo t é eliminado na nova Hamiltoniana H^* , então H_0^* é uma integral primeira das novas equações canônicas.

PROVA. Considere a função perturbadora $R^*(\xi, \eta; \varepsilon) = \sum_{k=1} \varepsilon^k H_k^*(\xi, \eta)$. De acordo com a Proposição 1,

$$\{R^*, H_0^*\} = \frac{\partial R^*}{\partial t}, \quad (3.52)$$

com R^* escrito como função das constantes arbitrárias de integração da solução geral das equações canônicas descritas por H_0^* e possivelmente o tempo t . É assumido que a nova Hamiltoniana não depende explicitamente do tempo t ,

$$H^*(\xi, \eta; \varepsilon) = H_0^* + R^*(\xi, \eta; \varepsilon) = H_0^* + \sum_{k=1} \varepsilon^k H_k^*(c_1, \dots, c_{2n-2}, E). \quad (3.53)$$

Das Equações (3.52) e (3.53), $\{R^*, H_0^*\} = 0$. Portanto,

$$0 = \{R^*, H_0^*\} = \{R^* + H_0^* - H_0^*, H_0^*\} = \{H^*, H_0^*\} = \frac{dH_0^*}{dt},$$

deste modo $H_0^*(\xi, \eta) = \text{constante} = E$.

De acordo com os resultados sobre sistemas canônicos semi-generalizados apresentados na Seção 3.3, a solução geral do sistema canônico integrável definida através das Equações (3.15), define uma transformação de Mathieu entre as variáveis (η, ξ) e os parâmetros de integração $(b; c)$,

$$(\eta; \xi) \xrightarrow{\text{MATHIEU}} (b; c).$$

Conseqüentemente, o método de Hori quando aplicado a sistemas canônicos semi-generalizados cria duas transformações canônicas: a transformação canônica infinitesimal gerada pela função geratriz S e a transformação de Mathieu definida por (3.15),

$$(\lambda; x) \xrightarrow{S} (\eta; \xi) \xrightarrow{\text{MATHIEU}} (b; c).$$

Este resultado introduz significativas simplificações na resolução formal, através do método de Hori, do sistema dinâmico governado pela função Hamiltoniana H . Visto que os parêntesis de Poisson são invariantes com respeito a transformações canônicas, o algoritmo do método de Hori pode, neste caso, ser diretamente aplicado ao novo conjunto de variáveis canônicas $(b; c)$; não sendo mais necessária a inversão da solução geral do núcleo integrável para expressar a nova função Hamiltoniana H e a função geratriz S em termos das variáveis intermediárias (η, ξ) .

O sistema de equações diferenciais para as novas variáveis canônicas $(b; c)$ é dado por

$$\begin{aligned} \frac{dc^T}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial b} \\ \frac{db^T}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial c}, \end{aligned} \tag{3.54}$$

com $H = H(b, c, \varepsilon)$.

Esta versão do método de Hori será utilizada nos Capítulos 5, 6 e 7 para determinar soluções de primeira ordem para os problemas de transferências de longa duração em campo de força central Newtoniano.

CAPÍTULO 4

PROBLEMA GERAL DE TRANSFERÊNCIA

4.1 – Introdução

Os problemas de otimização de trajetórias espaciais são fundamentais em Mecânica Espacial e têm sido tema de inúmeros estudos analíticos e numéricos por mais de cinco décadas, desde os trabalhos pioneiros de Lawden no início da década de 50 (Lawden, 1954, 1963). Na análise de tais problemas, consideram-se dois modelos básicos para os sistemas propulsivos baseados na modulação da velocidade de ejeção dos gases: os sistemas a velocidade de ejeção constante – sistemas VEC, e os sistemas a potência limitada e velocidade de ejeção modulável – sistemas PL (Marec, 1979). As trajetórias ótimas realizadas através dos sistemas VEC, que podem possuir elevado ou baixo nível de empuxo, são caracterizadas pela alternância entre arcos propulsados de tração máxima e arcos balísticos, cuja conexão é determinada pela solução do chamado problema do arco balístico que descreve a evolução do vetor fundamental – “primer vector” – ao longo de um arco não-propulsado (balístico). Por sua vez, as trajetórias ótimas realizadas pelos sistemas PL, que possuem baixo nível de empuxo, são caracterizadas pela aplicação contínua de tração.

Neste capítulo será apresentado uma visão geral do estudo das transferências espaciais ótimas (consumo mínimo de combustível) entre órbitas elípticas quaisquer realizadas através de sistemas propulsivos a baixo empuxo e potência limitada – sistema PL, e livremente orientável em um campo de força central Newtoniano. O problema de otimização é inicialmente formulado como um problema de Mayer tendo elementos cartesianos – vetores posição e velocidade – como variáveis de estado; em seguida, após a aplicação do Princípio de Máximo de Pontryagin será determinada a função Hamiltoniana máxima que descreve as trajetórias extremas, e para finalizar será feita

uma transformação de elementos cartesianos para elementos orbitais clássicos através da transformação de Mathieu que é definida a partir da solução geral do núcleo integrável da função Hamiltoniana Da Silva Fernandes (1995).

4.2 - Definição de Transferência Espacial Ótima

O problema de otimização consiste em transferir um veículo espacial do estado inicial $(\vec{r}_0, \vec{v}_0, 0)$ para o estado final $(\vec{r}_f, \vec{v}_f, J(t_f))$ de forma a minimizar $J(t_f)$ (consumo mínimo de combustível). As condições cinemáticas (\vec{r}_0, \vec{v}_0) e (\vec{r}_f, \vec{v}_f) caracterizam as órbitas inicial e final, respectivamente, conforme mostrado na Figura 4.1. A duração da transferência pode ser livre ou fixada. Neste trabalho assumiremos que os estados terminais correspondem ao problema de transferência simples (sem rendez-vous).

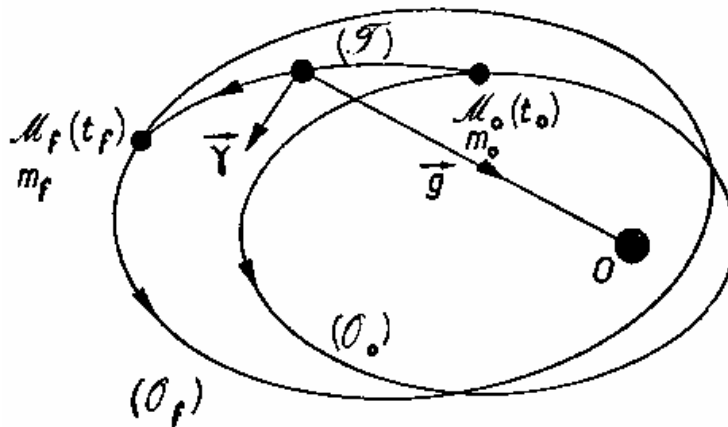


FIGURA 4.1: Transferência em um campo de força central.

FONTE: Marec (1979).

A minimização do consumo de combustível é o critério mais frequentemente encontrado na prática e o de maior interesse por estar relacionado à vida útil do veículo espacial. O problema será sempre discutido em termos de transferência com mínimo consumo de combustível, embora outras variantes do problema existam na literatura, tais

como: tempo mínimo para transferência, velocidade final mínima, encontro com outro veículo espacial, problema de Lambert (Battin e Vaughan, 1984), etc.

4.3 – Modelos Matemáticos dos Sistemas Propulsivos

Conforme ressaltado por Marec (1979), a determinação das trajetórias espaciais ótimas depende essencialmente do modelamento matemático utilizado para os sistemas propulsivos.

O desempenho de um sistema propulsivo pode ser caracterizado por dois parâmetros essenciais no domínio de operação, a velocidade de ejeção máxima e o nível máximo do empuxo. Relativo a esses dois parâmetros, os sistemas propulsivos podem ser classificados em: i) sistemas de alto empuxo, que são caracterizados pelo alto nível de aceleração do empuxo e o baixo empuxo específico (propulsão convencional); e ii) sistemas de baixo empuxo, que são caracterizados pelo baixo nível de aceleração do empuxo e o alto empuxo específico (propulsão elétrica, iônica, etc). Com relação à forma do domínio de operação, os sistemas propulsivos de baixo empuxo podem ser essencialmente classificados em velocidade de ejeção constante (VEC) e potência limitada (PL). Neste estudo será tratado apenas de sistemas propulsivos de baixo empuxo e potência limitada.

O modelamento matemático dos sistemas propulsivos é fundamental na teoria das trajetórias espaciais ótimas (Marchal, 1976; Marec, 1979, 1984). Os estudos de manobras orbitais (transferências ou "rendez-vous") são limitados ao caso de sistemas propulsivos com domínio de operação fixado, cujo desempenho é caracterizado basicamente por dois parâmetros: o impulso específico máximo $I_{sp, máx}$ e a razão entre $F_{máx}$ e o peso do sistema propulsivo no solo. Em relação a estes dois parâmetros, os sistemas propulsivos são classificados em duas categorias:

a) sistemas de alto empuxo: caracterizados por elevado nível de aceleração ($\Gamma_{m\acute{a}x} = 10$ a $100 g$) e baixo impulso específico ($I_{sp} = 300$ a $1.000 s$). São os sistemas de propulsão química convencional. Os arcos propulsados são de curta duração.

b) sistemas de baixo empuxo: caracterizados por pequeno nível de aceleração ($\Gamma_{m\acute{a}x} = 10^{-4}$ a $10^{-2} g$) e elevado impulso específico ($I_{sp} = 3.000$ a $10.000 s$). São os sistemas de propulsão elétrica. Os arcos propulsados são de longa duração.

No entanto, do ponto de vista da formulação matemática do problema de otimização de trajetórias espaciais é conveniente classificar os sistemas propulsivos quanto à modulação da velocidade de ejeção dos gases, o que nos leva a distinguir dois modelos:

a) sistemas a velocidade de ejeção constante - VEC - e empuxo limitado, que podem ser de alto ou baixo empuxo. Para tais sistemas, introduz-se para medida de desempenho a velocidade característica C ,

$$\frac{dC}{dt} = \Gamma.$$

b) sistemas com velocidade de ejeção modulável e potência limitada - PL - que são apenas de baixo empuxo. Para tais sistemas introduz-se para medida de desempenho a grandeza J ,

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{1}{2} \Gamma^2.$$

Estas grandezas são funções monotonicamente decrescentes da massa do veículo. A minimização delas corresponde à minimização do consumo de combustível.

É importante ressaltar que, nesta tese será estudado apenas o sistema propulsivo de baixo empuxo e potência limitada (PL).

4.4 - Formulação do Problema

Considere-se um veículo espacial se deslocando em um campo gravitacional com centro de atração O . Em um instante t , o estado do veículo é definido pelo vetor posição $\vec{r}(t)$, pelo vetor velocidade $\vec{v}(t)$ e pela grandeza J (sistema propulsivo a baixo empuxo e potência limitada) que é expressa por

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \Gamma^2 dt, \quad (4.1)$$

onde Γ é a magnitude da aceleração devido à força propulsiva (empuxo) F . A grandeza J também é expressa em termos da massa m por

$$J = P_{m\acute{a}x} \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m_0} \right), \quad (4.2)$$

onde $P_{m\acute{a}x}$ é a potência máxima.

Deseja-se determinar o controle $\vec{\Gamma}(t)$ que transfere o veículo espacial do estado inicial $(\vec{r}_0, \vec{v}_0, 0)$ em $t_0 = 0$ para o estado final $(\vec{r}_f, \vec{v}_f, J(t_f))$ em algum instante t_f , de tal forma que a grandeza J_{t_f} seja mínima, conforme representado na Figura 4.2.

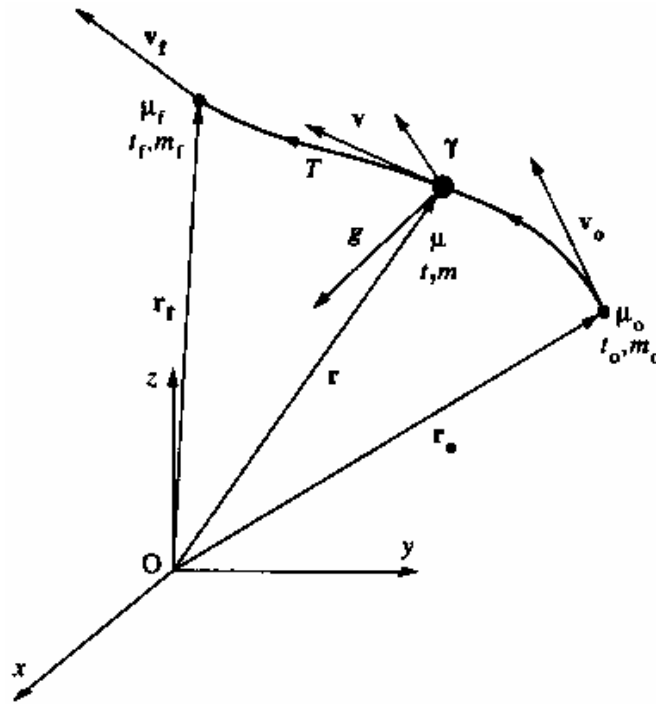


FIGURA 4.2: Geometria da transferência.

FONTE: Marec (1979).

O problema de otimização de transferências entre órbitas quaisquer realizadas por sistemas propulsivos a baixo empuxo e potência limitada (sistema PL) será formulado como um problema de Mayer com vetores posição e velocidade (elementos cartesianos) como variáveis de estado. Desta forma, as equações de estado são expressas por:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v},$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{\mu}{r^3} \vec{r} + \Gamma \vec{D}, \quad (4.3)$$

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{1}{2} \Gamma^2,$$

onde \vec{r} é vetor posição, \vec{v} é o vetor velocidade, J é variável de consumo, $\vec{\Gamma}$ é o vetor da aceleração propulsiva; e \vec{D} é a direção de $\vec{\Gamma}$. Para os sistemas PL não existem quaisquer restrições sobre a aceleração propulsiva. Neste caso é assumido que Γ é livremente orientável.

Introduzindo as variáveis adjuntas \vec{p}_r , \vec{p}_v e p_j constrói-se a função Hamiltoniana H ,

$$H = \vec{p}_r \bullet \vec{v} + \vec{p}_v \bullet \left[-\frac{\mu}{r^3} \vec{r} + \Gamma \vec{D} \right] + p_j \frac{1}{2} \Gamma^2, \quad (4.4)$$

onde (\bullet) denota produto escalar.

De acordo com Princípio de Máximo de Pontryagin, a aceleração ótima $\vec{\Gamma}^*$ deve ser selecionada dentre os controles admissíveis de forma a maximizar H . Portanto, a direção ótima é expressa por

$$\vec{D}^* = \frac{\vec{p}_v}{p_v}, \quad (4.5)$$

onde,

$$p_v = |\vec{p}_v|.$$

Introduzindo a Equação (4.5) na Equação (4.4), resulta

$$H = \vec{p}_r \bullet \vec{v} + p_v \Gamma + \frac{1}{2} p_j \Gamma^2$$

E, da condição de estacionaridade, encontra-se a magnitude ótima.

$$\Gamma^* = -\frac{p_v}{p_j}. \quad (4.6)$$

A aceleração ótima é dita ser modulável (Marec, 1979).

Por outro lado, a variável J é uma variável cíclica ou ignorável, e da condição de transversalidade obtém-se que

$$p_J = p_J(t_f) = -1. \quad (4.7)$$

Conseqüentemente das Equações (4.6) e (4.7) tem-se que

$$\vec{\Gamma}^* = \vec{p}_v. \quad (4.8)$$

Observa-se que para o sistema propulsivo de potência limitada a aceleração ótima é igual ao vetor adjunto à velocidade (vetor fundamental).

Da lei de controle ótimo apresentada pelas Equações (4.5) e (4.6) encontra-se a função Hamiltoniana máxima H^* expressa por

$$H^* = \vec{p}_r \cdot \vec{v} + \vec{p}_v \cdot \left[-\frac{\mu}{r^3} \vec{r} \right] - \frac{1}{2} \frac{p_v^2}{p_j}. \quad (4.9)$$

Finalmente, substituindo a Equação (4.7) na Equação (4.9) obtém-se

$$H^* = \vec{p}_r \cdot \vec{v} + \vec{p}_v \cdot \left[-\frac{\mu}{r^3} \vec{r} \right] + \frac{1}{2} p_v^2. \quad (4.10)$$

A aceleração da gravidade \vec{g} deriva de uma função potencial U , cuja forma depende da hipótese adotada. Na maioria dos trabalhos considera-se a hipótese clássica de campo

gravitacional central Newtoniano, para a qual a aceleração é inversamente proporcional ao quadrado da distância radial r . A função Hamiltoniana H^* definida pela Equação (4.10) descreve as trajetórias extremais.

4.5 - Transformação de Elementos Cartesianos para Elementos Orbitais

Conforme apresentado na secção anterior Equação (4.10), segue que a função Hamiltoniana máxima H^* que governa as trajetórias extremais pode ser expressa por

$$H^* = H_0^* + R^*, \quad (4.11)$$

onde H_0^* denota a Hamiltoniana não-perturbada, que descreve o movimento em campo central Newtoniano,

$$H_0^* = \vec{p}_r \cdot \vec{v} + \vec{p}_v \cdot \left[-\frac{\mu}{r^3} \vec{r} \right], \quad (4.12)$$

e R^* é a parcela da Hamiltoniana relativa à aceleração propulsiva ótima.

$$R^* = \frac{1}{2} p_v^2 \quad (4.13)$$

Deve-se notar que H^* governa um sistema canônico semi-generalizado, em que a solução geral do sistema canônico descrito por seu núcleo integrável H_0^* define uma transformação de Mathieu que permite introduzir de forma sistemática conjuntos de elementos orbitais adequados a cada tipo de manobra.

4.5.1 - Solução do Sistema Governado pelo Núcleo Integrável

Conforme observado na seção anterior, a transformação de elementos cartesianos – vetores posição e velocidade – para elementos orbitais clássicos – semi-eixo maior, excentricidade, argumento do periapsis e anomalia média -, mais convenientes para o nosso estudo, é feita por meio das propriedades dos sistemas canônicos generalizados (Da Silva Fernandes, 1994a, 1994b) baseadas nas transformações de Mathieu definidas pela solução geral do sistema canônico descrito pelo núcleo integrável H_0^* da função Hamiltoniana H^* que descreve o sistema. Consideremos o sistema de equações diferenciais definido pela Hamiltoniana não-perturbada H_0^* ,

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v},$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{\mu}{r^3} \vec{r},$$

$$\frac{d\vec{p}_r}{dt} = \frac{\mu}{r^3} [\vec{p}_v - 3(\vec{p}_v \cdot \vec{r})\hat{r}],$$

$$\frac{d\vec{p}_v}{dt} = -\vec{p}_r, \tag{4.14}$$

A solução do sistema de equações diferenciais, dado pela Equação (4.14), divide-se em duas etapas: inicialmente, realizamos a integração das equações de estado; e, em seguida, com a solução geral destas equações adjuntas, mediante o cálculo da matriz Jacobiana da transformação inversa definida pela solução geral das equações de estado (ver Apêndice A). Para o movimento elíptico, que é o caso que nos interessa no momento, tem-se que a solução geral da Equação (4.14) é dada por

$$\vec{r} = a(1 - e \cos E) \hat{r} = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \nu} \hat{r}, \quad (4.15)$$

$$\vec{v} = \sqrt{\frac{\mu}{a(1 - e^2)}} [e \operatorname{sen} \nu \hat{r} + (1 + e \cos \nu) \hat{s}], \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned} \vec{p}_r = & \frac{a}{r^2} \left\{ 2a\pi_a + (1 - e^2) \cos E \pi_e + \frac{1}{e} \left(\frac{r}{a} \right) \operatorname{sen} \nu \pi_\omega - \right. \\ & \left. - \frac{(1 - e^3 \cos E)}{e\sqrt{1 - e^2}} \left(\frac{r}{a} \right) \operatorname{sen} \nu \pi_M \right\} \hat{r} + \left\{ \frac{\operatorname{sen} \nu}{a} \pi_e - \frac{(\cos \nu + e)}{ae(1 - e^2)} \pi_\omega + \right. \\ & \left. + \frac{\sqrt{1 - e^2}}{ae} \cos \nu \pi_M \right\} \hat{s} + \frac{1}{a(1 - e^e)} \left\{ \left(\frac{a}{r} \right) \operatorname{sen} E [\cos \omega \pi_l + \right. \\ & \left. + \operatorname{sen} \omega \left(\frac{\pi_\Omega}{\operatorname{sen} I} - \cot g I \pi_\omega \right)] + \sqrt{1 - e^2} \left(\frac{a}{r} \right) \cos E [\operatorname{sen} \omega \pi_l - \right. \\ & \left. \left. - \cos \omega \left(\frac{\pi_\Omega}{\operatorname{sen} I} - \cot g I \pi_\omega \right)] \right\} \hat{w}, \quad (4.17) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{p}_v = & \frac{1}{na\sqrt{1 - e^2}} \left\{ 2ae \operatorname{sen} \nu \pi_a + (1 - e^2) \operatorname{sen} \nu \pi_e - \right. \\ & \left. - \frac{(1 - e^2)}{e} \cos \nu \pi_\omega + \frac{(1 - e^2)^3}{e} \left(\frac{-2e}{1 + e \cos \nu} + \cos \nu \right) \pi_M \right\} \hat{r} + \\ & \left[2a(1 - e^2) \left(\frac{a}{r} \right) \pi_a + (1 - e^2) (\cos E + \cos \nu) \pi_e + \right. \\ & \left. + \frac{(1 - e^2)}{e} \left(1 + \frac{1}{1 + e \cos \nu} \right) \operatorname{sen} \nu (\pi_\omega - \sqrt{1 - e^2} \pi_M) \right] \hat{s} + \\ & \left. + \left[\left(\frac{r}{a} \right) \cos(\omega + \nu) \pi_l + \left(\frac{r}{a} \right) \operatorname{sen}(\omega + \nu) \left(\frac{\pi_\Omega}{\operatorname{sen} I} - \cot g I \pi_\omega \right) \right] \hat{w} \right\}. \quad (4.18) \end{aligned}$$

onde,

$$\begin{aligned}\hat{r} = & [\cos \Omega \cos(\omega + \nu) - \sin \Omega \sin(\omega + \nu) \cos I] \vec{i} + \\ & + [\sin \Omega \cos(\omega + \nu) + \cos \Omega \sin(\omega + \nu) \cos I] \vec{j} + \\ & + \sin(\omega + \nu) \sin I \vec{k},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{s} = & -[\cos \Omega \sin(\omega + \nu) - \sin \Omega \cos(\omega + \nu) \cos I] \vec{i} + \\ & + [-\sin \Omega \sin(\omega + \nu) + \cos \Omega \cos(\omega + \nu) \cos I] \vec{j} + \\ & + \cos(\omega + \nu) \sin I \vec{k},\end{aligned}$$

$$\hat{w} = \sin \Omega \sin I \vec{i} - \cos \Omega \sin I \vec{j} + \cos I \vec{k},$$

são os vetores unitários do sistema móvel (sistema de Gauss) ao longo da direção radial, circunferencial e normal, respectivamente, conforme mostrado na Figura (4.3); a , e , I , Ω , ω , M os elementos Keplerianos; π_a , π_e , π_ω , π_I , π_Ω e π_M são respectivamente as variáveis adjuntas.

As funções $\left(\frac{a}{r}\right)$, $\left(\frac{r}{a}\right) \sin \nu$, $\left(\frac{r}{a}\right) \cos \nu$...etc são expressões bem conhecidas do movimento elíptico, funções da anomalia média e da excentricidade (Kovalevsky, 1967).

Os vetores unitários \vec{i} , \vec{j} e \vec{k} estendem-se ao longo dos eixos coordenados x , y e z do sistema inercial de referência $Oxyz$.

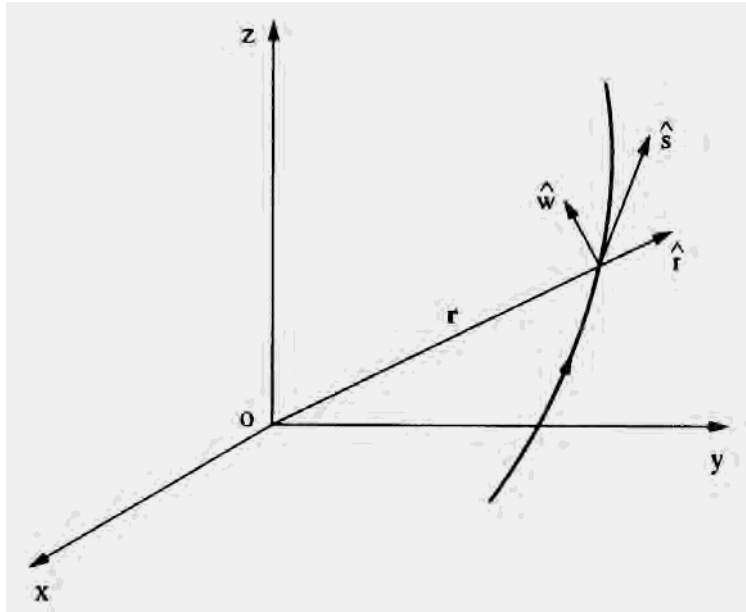


FIGURA 4.3: Vetores unitários do sistema móvel.

A anomalia verdadeira ν e a anomalia excêntrica E se relacionam através da equação

$$\operatorname{tg} \frac{\nu}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2}, \quad (4.19)$$

e a anomalia excêntrica E se relaciona com a anomalia média M através da Equação de Kepler

$$M = E - e \operatorname{sen} E = n(t - \tau), \quad (4.20)$$

onde τ é o tempo de passagem pelo periapsis e n é o movimento médio.

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}.$$

De acordo com as propriedades dos sistemas canônicos generalizados, as Equações (4.15) – (4.18), definem uma transformação canônica – transformação de Mathieu – entre os elementos cartesianos e os orbitais,

$$(p_r, p_v, r, v) \xrightarrow{\text{Mathieu}} (\pi_a, \dots, \pi_M; a, \dots, M),$$

que não envolve explicitamente o tempo. A Hamiltoniana máxima H^* é invariante com respeito a esta transformação

$$H^*(p_r, p_v, r, v) = H^*(\pi_a, \dots, \pi_M; a, \dots, M), \quad (4.21)$$

onde H^* denota a função Hamiltoniana máxima expressa em termos das novas variáveis canônicas. A Hamiltoniana máxima H^* pode então ser colocada na forma que será apresentada na próxima seção.

4.5.2- A Nova Função Hamiltoniana

Para obter a função Hamiltoniana em termos dos elementos orbitais, deve-se observar que a solução do sistema governado por H_0 define uma transformação canônica – Transformação de Mathieu, que não envolve explicitamente o tempo. A função Hamiltoniana é invariante com respeito a esta transformação. Conforme apresentado na seção anterior, temos que a parcela da nova função Hamiltoniana relativa ao núcleo integrável (Problema dos Dois Corpos) é expressa por

$$H_0^* = n\pi_M, \quad (4.22)$$

e a parcela relativa ao controle é dada por

$$\mathbf{H}_\gamma^* = \frac{1}{2} p_\nu^2, \quad (4.23)$$

com \vec{p}_ν obtido diretamente da Equação (4.18) a nova função Hamiltoniana máxima é expressa em termos dos elementos orbitais por

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^* = & n\pi_M + \frac{1}{2n^2a^2(1-e^2)} \left\{ \frac{1}{2}(1-\cos 2\nu)[2ae\pi_a + (1-e^2)\pi_e]^2 + \right. \\ & 2(1-e^2)\text{sen } 2\nu \left[-a\pi_a\pi_\omega - \frac{(1-e^2)}{2e}\pi_e\pi_\omega \right] + \\ & + 4(1-e^2)^{\frac{3}{2}} \text{sen } \nu \left(\frac{-2e}{1+e\cos\nu} + \cos\nu \right) \left[a\pi_a\pi_M + \frac{(1-e^2)}{2e}\pi_e\pi_M \right] + \\ & + \frac{(1-e^2)^2}{2e^2} (1+e\cos 2\nu)\pi_\omega^2 - \frac{2(1-e^2)^{\frac{5}{2}}}{e^2} \left(\frac{-2e}{1+e\cos\nu} + \cos\nu \right) \pi_\omega\pi_M \cos\nu + \\ & + \frac{(1-e^2)^3}{2e^2} \left(\frac{-2e}{1+e\cos\nu} + \cos\nu \right)^2 \pi_M + 4a^2(1-e^2)^2 \left(\frac{a}{r} \right)^2 \pi_a^2 + \\ & + 4a^2(1-e^2)^2 \left(\frac{a}{r} \right) (\cos E + \cos\nu)\pi_a\pi_e + (1-e^2)^2 (\cos E + \cos\nu)^2 \pi_e^2 + \\ & + \frac{4a(1-e^2)}{e} \left(\frac{a}{r} \right) \text{sen } \nu \left(1 + \frac{1}{1+e\cos\nu} \right) \left[\pi_a\pi_\omega - (1-e^2)^{\frac{1}{2}}\pi_a\pi_M \right] + \\ & + \frac{2(1-e^2)^2}{e} (\cos E + \cos\nu) \left(1 + \frac{1}{1+e\cos\nu} \right) \left[\pi_e\pi_\omega - (1-e^2)^{\frac{1}{2}}\pi_e\pi_M \right] \text{sen } \nu + \\ & + \left[\frac{(1-e^2)}{e} \left(1 + \frac{1}{1+e\cos\nu} \right) \left(\pi_\omega - (1-e^2)^{\frac{1}{2}}\pi_M \right) \text{sen } \nu \right]^2 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \left(\frac{r}{a} \right)^2 \left[\pi_I^2 + \frac{1}{\text{sen}^2 I} (\pi_\Omega - \pi_\omega \cos I)^2 \right] + \\
& + \frac{1}{2} \left(\frac{r}{a} \right)^2 \cos 2(\omega + \nu) \left[\pi_I^2 - \frac{1}{\text{sen}^2 I} (\pi_\Omega - \pi_\omega \cos I)^2 \right] + \\
& + \left. \left(\frac{r}{a} \right)^2 \text{sen} 2(\omega + \nu) \frac{1}{\text{sen} I} (\pi_\Omega - \pi_\omega \cos I) \pi_I \right\}.
\end{aligned} \tag{4.24}$$

A função Hamiltoniana máxima expressa na Equação (4.24) descreve as trajetórias extremas para o problema de transferências entre órbitas elípticas quaisquer em um campo de força central Newtoniano.

Nos próximos capítulos serão analisados alguns casos particulares de manobras tais como: transferências entre órbitas coplanares coaxiais diretas, transferências entre órbitas coplanares não-coaxiais diretas e transferências entre órbitas não-coplanares coaxiais diretas.

CAPÍTULO 5

TRANSFERÊNCIAS ÓTIMAS A BAIXO EMPUXO E POTÊNCIA LIMITADA ENTRE ÓRBITAS COPLANARES E COAXIAIS DIRETAS

5.1– Introdução

Neste capítulo pretende-se analisar as transferências de consumo mínimo de combustível, realizadas por sistemas propulsivos a baixo empuxo e potência limitada, entre órbitas coplanares coaxiais diretas, apresentando resultados mais gerais em que a órbita inicial é elíptica. A versão canônica generalizada do método de Hori é aplicada na determinação de uma solução formal do problema de transferências entre órbitas coplanares coaxiais diretas. Esta solução formal é completa até primeira ordem do pequeno parâmetro em um campo de força central, incluindo termos seculares e periódicos. A análise da condição de suficiência é investigada através da determinação de pontos conjugados - condição de Jacobi - e são construídas as trajetórias extremas e as curvas de isoconsumo.

5.2 - Aplicação do Método de Hori para Transferências entre Órbitas Coplanares Coaxiais Diretas.

Para o problema de transferência simples (sem “rendez-vous”) entre órbitas coplanares coaxiais diretas em um campo de força central Newtoniano com duração fixada pode-se escolher um sistema de referência adequado (sistema que simplifica o problema em estudo, uma vez que o campo gravitacional é central) de tal forma que $I = 90^\circ$ e $\omega = 0^\circ$. Uma vez que não existem variações impostas sobre I , Ω e ω , tem-se que π_ω , π_I e π_Ω são nulos. A função Hamiltoniana média H^* descrita pela Equação (4.24) para o problema em questão se reduz a

$$\begin{aligned}
H^* = & n\pi_M + \frac{1}{2n^2a^2(1-e^2)} \left\{ \frac{1}{2}(1-\cos 2\nu)[2ae\pi_a + (1-e^2)\pi_e]^2 + \right. \\
& + 4(1-e^2)^{\frac{3}{2}} \operatorname{sen}\nu \left(\frac{-2e}{1+e\cos\nu} + \cos\nu \right) \left[a\pi_a\pi_M + \frac{(1-e^2)}{2e}\pi_e\pi_M \right] + \\
& + \frac{(1-e^2)^3}{2e^2} \left(\frac{-2e}{1+e\cos\nu} + \cos\nu \right)^2 \pi_M + 4a^2(1-e^2)^2 \left(\frac{a}{r} \right)^2 \pi_a^2 + \\
& + 4a^2(1-e^2)^2 \left(\frac{a}{r} \right) (\cos E + \cos\nu)\pi_a\pi_e + (1-e^2)^2 (\cos E + \cos\nu)^2 \pi_e^2 - \\
& - \frac{4a(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}{e} \left(\frac{a}{r} \right) \operatorname{sen}\nu \left(1 + \frac{1}{1+e\cos\nu} \right) \pi_a\pi_M - \\
& - \frac{2(1-e^2)^{\frac{5}{2}}}{e} (\cos E + \cos\nu) \left(1 + \frac{1}{1+e\cos\nu} \right) \pi_e\pi_M \operatorname{sen}\nu + \\
& \left. + \left[-\frac{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}{e} \left(1 + \frac{1}{1+e\cos\nu} \right) \pi_M \operatorname{sen}\nu \right]^2 \right\}. \tag{5.1}
\end{aligned}$$

onde H^* denota a Hamiltoniana máxima expressa em termos das novas variáveis canônicas.

A solução formal do problema de transferências entre órbitas coplanares coaxiais diretas em um campo de força central Newtoniano será feito através da aplicação do método de Hori para sistemas canônicos semi-generalizados, apresentado no Capítulo 3. Será considerada a solução completa, incluindo os termos seculares e periódicos, até primeira ordem no pequeno parâmetro, que pode ser definido como sendo da mesma magnitude de Γ , de maneira que para aplicar o método de Hori considera-se H_0^* como sendo de

ordem zero, e H_{Γ}^* como sendo de primeira no pequeno parâmetro, uma vez que a função Hamiltoniana H^* pode ser fatorada pelo pequeno parâmetro.

Segundo as equações de perturbação que constituem o algoritmo do método de Hori, apresentado nas Equações (3.23) – (3.25), tem-se que:

Ordem zero:

$$H_0^* = H_0'^* = n\pi_M = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}\pi_M \quad (5.2)$$

onde $H_0'^*$ denota o termo de ordem zero da nova função Hamiltoniana. Este termo corresponde ao núcleo integrável da Hamiltoniana original H^* .

Ordem um:

$$\{H_0^*, S_1\} = H_1'^* - H_1^*, \quad (5.3)$$

sendo H^* função Hamiltoniana máxima expressa na Equação (5.1) que descreve as trajetórias extremas para o problema de transferências entre órbitas coplanares coaxiais diretas em um campo de força central Newtoniano.

A fim de determinar a nova função Hamiltoniana $H_1'^*$ e a função geratriz S_1 , determina-se a solução do sistema canônico integrável, dado por:

$$\frac{da}{dt} = \frac{\partial H_0'^*}{\partial \pi_a} \quad \frac{d\pi_a}{dt} = -\frac{\partial H_0'^*}{\partial a}$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{\partial H_0'^*}{\partial \pi_e} \quad \frac{d\pi_e}{dt} = -\frac{\partial H_0'^*}{\partial e}$$

$$\frac{dM}{dt} = \frac{\partial H_0^*}{\partial \pi_M} \qquad \frac{d\pi_M}{dt} = -\frac{\partial H_0^*}{\partial M} \qquad (5.4)$$

A solução geral do sistema canônico integrável, definido pela Equação (5.4) é expressa por:

$$\begin{aligned} a &= a_0 & \pi_a &= \frac{3}{2} \sqrt{\frac{\mu}{a_0^5}} \pi_{M_0} t + \pi_{a_0} \\ e &= e_0 & \pi_e &= \pi_{e_0} \\ M &= \sqrt{\frac{\mu}{a_0^3}} t + M_0 & \pi_M &= \pi_{M_0}, \end{aligned} \qquad (5.5)$$

onde a_0 , e_0 , M_0 , π_{a_0} , π_{e_0} e π_{M_0} são constantes com respeito a t .

Pode-se notar que os elementos orbitais e suas respectivas variáveis adjuntas constituem as constantes de integração com respeito ao t , que descrevem a solução do sistema canônico integrável; com exceção, a anomalia média e a variável adjunta associada ao semi-eixo maior.

Introduzindo a solução geral do sistema canônico integrável, expresso na Equação (5.5) na Equação (5.3), esta se reduz a:

$$\frac{\partial S_1}{dt} = H_1^* - H_1'^*, \qquad (5.6)$$

sendo H_1^* a parcela da função Hamiltoniana relativo ao controle, definida pela Equação (5.1).

Para resolver a Equação (5.6) e determinar nova função Hamiltoniana H_1^* e a função geratriz da transformação S_1 , aplica-se o princípio de média, apresentado no Capítulo 3,

$$H_1'^* = \langle H^* \rangle_t, \quad (5.7)$$

$$S_1 = \int (H^* - \langle H^* \rangle) dt. \quad (5.8)$$

onde o símbolo $\langle \rangle_t$ denota a média com respeito ao tempo t .

Seguindo o procedimento proposto por Hori, tem-se que a nova função Hamiltoniana $H_1'^*$ e a função geratriz S_1 da transformação canônica são expressas, em primeira ordem, por:

Ordem zero:

$$H_0'^* = \sqrt{\frac{\mu}{a_0^3}} \pi_{M_0}. \quad (5.9)$$

Ordem um:

$$H_1'^* = \frac{1}{2} \frac{a}{\mu} \left[4a^2 \pi_a^2 + \frac{5}{2} (1-e^2) \pi_e^2 \right]. \quad (5.10)$$

$$S_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a^5}{\mu^3}} \left\{ 8ea^2 \pi_a^2 \sin E + 8(1-e^2) a \pi_a \pi_e \sin E + \right. \\ \left. + (1-e^2) \left[-\frac{5}{2} e \sin E + \frac{3}{4} \sin 2E - \frac{1}{12} e \sin 3E \right] \pi_e^2 \right\}. \quad (5.11)$$

Por simplicidade de notação omitimos o apóstrofe que denota as novas variáveis resultantes da transformação infinitesimal gerada por S_1 . A nova função Hamiltoniana $H_1'^*$ contém a parcela relacionada diretamente à aceleração propulsiva média e a função

geratriz, obtida por construção pelo método de Hori, é livre de termos seculares e termos seculares mistos.

5.2.1 – Solução do Novo Sistema Dinâmico

As equações de movimento correspondentes a nova função Hamiltoniana H_1^* , representada na Equação (5.10), que descrevem as trajetórias ótimas (extremais) são dadas por:

$$\frac{da}{dt} = \frac{4a^3}{\mu} \pi_a,$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{5a(1-e^2)}{2\mu} \pi_e,$$

$$\frac{d\pi_a}{dt} = -\frac{6a^2}{\mu} \pi_a^2 - \frac{5(1-e^2)}{4\mu} \pi_e^2,$$

$$\frac{d\pi_e}{dt} = \frac{5ae}{2\mu} \pi_e^2. \quad (5.12)$$

Para resolver o sistema de equações, dado pela Equação (5.12), necessita-se determinar as integrais primeiras do sistema. Portanto, para determinar estas integrais faz-se necessário efetuar a divisão $\frac{d\pi_e}{dt}$ por $\frac{de}{dt}$, obtendo-se

$$\frac{d\pi_e}{de} = \frac{e}{(1-e^2)} de. \quad (5.13)$$

Integrando a Equação (5.13), obtém-se:

$$\pi_e^2 = \frac{(1-e^2)\pi_{e_0}^2}{(1-e^2)}, \quad (5.14)$$

Uma vez que a função Hamiltoniana $H_1'^*$ não depende explicitamente do tempo ela é uma integral primeira do sistema.

$$H_1'^* = \frac{1}{2} \frac{a}{\mu} \left[4a^2 \pi_a^2 + \frac{5}{2} (1-e^2) \pi_e^2 \right], \quad (5.15)$$

Para resolver este problema na sua forma completa deve-se considerar a transformação de Mathieu definida por:

$$e = \text{sen } \phi, \quad (5.16)$$

$$\pi_\phi = \sqrt{1-e^2} \pi_e, \quad (5.17)$$

as demais variáveis permanecem inalteradas. A função Hamiltoniana $H_1'^*$ é invariante sob esta transformação, sendo expressa nas novas variáveis como:

$$H_1'^* = \frac{a}{2\mu} \left\{ 4a^2 \pi_a^2 + \frac{5}{2} \pi_\phi^2 \right\} \quad (5.18)$$

O novo sistema canônico descrito nas novas variáveis através da nova função Hamiltoniana $H_1'^*$, representada na Equação (5.18), que descrevem as trajetórias ótimas (extremais) é dado por:

$$\frac{da}{dt} = \frac{4}{\mu} a^3 \pi_a,$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{5}{2} \frac{a}{\mu} \pi_\phi,$$

$$\frac{d\pi_a}{dt} = -\frac{6}{\mu} a^2 \pi_a^2 - \frac{5}{4\mu} \pi_\phi^2,$$

$$\frac{d\pi_\phi}{dt} = 0. \tag{5.19}$$

O sistema canônico descrito por H_1^* , nas novas variáveis, possui duas integrais primeiras:

$$H_1^* = \frac{a}{2\mu} \left\{ 4a^2 \pi_a^2 + \frac{5}{2} \pi_\phi^2 \right\}, \tag{5.20}$$

$$\pi_\phi = C, \tag{5.21}$$

uma vez que a Hamiltoniana independe de t e a variável ϕ é cíclica.

A solução geral do sistema de equações, representado pela Equação (5.19), é expressa por:

$$a(t) = \frac{a_0}{1 + \frac{4a_0}{\mu} \left(\frac{1}{2} H_1^* t^2 - Bt \right)}, \tag{5.22}$$

$$\phi(t) = -\alpha 1 - \sqrt{\frac{5}{2}} \left\{ \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{4\mu H_1'^*}{5C^2 a(t)} - 1} \right\}, \quad (5.23)$$

$$e(t) = \operatorname{sen} \left\{ -\alpha 1 - \sqrt{\frac{5}{2}} \left[\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{4\mu H_1'^*}{5C^2 a(t)} - 1} \right] \right\}, \quad (5.24)$$

$$\pi_a^2 = \frac{a_0^3}{a^3} \pi_{a_0}^2 + \frac{5}{8} C^2 \left(\frac{a_0}{a^3} - \frac{1}{a^2} \right), \quad (5.25)$$

$$\pi_\phi = C, \quad (5.26)$$

onde

$$\alpha 1 = -\phi_0 - \sqrt{\frac{5}{2}} \left\{ \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{4\mu H_1'^*}{5C^2 a_0} - 1} \right\},$$

$$\frac{4\mu H_1'^*}{a_0} = 8B^2 + 5C^2$$

e,

$$B = a_0 \pi_{a_0}.$$

As condições iniciais têm sido tomadas tais que $a(0) = a_0$ e $\phi(0) = \phi_0$.

As Equações (5.22) – (5.26) representam a solução do sistema de equações canônicas relativo ao problema de transferências ótimas de longa duração realizadas por sistemas

propulsivos a baixo empuxo e potência limitada entre órbitas coplanares e coaxiais em campo central Newtoniano. Notamos que esta solução é mais geral que a obtida por Edelbaum (1965) através da integração direta das equações canônicas e com condições iniciais correspondentes à órbita circular, e está em acordo com a obtida por Carvalho e Da Silva Fernandes (2001) e Da Silva Fernandes (2003).

Visto que H_1^* é uma integral primeira, o consumo ótimo é obtido por simples quadratura. Das Equações (4.3), (4.8) e (4.13).

$$J = H_1^* t. \quad (5.27)$$

A aceleração ótima $\bar{\Gamma}^*$ relativa a transferências simples entre órbitas coplanares coaxiais diretas em um campo de força central é obtida pelas Equações (4.8) e (4.18) por:

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}^* = & \frac{1}{na\sqrt{1-e^2}} \left\{ [2ae\pi_a \sin \nu + (1-e^2)\pi_e \sin \nu] \hat{r} \right. \\ & \left. + \left[2a(1-e^2) \left(\frac{a}{r} \right) \pi_a + (1-e^2)(\cos E + \cos \nu) \pi_e \right] \hat{s} \right\}. \end{aligned} \quad (5.28)$$

A Equação (5.27) mostra que o consumo de combustível é proporcional à duração da manobra. Pode-se também mostrar a partir das Equações (5.10) e (5.28) que o valor da magnitude da aceleração média ótima é constante, pois,

$$H_1^* = \frac{1}{2} \Gamma^{*2} = cte. \quad (5.29)$$

5.3 – Trajetórias Ótimas

A solução formal do sistema dinâmico original definido pela função Hamiltoniana dada pela Equação (5.1) pode ser obtido através função geratriz S_1 , dada pela Equação (5.11). Segue do método de Hori que uma solução formal de primeira ordem para o problema de transferência entre órbitas coplanares e coaxiais diretas de duração qualquer é dada por:

$$a(t) = a'(t) + \frac{\partial S_1}{\partial \pi_a},$$

$$e(t) = e'(t) + \frac{\partial S_1}{\partial \pi_e},$$

que resulta em:

$$a(t) = a'(t) + \sqrt{\frac{a'^5}{\mu^3}} \left[8e'a'^2\pi'_a \sin E' + 4(1-e'^2)a'\pi'_e \sin E' \right]_{E'_0}^{E'}, \quad (5.30)$$

$$e(t) = e'(t) + \sqrt{\frac{a'^5}{\mu^3}} \left[4(1-e'^2)a'\pi' \sin E' + \right. \\ \left. + (1-e'^2) \left[-\frac{5}{2}e' \sin E' + \frac{3}{4} \sin 2E' - \frac{1}{12}e' \sin 3E' \right] \pi'_e \right]_{E'_0}^{E'}. \quad (5.31)$$

A apóstrofe é re-introduzido para indicar as novas variáveis canônicas resultantes da transformação canônica infinitesimal obtida através do método de Hori, que são expressas como funções de tempo através das Equações (5.22) – (5.26). A anomalia

excêntrica média E é calculada a partir da equação de Kepler, Equação (4.20), com a anomalia média “média” dada por:

$$M'(t) = M'_0 + \int_{t_0}^t \sqrt{\frac{\mu}{a'^3}} dt \quad (5.32)$$

sendo M'_0 a anomalia média “média” na época. A solução definida por (5.30) e (5.31) está em acordo com a obtida por Edelbaum utilizando o método de média de Bogoliubov e Mitropolsky (Edelbaum, 1966).

No Apêndice B na Seção B.2, é feita uma comparação entre os resultados analíticos e numéricos, com a finalidade de testar a validade, pois a construção das curvas extremas é mais simples e direta quando são utilizados os resultados obtidos pela solução analítica.

5.4 – Análise da Condição de Suficiência para Transferências entre Órbitas Coplanares Coaxiais Diretas

As curvas extremas (Edelbaum, 1964) se constituem numa importante ferramenta na análise de trajetórias espaciais, pois fornecem resultados que permitem determinar a existência de pontos conjugados, que é o primeiro ponto de tangência de um extremal com a curva que define o envelope de extremas, na determinação da trajetória de menor consumo de combustível. Essa análise se inicia na determinação da equação das trajetórias extremas no plano α vs ϕ . Assim sendo, a partir da Equação (5.23) pode-se obter a equação das trajetórias extremas expressa por:

$$\alpha = \cos^2 \left(\sqrt{\frac{2}{5}} (\phi + \alpha_1) \right) \left[\cos^2 \left(\sqrt{\frac{2}{5}} (\phi_0 + \alpha_1) \right) \right]^{-1} \quad (5.33)$$

Para complementar a análise e garantir que uma trajetória extrema obtida da família uni-paramétrica de extremais definida pela Equação (5.33) represente uma solução ótima, é necessário investigar a existência de pontos conjugados associada à condição de Jacobi. Se não existem pontos conjugados, a família uni-paramétrica de extremais (5.33) define um campo central de extremais no qual as soluções ótimas estão imersas (Elsgolts, 1977; Sagan, 1969). Geometricamente, o ponto conjugado é interpretado como o primeiro ponto de tangência de um extremal com a curva que define o envelope de extremais. Segundo Elsgolts (1977), o envelope da família uni-paramétrica de extremais (5.33) é definido pelas equações:

$$\alpha = \cos^2\left(\sqrt{\frac{2}{5}}(\phi + \alpha_1)\right) \left[\cos^2\left(\sqrt{\frac{2}{5}}(\phi_0 + \alpha_1)\right) \right]^{-1},$$

e,

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \alpha_1} = 0,$$

de forma que o ponto conjugado ao ponto (α_0, ϕ_0) do plano de fase sobre o extremal definido para $\alpha_1 = \alpha_{10}$ é definido pelas equações

$$\alpha = \cos^2\left(\sqrt{\frac{2}{5}}(\phi^* + \alpha_{10})\right) \left[\cos^2\left(\sqrt{\frac{2}{5}}(\phi_0 + \alpha_{10})\right) \right]^{-1}, \quad (5.34)$$

e,

$$\left. \frac{\partial \alpha}{\partial \alpha_1} \right|_{\alpha_{10}} = 0. \quad (5.35)$$

Portanto, resolvendo-se a Equação (5.34), tem-se que o ponto conjugado ao ponto (α_0, ϕ_0) é dado por

$$\alpha^* = 1, \quad (5.36)$$

e,

$$\phi^* = \sqrt{\frac{5}{2}}k\pi + \phi_0, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (5.37)$$

Uma vez que $\phi^* \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, o que corresponde a $0 \leq e < 1$, a família uni-paramétrica de trajetórias extremais descrita pela Equação (5.33) define um campo central de extremais, de forma que a trajetória correspondente a um dado valor de α_1 é ótima.

Introduzindo a constante k_0 ,

$$\text{sen}^2 k_0 = \cos^2 \left(\sqrt{\frac{2}{5}}(\phi_0 + \alpha_1) \right), \quad (5.38)$$

as Equações (5.22) e (5.33) podem ser convenientemente reescritas como:

$$\alpha(t_f) = \frac{1}{1 - 2\left(\frac{u}{v_0}\right)\cos k_0 + \left(\frac{u}{v_0}\right)^2}, \quad (5.39)$$

$$\alpha \text{sen}^2 k_0 = \text{sen}^2 \left(\sqrt{\frac{2}{5}}(\phi - \phi_0) + k_0 \right), \quad (5.40)$$

onde

$$u = \bar{\gamma}_f$$

e

$$v_0 = \sqrt{\frac{\mu}{a_0}},$$

sendo $\bar{\gamma}$ o valor da magnitude da aceleração média que, em virtude da Equação (5.10), é constante ao longo da manobra. A grandeza u , introduzida por Edelbaum (1964), representa a mudança em velocidade que seria produzida no espaço livre pelo mesmo sistema propulsivo no mesmo tempo com o mesmo consumo de combustível.

5.5 - Análise Numérica para Transferências entre Órbitas Coplanares Coaxiais Diretas

Características gerais sobre manobras de longa duração referentes a transferências entre órbitas coplanares e coaxiais diretas são apresentadas nas Figuras 5.1 – 5.2, nas quais são apresentados gráficos de campo de extremais e de curvas transversais (curvas correspondentes a manobras de mesmo consumo de combustível para a mesma duração de manobra e que também são denominadas de curvas de isoconsumo), construídos a partir das Equações (5.39) e (5.40) para diversos valores de k_0 e u , conforme descrito nas Tabelas 5.1 e 5.2 para diferentes valores de excentricidade da órbita inicial. Estas figuras mostram o incremento mínimo de velocidade e as trajetórias ótimas para transferir um veículo espacial de uma órbita circular para uma órbita elíptica e de órbitas elíptica. Os valores apresentados nas tabelas seguem uma ordem crescente de valores, tanto de k_0 quanto de u . Os valores apresentados para u estão adimensionalizados. Notamos que o gráfico para o campo de extremais para $e_0 = 0$ é

semi-logarítmico, em virtude dos grandes valores de semi-eixo maior obtidos para alguns valores de k_0 .

TABELA 5.1 – Valores de k_0 .

Excentricidade da orbital inicial	k_0 (graus)									
	0.0	5	15	30	45	60	90	120	150	-
0.5	5	15	30	45	60	90	120	150	-	-

TABELA 5.2 – Valores de u .

Excentricidade da orbital inicial	u/v_0					
	0.0	0.100	0.250	0.35	0.500	0.700
0.5	0.100	0.300	0.400	0.500	0.600	0.700

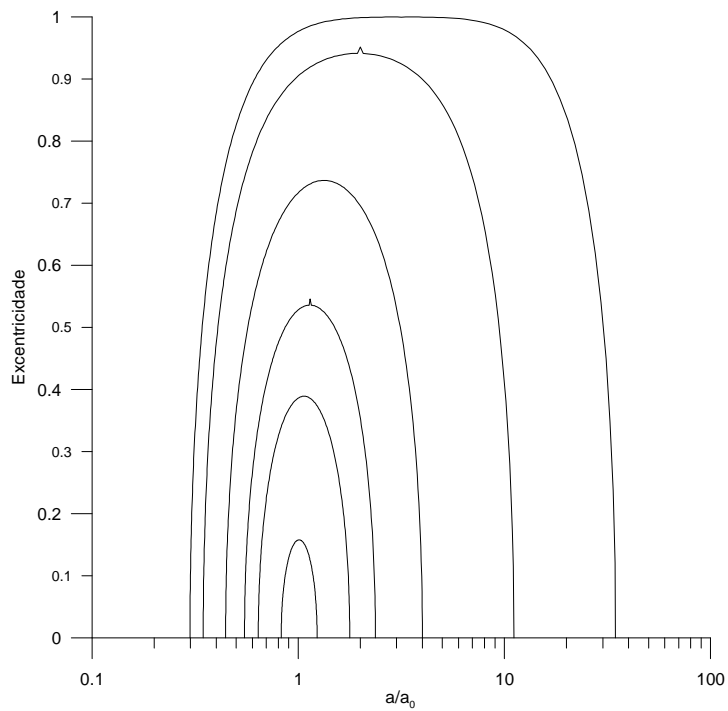
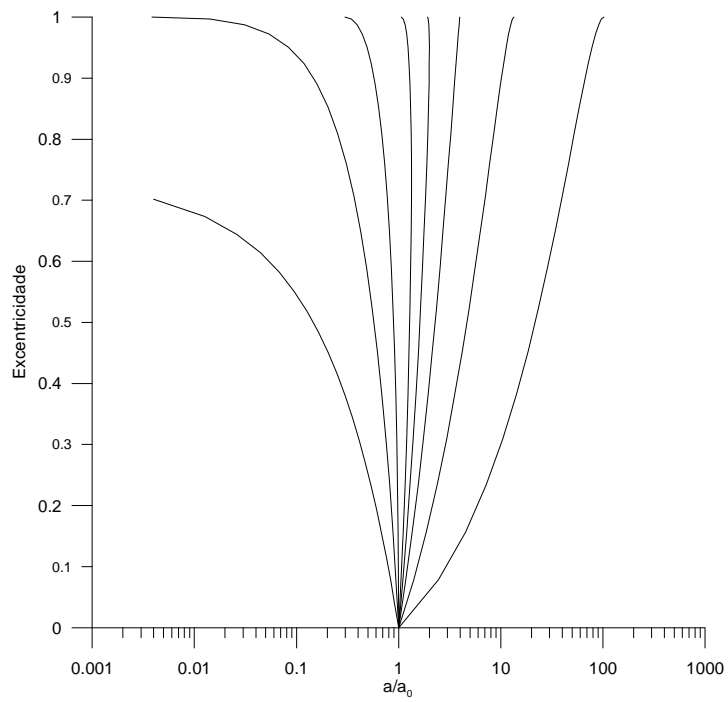


FIGURA 5.1 – Campo de extremais e curvas de isoconsumo (transversais) para $e_0 = 0$.

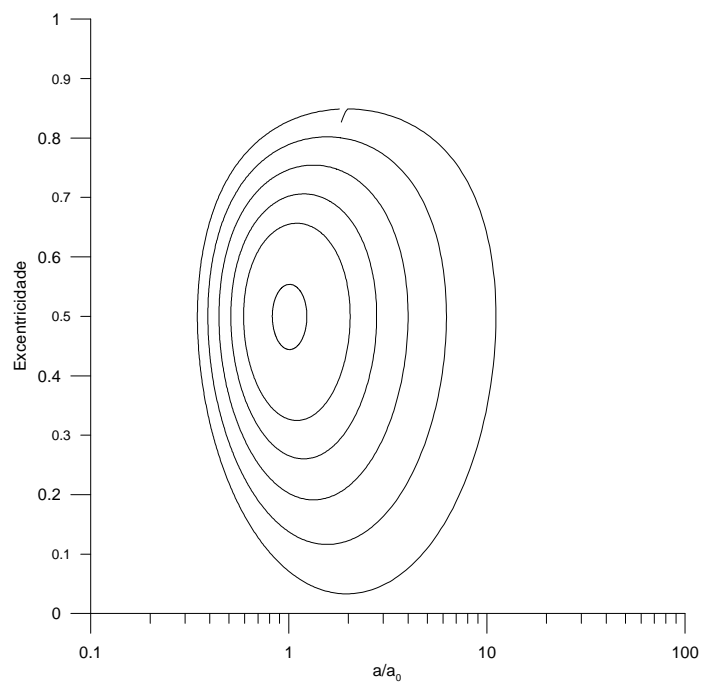
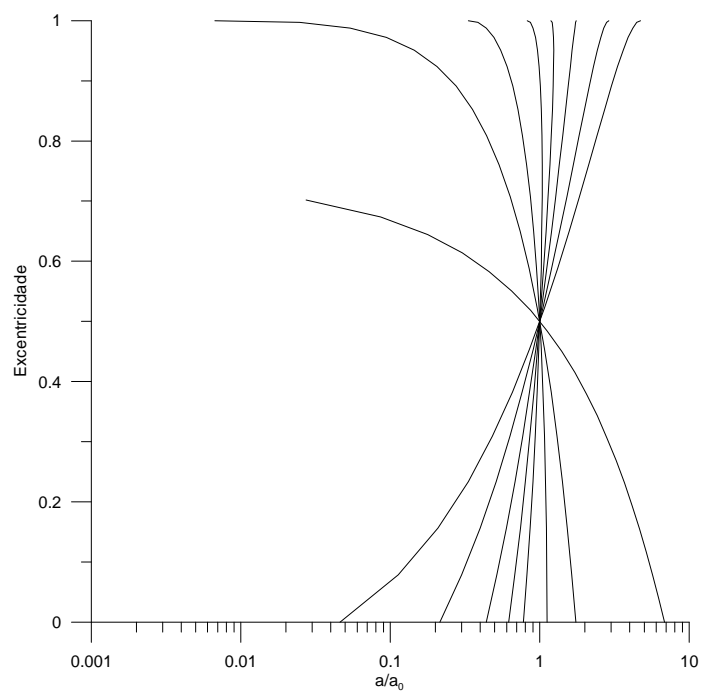


FIGURA 5.2 – Campo de extremais e curvas de isoconsumo (transversais) para $e_0 = 0,5$.

Nas Figura 5.1 e 5.2, os valores de k_0 , nas curvas extremais, crescem da direita para a esquerda, enquanto que os valores de u , nas curvas de isoconsumo, crescem das curvas interiores para as curvas exteriores.

As características gerais sobre manobras de longa duração referentes a transferências entre órbitas coplanares e coaxiais diretas incluídos os termos periódicos são apresentadas nas Figuras 5.3 – 5.5, nas quais são apresentados gráficos de campo de extremais e de curvas transversais construídos a partir das Equações (5.39) e (5.40) e das Equações (5.30) a (5.31) para diversos valores de k_0 e u , conforme descrito nas Tabelas 5.3 e 5.4 para diferentes valores de excentricidade da órbita inicial. Os valores apresentados para u estão adimensionalizados.

Nas simulações numéricas aqui realizadas, tem-se como principal objetivo mostrar a influência dos termos periódicos nas curvas extremais, Figura 5.3, e nas curvas de isoconsumo, Figuras 5.4 e 5.5.

Na Figura 5.3, são apresentados dois gráficos, no gráfico superior as curvas extremais são construídas sem os termos periódicos, enquanto que no gráfico inferior as curvas extremais foram construídas com a inclusão dos termos periódicos. Verifica-se que os valores de k_0 , apresentados na Tabela 5.3, modificam a amplitude de oscilação das curvas extremais e que esta amplitude diminui a medida que os valores de k_0 aumentam. Verifica-se que a amplitude de oscilação do primeiro extremal da direita para esquerda apresenta-se de forma acentuada, isto se deve ao fato do valor de k_0 ser pequeno.

TABELA 5.3 – Valores de k_0 .

Excentricidade da orbital inicial	k_0 (graus)									
	0.0	15	22,5	30	45	60	90	-	-	-

TABELA 5.4 – Valores de u .

Excentricidade da orbital inicial	u/v_0					
	0.0	0.010	0.030	0.040	0.050	0.060
0.5	0.010	0.030	0.040	0.050	0.060	0.070

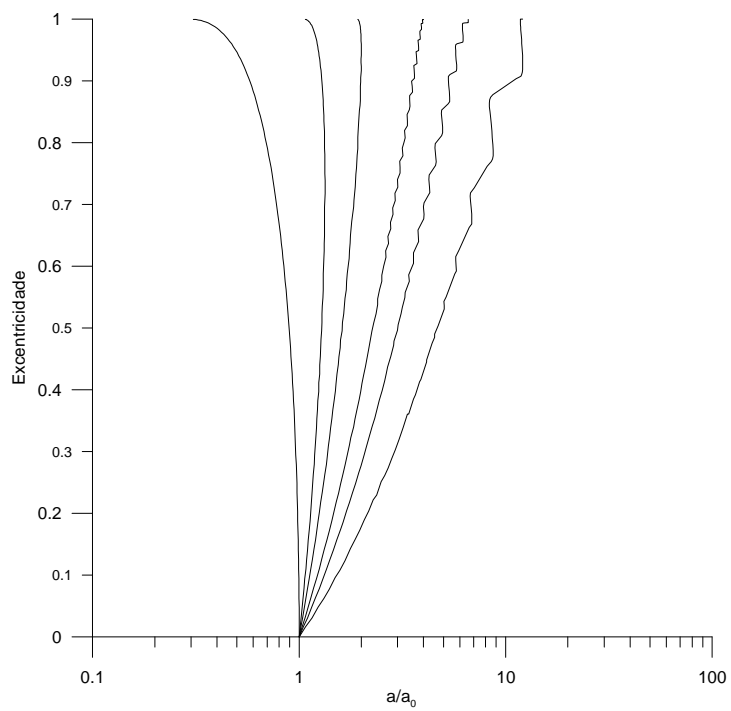
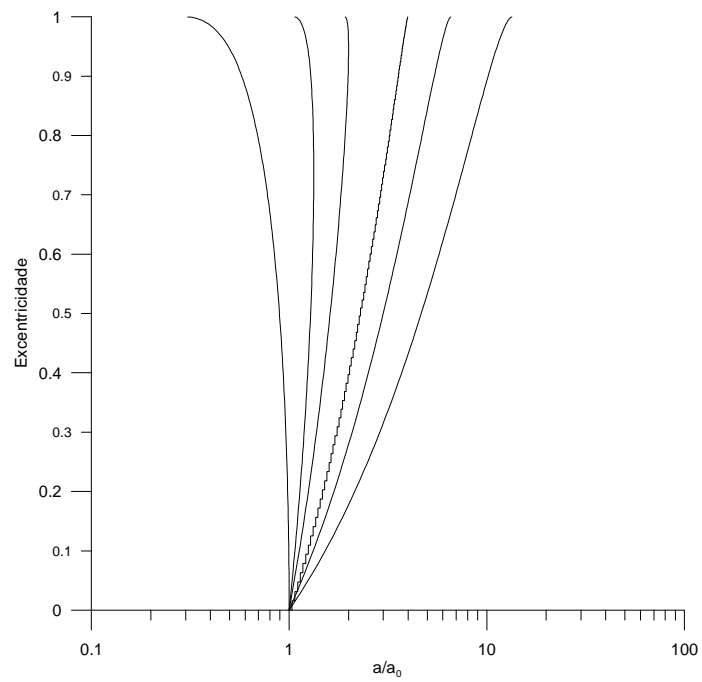


FIGURA 5.3 – Campo de extremais periódicas para $e_0 = 0$.

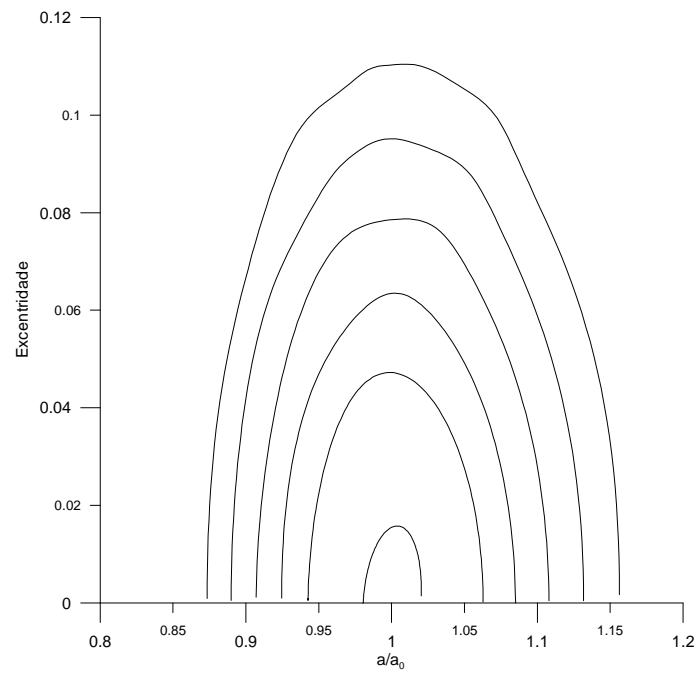
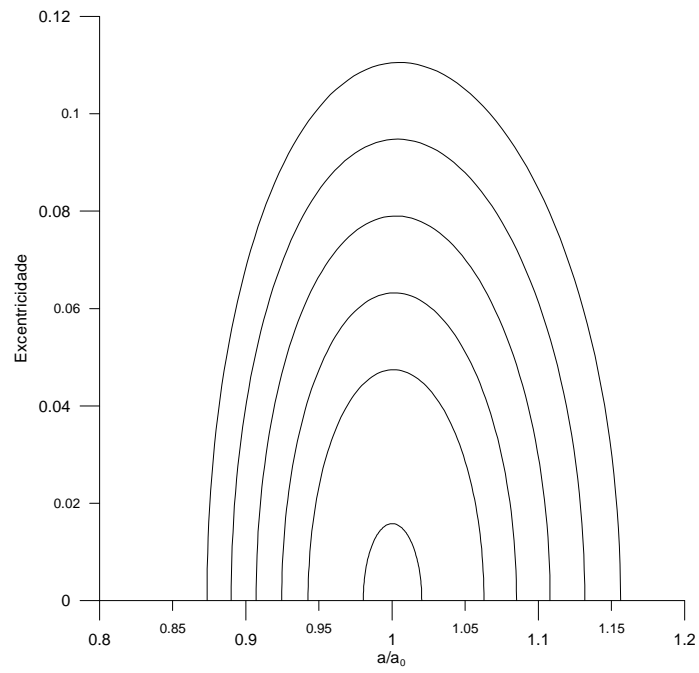


FIGURA 5.4 – Campo de extremais e curvas de isoconsumo periódicas (transversais)

para $e_0 = 0$.

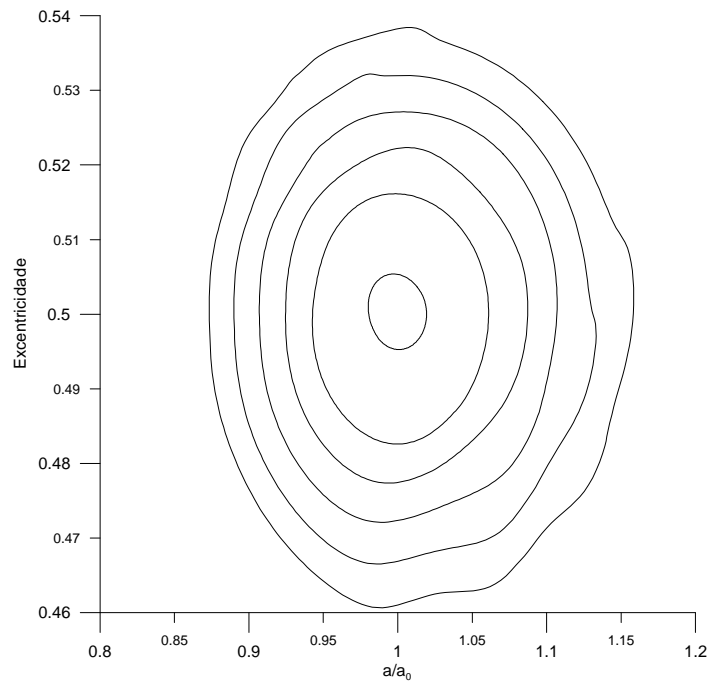
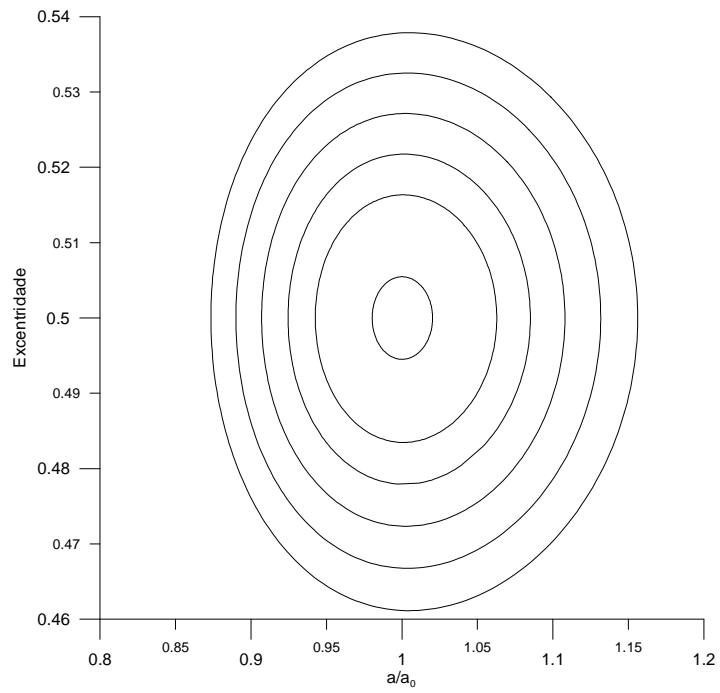


FIGURA 5.5 – Curvas de isoconsumo periódicas (transversais) para $e_0 = 0,5$.

Na Figura 5.4, como na Figura 5.3, também são apresentados dois gráficos. No gráfico superior estão representadas as curvas de isoconsumo construídas sem a inclusão dos termos periódicos, enquanto que no gráfico inferior as curvas foram construídas considerando-se a inclusão dos termos periódicos. Verifica-se que o efeito dos termos periódicos nas curvas de isoconsumo fica maior das curvas internas para as curvas mais externas, isto se deve ao aumento dos valores u , representados na Tabela 5.4. Nesta análise as curvas de isoconsumo foram construídas para excentricidade inicial zero ($e_0 = 0$). Para as curvas de isoconsumo construídas com valor de excentricidade inicial diferente de zero estão representados nas Figuras 5.5. E ressalta-se que a discussão dos resultados é semelhante à análise feita para a figura anterior.

5.6 - Conclusões

Para as manobras de longa duração, verifica-se que a magnitude da aceleração média é constante ao longo da manobra e o consumo varia linearmente com o tempo. A análise da condição de Jacobi mostra a inexistência de pontos conjugados e, conseqüentemente, a existência de um campo central de curvas extremas no plano de fase a vs e , de forma que as manobras realizadas são realmente ótimas. Para os gráficos do campo de curvas extremas e de curvas transversais, correspondentes a manobras de mesmo consumo de combustível, foram apresentadas para alguns valores de excentricidade da órbita inicial. E, foram analisados os efeitos dos termos periódicos no campo de extremas e nas curvas de isoconsumo. A análise da condição de Jacobi mostra que não existe ponto conjugado, de forma que as manobras são realmente ótimas.

Estes estudos sobre trajetórias extremas e curvas de isoconsumo são as bases para o estudo de trajetórias espaciais com consumo mínimo de combustível. Esta análise foi considerada inicialmente por Edelbaum (1964) para transferências ótimas entre órbitas circulares e elípticas. Em seus trabalhos Edelbaum considerou somente o caso em que a órbita inicial era circular. Neste trabalho, além das transferências estudadas por Edelbaum, considerou-se as transferências em que a órbita inicial era elíptica, caso até então não

encontrado na literatura. Estes dois tipos de transferências são imprescindíveis para que se consiga encontrar melhores economias de combustíveis para transportes ou viagens espaciais.

CAPÍTULO 6

TRANSFERÊNCIAS ÓTIMAS A BAIXO EMPUXO E POTÊNCIA LIMITADA ENTRE ÓRBITAS COPLANARES NÃO-COAXIAIS DIRETAS

6.1 - Introdução

Neste capítulo é apresentado um estudo completo do problema de transferências de consumo mínimo de combustível entre órbitas elípticas coplanares não-coaxiais diretas, realizadas através de sistemas propulsivos a baixo empuxo e potência limitada em um campo de força central Newtoniano, incluindo a análise de condições de suficiência correspondente à determinação de pontos conjugados – condição de Jacobi. Para as manobras de duração qualquer, relativa às transferências entre órbitas coplanares e não-coaxiais diretas, os termos periódicos são diretamente calculados a partir da função geratriz que define a transformação canônica infinitesimal construída através do método de Hori.

6.2 - Aplicação do Método de Hori para Transferências entre Órbitas Coplanares não Coaxiais Diretas.

Para o problema de transferência simples (sem “rendez-vous”) entre órbitas coplanares não coaxiais diretas em um campo de força central Newtoniano com duração fixada pode-se escolher um sistema de referência adequado (sistema que simplifica o problema em estudo, uma vez que o campo gravitacional é central) de tal forma que $I = 90^\circ$. Uma vez que não existem variações impostas sobre I e Ω , tem-se que, π_I e π_Ω são nulos. A função Hamiltoniana média H^* descrita pela Equação (4.24) para o problema em questão se reduz a

$$\begin{aligned}
H^* = & n\pi_M + \frac{1}{2n^2a^2(1-e^2)} \left\{ \frac{1}{2} (1-\cos 2\nu) [2ae\pi_a + (1-e^2)\pi_e]^2 + \right. \\
& + 2(1-e^2) \operatorname{sen} 2\nu \left[-a\pi_a\pi_\omega - \frac{(1-e^2)}{2e} \pi_e\pi_\omega \right] + \\
& + 4(1-e^2)^{\frac{3}{2}} \operatorname{sen} \nu \left(\frac{-2e}{1+e\cos\nu} + \cos\nu \right) \left[a\pi_a\pi_M + \frac{(1-e^2)}{2e} \pi_e\pi_M \right] + \\
& + \frac{(1-e^2)^2}{2e^2} (1+e\cos 2\nu) \pi_\omega^2 - \frac{2(1-e^2)^{\frac{5}{2}}}{e^2} \left(\frac{-2e}{1+e\cos\nu} + \cos\nu \right) \pi_\omega\pi_M \cos\nu + \\
& + \frac{(1-e^2)^3}{e^2} \left(\frac{-2e}{1+e\cos\nu} + \cos\nu \right)^2 \pi_M^2 + 4a^2(1-e^2)^2 \left(\frac{a}{r} \right)^2 \pi_a^2 + \\
& + 4a(1-e^2)^2 \left(\frac{a}{r} \right) (\cos E + \cos\nu) \pi_a\pi_e + (1-e^2)^2 (\cos E + \cos\nu)^2 \pi_e^2 + \\
& + \frac{4a(1-e^2)^2}{e} \left(\frac{a}{r} \right) \operatorname{sen} \nu \left(1 + \frac{1}{1+e\cos\nu} \right) \left[\pi_a\pi_\omega - (1-e^2)^{\frac{1}{2}} \pi_a\pi_M \right] + \\
& + \frac{2(1-e^2)^2}{e} (\cos E + \cos\nu) \left(1 + \frac{1}{1+e\cos\nu} \right) \operatorname{sen} \nu \left[\pi_e\pi_\omega - (1-e^2)^{\frac{1}{2}} \pi_e\pi_M \right] + \\
& + \left. \left[\frac{(1-e^2)}{e} \left(1 + \frac{1}{1+e\cos\nu} \right) \operatorname{sen} \nu \left(\pi_\omega - (1-e^2)^{\frac{1}{2}} \pi_M \right) \right]^2 \right\} \tag{6.1}
\end{aligned}$$

Seguindo o mesmo procedimento do Capítulo 5, aplica-se o método de Hori para sistemas canônicos semi-generalizados apresentado no Capítulo 3. Segundo as equações de perturbação que constituem o algoritmo do método de Hori Equações (3.23) – (3.24), tem-se que:

Ordem zero:

$$H_0^* = H_0'^* \quad (6.2)$$

onde $H_0'^*$ denota o termo de ordem zero da nova função Hamiltoniana. Este termo corresponde ao núcleo integrável da Hamiltoniana original H^* dada no Capítulo 4 na Seção 4.5.1.

Ordem um:

$$\{H_0^*, S_1\} = H_1'^* - H_1^*, \quad (6.3)$$

sendo H_1^* função Hamiltoniana máxima expressa na Equação (6.1) que descreve as trajetórias extremas para o problema de transferências entre órbitas coplanares não-coaxiais diretas em um campo de força central Newtoniano.

A fim de determinar a nova função Hamiltoniana $H_1'^*$ e a função geratriz S_1 , introduz-se o sistema canônico integrável definido por:

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{\partial H_0'^*}{\partial \pi_a} & \frac{d\pi_a}{dt} &= -\frac{\partial H_0'^*}{\partial a} \\ \frac{de}{dt} &= \frac{\partial H_0'^*}{\partial \pi_e} & \frac{d\pi_e}{dt} &= -\frac{\partial H_0'^*}{\partial e} \\ \frac{d\omega}{dt} &= \frac{\partial H_0'^*}{\partial \pi_\omega} & \frac{d\pi_\omega}{dt} &= -\frac{\partial H_0'^*}{\partial \omega} \\ \frac{dM}{dt} &= \frac{\partial H_0'^*}{\partial \pi_M} & \frac{d\pi_M}{dt} &= -\frac{\partial H_0'^*}{\partial M} \end{aligned} \quad (6.4)$$

A solução geral deste sistema canônico integrável, é dada por:

$$\begin{aligned}
a &= a_0 & \pi_a &= \frac{3}{2} \sqrt{\frac{\mu}{a_0^5}} \pi_{M_0} t + \pi_{a_0} \\
e &= e_0 & \pi_e &= \pi_{e_0} \\
\omega &= \omega_0 & \pi_\omega &= \pi_{\omega_0} \\
M &= \sqrt{\frac{\mu}{a_0^3}} t + M_0 & \pi_M &= \pi_{M_0},
\end{aligned} \tag{6.5}$$

onde $a_0, e_0, \omega_0, M_0; \pi_{a_0}, \pi_{e_0}, \pi_{\omega_0}$ e π_{M_0} são constantes com respeito a t .

Introduzindo a solução geral do sistema canônico integrável, expresso na Equação (6.5), na Equação (6.3), esta se reduz a:

$$\frac{\partial S_1}{\partial t} = H_1^* - H_1'^*, \tag{6.6}$$

Para resolver a Equação (6.6) e determinar a nova função Hamiltoniana e a função geratriz, aplica-se o princípio de média, resultando em:

$$H_1'^* = \langle H^* \rangle_t, \tag{6.7}$$

$$S_1 = \int (H^* - \langle H^* \rangle) dt. \tag{6.8}$$

onde o símbolo $\langle \rangle_t$ denota a média com respeito ao tempo t .

Seguindo o procedimento proposto por Hori, tem-se que a nova função Hamiltoniana $H_1'^*$ e a função geratriz S_1 da transformação canônica são expressas, em primeira ordem, por:

Ordem zero:

$$H_0'^* = \sqrt{\frac{\mu}{a_0^3}} \pi_{M_0}. \quad (6.9)$$

Ordem um:

$$H_1'^* = \frac{a}{2\mu} \left\{ 4a^2 \pi_a^2 + \frac{5}{2}(1-e^2) \pi_e^2 + \frac{(5-4e^2)}{2e^2} \pi_\omega^2 \right\}, \quad (6.10)$$

$$\begin{aligned} S_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a^5}{\mu^3}} & \left\{ 8e \operatorname{sen} E a^2 \pi_a^2 + 8(1-e^2) \operatorname{sen} E a \pi_a \pi_e - 4 \frac{(1-e^2)^{\frac{1}{2}}}{e} \cos E a \pi_a \pi_\omega + \right. \\ & + (1-e^2) \left[-\frac{5}{4} e \operatorname{sen} E + \frac{3}{4} \operatorname{sen} 2E - \frac{1}{12} e \operatorname{sen} 3E \right] \pi_e^2 + \\ & + \frac{(1-e^2)^{\frac{1}{2}}}{e} \left[\frac{5}{4} e \cos E + \frac{1}{4} (e^2 - 3) \cos 2E + \frac{1}{12} e \cos 3E \right] \pi_e \pi_\omega + \\ & \left. + \frac{1}{e^2} \left[\left(\frac{5}{4} - e^2 \right) e \operatorname{sen} E - \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} - e^2 \right) \operatorname{sen} 2E + \frac{1}{12} e \operatorname{sen} 3E \right] \pi_\omega^2 \right\}. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Por simplicidade de notação omitimos o apóstrofe que denota as novas variáveis resultante da transformação infinitesimal gerada por S_1 . A nova função Hamiltoniana $H_1'^*$ contém a parcela relacionada diretamente à aceleração propulsiva média.

A nova função Hamiltoniana H_1^* , é, por construção, função das constantes arbitrárias de integração da solução geral, dada na Equação (6.5), do sistema auxiliar de Hori. A função geratriz S_1 é função das constantes arbitrárias de integração e do tempo t .

6.2.1 – Solução do Novo Sistema Dinâmico

As equações de movimento correspondentes a função Hamiltoniana H_1^* , representada na Equação (6.10), que descrevem as trajetórias ótimas (extremais) são dadas por:

$$\frac{da}{dt} = \frac{4a^3}{\mu} \pi_a$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{5a(1-e^2)}{2\mu} \pi_e$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{(5-4e^2)a}{2e^2\mu} \pi_\omega$$

$$\frac{d\pi_a}{dt} = -\frac{6a^2}{\mu} \pi_a^2 - \frac{5(1-e^2)}{4\mu} \pi_e^2 - \frac{(5-4e^2)}{4e^2\mu} \pi_\omega^2$$

$$\frac{d\pi_e}{dt} = \frac{5ae}{2\mu} \pi_e^2 + \frac{5a}{2\mu} \frac{\pi_\omega^2}{e^3}$$

$$\frac{d\pi_\omega}{dt} = 0 \tag{6.10}$$

A fim de obter a solução do sistema canônico governado pela nova função Hamiltoniana H'^* , que descreve as manobras de transferências ótimas de longa duração entre órbitas coplanares e coaxiais diretas (Edelbaum, 1965; Marec e Vinh, 1980) utilizaremos duas novas transformações canônicas descritas a seguir.

Consideremos a transformação de Mathieu definida por:

$$e = \text{sen } \phi, \quad (6.11)$$

$$\pi_\phi = \sqrt{1 - e^2} \pi_e, \quad (6.12)$$

as demais variáveis permanecem inalteradas. A Hamiltoniana $H_1'^*$ é invariante sob esta transformação, sendo expressa nas novas variáveis como:

$$H_1'^* = \frac{a}{2\mu} \left\{ 4a^2 \pi_a^2 + \frac{5}{2} \pi_\phi^2 + \frac{1}{2} (5 \cot g^2 \phi + 1) \pi_\omega^2 \right\}. \quad (6.13)$$

A função Hamiltoniana $H_1'^*$ é uma integral primeira do movimento, uma vez que ela não depende explicitamente do tempo. Sendo o sistema canônico descrito por $H_1'^*$, nas novas variáveis, as variáveis de estado ficam expressas por:

$$\frac{da}{dt} = \frac{4a^3}{\mu} \pi_a, \quad (6.14)$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{5a}{2\mu} \pi_\phi, \quad (6.15)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{2} \frac{a}{\mu} (5 \cotg^2 \phi + 1) \pi_\omega, \quad (6.16)$$

e as variáveis adjuntas por:

$$\frac{d\pi_a}{dt} = -\frac{6}{\mu} a^2 \pi_a^2 - \frac{5}{4\mu} \pi_\phi^2 - \frac{(1 + 5 \cotg^2 \phi)}{4\mu} \pi_\omega, \quad (6.17)$$

$$\frac{d\phi_\phi}{dt} = \frac{5}{2} \frac{a}{\mu} \pi_\omega^2 \cotg \phi \operatorname{cosec}^2 \phi, \quad (6.18)$$

$$\frac{d\pi_\omega}{dt} = 0. \quad (6.19)$$

A fim de determinar a solução do sistema dado pelas Equações (6.14) a (6.19). Utilizaremos ϕ como a variável independente, de maneira que o novo sistema fica expresso por:

$$\frac{da}{d\phi} = \frac{8}{5} a^2 \frac{\pi_a}{\pi_\phi}, \quad (6.20)$$

$$\frac{d\omega}{d\phi} = \left(\frac{1}{5} + \cotg^2 \phi \right) \frac{\pi_\omega}{\pi_\phi}, \quad (6.21)$$

$$\frac{d\pi_a}{d\phi} = -6a \frac{\pi_a^2}{\pi_\phi} - \frac{1}{2a} \pi_\phi - \frac{(1 + 5 \cotg^2 \phi)}{10a} \frac{\pi_\omega^2}{\pi_\phi}, \quad (6.22)$$

$$\frac{d\pi_\phi}{d\phi} = \cotg \phi \operatorname{cosec}^2 \phi \frac{\pi_\omega^2}{\pi_\phi}. \quad (6.23)$$

Fazendo uma nova mudança de variável para:

$$\frac{da}{d\theta} = \frac{5a}{2\mu}. \quad (6.24)$$

Desta maneira as variáveis de estado, ficam expressas por:

$$\frac{da}{d\theta} = \frac{8}{5} a^2 \pi_a, \quad (6.25)$$

$$\frac{d\phi}{d\theta} = \pi_\phi, \quad (6.26)$$

$$\frac{d\omega}{d\theta} = \left(\frac{1}{5} + \cotg^2 \phi \right) \pi_\omega. \quad (6.27)$$

Por outro lado, tem-se que da integral primeira

$$\pi_\phi^2 + \pi_\omega^2 \operatorname{cosec}^2 \phi = \pi_{\phi_0}^2 + \pi_{\omega_0}^2 \operatorname{cosec}^2 \phi_0,$$

e,

$$\pi_\omega = \pi_{\omega_0}$$

que

$$\pi_\phi = \pi_\omega \sqrt{\operatorname{cosec}^2 \phi_0 - \operatorname{cosec}^2 \phi}, \quad (6.28)$$

onde,

$$\operatorname{cossec}^2 k_1 = \frac{\pi_{\phi_0}^2 + \pi_{\omega_0}^2 \operatorname{cossec}^2 \phi_0}{\pi_{\omega_0}^2}$$

Por Substituição da Equação (6.28) na Equação (6.26), tem-se que

$$\arccos\left(\frac{\cos \phi}{\cos k_1}\right) - \arccos\left(\frac{\cos \phi_0}{\cos k_1}\right) = \pi_{\omega} \operatorname{cossec} k_1 (\theta - \theta_0). \quad (6.29)$$

Introduzindo a variável τ :

$$\tau = \arccos\left(\frac{\cos \phi}{\cos k_1}\right). \quad (6.30)$$

onde

$$\cos \phi = \cos k_1 \cos \tau. \quad (6.31)$$

Por substituição da Equação (6.30) na Equação (6.29), tem-se que

$$\tau - \tau_0 = \pi_{\omega} \operatorname{cossec} k_1 (\theta - \theta_0). \quad (6.32)$$

Desde que a equação para $a(t)$ é conhecida (é a mesma do caso anterior) é possível obter $\theta(t)$ e conseqüentemente $z(t)$. Portanto, a expressão para o semi-eixo maior, obtida por integração do sistema de equações, dado pela Equação (6.10), é dada por:

$$a(t) = \frac{a_0}{1 + \frac{4a_0}{\mu} \left(\frac{1}{2} H_1'^* t^2 - Bt \right)}. \quad (6.33)$$

Das Equações (6.24) e (6.33), obtém-se

$$\theta(t) = \theta_0 = \int_{t_0}^t \frac{a_0}{1 + \frac{4a_0}{\mu} \left(\frac{1}{2} H_1'^* t^2 - Bt \right)} dt. \quad (6.34)$$

Das Equações (6.26), (6.27), (6.28) e (6.32), obtém-se a equação para o argumento do pericentro,

$$\omega = -\frac{4}{5}(\tau - \tau_0) \operatorname{sen} k_1 + \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} \tau \operatorname{cosec} k_1) - \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} \tau_0 \operatorname{cosec} k_1). \quad (6.35)$$

Introduzindo a constante k_2 :

$$k_2 = \frac{4}{5} \tau_0 \operatorname{sen} k_1 - \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} \tau_0 \operatorname{cosec} k_1), \quad (6.36)$$

com τ_0 obtido da Equação (6.31).

Desta maneira, a expressão para o argumento do pericentro, expresso pela Equação (6.35), pode ser reescrita como:

$$\omega = k_2 + \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} \tau \operatorname{cosec} k_1) - \frac{4}{5} \tau \operatorname{sen} k_1. \quad (6.37)$$

A solução geral do sistema governado pela Equação (6.10) é

$$a(t) = \frac{a_0}{1 + \frac{4a_0}{\mu} \left(\frac{1}{2} H_1'^* t^2 - Bt \right)}, \quad (6.38)$$

$$\begin{aligned} \omega(t) = & \arccos \left[\frac{\pi_{\omega_0} \cotg \phi}{\left(\pi_{\phi_0}^2 + \pi_{\omega_0}^2 \cotg^2 \phi_0 \right)^{\frac{1}{2}}} \right] - \arccos \left[\frac{\pi_{\omega_0} \cotg \phi_0}{\left(\pi_{\phi_0}^2 + \pi_{\omega_0}^2 \cotg^2 \phi_0 \right)^{\frac{1}{2}}} \right] - \\ & - \frac{4}{5} \frac{\pi_{\omega_0}}{\left(\pi_{\phi_0}^2 + \pi_{\omega_0}^2 \operatorname{cosec}^2 \phi_0 \right)^{\frac{1}{2}}} \left\{ \arccos \left[\left(\frac{\pi_{\phi_0}^2 + \pi_{\omega_0}^2 \operatorname{cosec}^2 \phi_0}{\left(\pi_{\phi_0}^2 + \pi_{\omega_0}^2 \cotg^2 \phi_0 \right)} \right)^{\frac{1}{2}} \cos \phi_0 \right] - \right. \\ & \left. - \arccos \left[\left(\frac{\pi_{\phi_0}^2 + \pi_{\omega_0}^2 \operatorname{cosec}^2 \phi_0}{\left(\pi_{\phi_0}^2 + \pi_{\omega_0}^2 \cotg^2 \phi_0 \right)} \right)^{\frac{1}{2}} \cos \phi \right] \right\}, \end{aligned} \quad (6.39)$$

$$\cos \phi = \left(\frac{\pi_{\phi_0}^2 + \pi_{\omega_0}^2 \cotg^2 \phi_0}{\left(\pi_{\phi_0}^2 + \pi_{\omega_0}^2 \operatorname{cosec}^2 \phi_0 \right)} \right)^{\frac{1}{2}} \cos \left\{ \left(\frac{5}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{5\pi_{\phi_0}^2 + 5\pi_{\omega_0}^2 \operatorname{cosec}^2 \phi_0}{5\pi_{\phi_0}^2 + (1 + 5 \cotg^2 \phi_0) \pi_{\omega_0}^2} \right] \times \right. \quad (6.40)$$

$$\left. \times \arccos \frac{1 - 2 \left(\frac{a_0^2}{\mu} \right) \pi_{\phi_0} t}{\left[1 - 4 \left(\frac{a_0^2}{\mu} \right) \pi_{\phi_0} t + 2 \left(\frac{a_0^2}{\mu} \right) H_1'^* t^2 \right]^{\frac{1}{2}}} + \operatorname{arctg} \frac{\pi_{\phi_0} \operatorname{tg} \phi_0}{\left(\pi_{\phi_0}^2 + \pi_{\omega_0}^2 \operatorname{cosec}^2 \phi_0 \right)^{\frac{1}{2}}} \right\}.$$

As Equações (6.38) – (6.40) representam a solução do sistema de equações canônicas relativo ao problema de transferências ótimas de longa duração realizadas por sistemas propulsivos a baixo empuxo e potência limitada entre órbitas coplanares e não-coaxiais em campo central Newtoniano.

6.3 – Trajetórias Extremais

A solução formal completa em primeira ordem requer a inclusão dos termos de curto período, obtidos da função geratriz S_1 . Portanto,

$$a(t) = a'(t) + \frac{\partial S_1}{\partial \pi_a},$$

$$e(t) = e'(t) + \frac{\partial S_1}{\partial \pi_e},$$

$$\omega(t) = \omega'(t) + \frac{\partial S_1}{\partial \pi_\omega}$$

com S_1 dada pela Equação (6.11). Explicitamente, tem-se

$$a(t) = a'(t) + \sqrt{\frac{a'^5}{\mu^3}} \left[8e'a'^2\pi'_a \sin E' + 4(1-e'^2)a'\pi'_e \sin E' - \right. \\ \left. - 4 \frac{(1-e'^2)}{e'} a'\pi'_\omega \cos E' \right]_{E'_0}^{E'}, \quad (6.41)$$

$$e(t) = e'(t) + \sqrt{\frac{a'^5}{\mu^3}} \left[4(1-e'^2)a'\pi'_a \sin E' + \right. \\ \left. + (1-e'^2) \left[-\frac{5}{4}e' \sin E' + \frac{3}{4} \sin 2E' - \frac{1}{12}e' \sin 3E' \right] \pi'_e + \right. \\ \left. + \frac{(1-e'^2)^{\frac{1}{2}}}{e'} \left[\frac{5}{4}e' \cos E' + \frac{1}{4}(e'^2-3) \cos 2E' + \frac{1}{12}e' \cos 3E' \right] \pi'_\omega \right]_{E'_0}^{E'}, \quad (6.42)$$

$$\begin{aligned}
\omega(t) = \omega'(t) + \sqrt{\frac{a'^5}{\mu^3}} & \left[-4 \frac{(1-e'^2)^{\frac{1}{2}}}{e'} a' \pi'_a \cos E' + \right. \\
& + \frac{(1-e'^2)^{\frac{1}{2}}}{e'} \left[\frac{5}{4} e' \cos E' + \frac{1}{4} (e'^2 - 3) \cos 2E' + \frac{1}{12} e' \cos 3E' \right] \pi'_e + \\
& \left. + \frac{1}{e'^2} \left[\left(\frac{5}{4} - e'^2 \right) e' \sin E' - \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} - e'^2 \right) \sin 2E' + \frac{1}{12} e' \sin 3E' \right] \pi'_\omega \right]_{E'_0}^{E'} .
\end{aligned} \tag{6.43}$$

A apóstrofe é re-introduzido para indicar as novas variáveis canônicas resultantes da transformação canônica infinitesimal obtida através do método de Hori, que são expressas como funções de tempo através das Equações (6.38) – (6.40). A anomalia excêntrica média E é calculada a partir da equação de Kepler, Equação (3.20), com a anomalia média “média” dada por:

$$M'(t) = M'_0 + \int_{t_0}^t \sqrt{\frac{\mu}{a'^3}} dt , \tag{6.44}$$

sendo M'_0 a anomalia média “média” na época.

No Apêndice C na Seção C.2, é feita uma comparação entre os resultados analíticos e numéricos.

6.4 - Análise da Condição de Suficiência para Transferências entre Órbitas

Coplanares não Coaxiais Diretas

Para complementar a análise e garantir que uma trajetória extremal obtida da família uni-paramétrica de extremais definida no plano de fase ω versus ϕ represente uma solução ótima, é necessário investigar a existência de pontos conjugados associada à condição de Jacobi (Elsgolts, 1977).

Combinando as Equações (6.35), (6.37) e (6.30) pode-se expressar ω como função de ϕ .

$$\begin{aligned} \omega = & -\frac{4}{5} \operatorname{sen} k_1 \left\{ \arccos \left(\frac{\cos \phi}{\cos k_1} \right) - \arccos \left(\frac{\cos \phi_0}{\cos k_1} \right) \right\} + \\ & + \arccos \left(\frac{\operatorname{cotg} \phi}{\operatorname{cotg} k_1} \right) - \arccos \left(\frac{\operatorname{cotg} \phi_0}{\operatorname{cotg} k_1} \right) \end{aligned} \quad (6.45)$$

A Equação (6.45) define uma família uni-paramétrica de curvas extremais no plano ω versus ϕ , cujo envelope é definido por:

$$\begin{aligned} \omega = \omega(\phi^*, k_{10}) = & -\frac{4}{5} \operatorname{sen} k_{10} \left\{ \arccos \left(\frac{\cos \phi}{\cos k_{10}} \right) - \arccos \left(\frac{\cos \phi_0}{\cos k_{10}} \right) \right\} + \\ & + \arccos \left(\frac{\operatorname{cotg} \phi}{\operatorname{cotg} k_{10}} \right) - \arccos \left(\frac{\operatorname{cotg} \phi_0}{\operatorname{cotg} k_{10}} \right) \end{aligned}$$

A existência de pontos conjugados é investigada através da condição de Jacobi, que é obtida diferenciando-se a solução (6.45) em relação a k_1 e igualando o resultado a zero. Portanto, tem-se,

$$\frac{\partial \omega}{\partial k_1} = 0. \quad (6.46)$$

A Equação (6.46) define a condição de ponto conjugado de forma que ponto (ϕ^*, k_{10}) do plano de fase ω versus ϕ sobre o extremal definido para $\omega = \omega(\phi^*, k_{10})$ é definido pela equação

$$\begin{aligned}
& -\frac{4}{5} \cos k_{10} \left\{ \arccos\left(\frac{\cos \phi}{\cos k_{10}}\right) - \arccos\left(\frac{\cos \phi_0}{\cos k_{10}}\right) \right\} - \frac{4}{5} \sin k_{10} \left\{ -\frac{\cos \phi \sin k_{10}}{\cos^2 \phi \sqrt{1 - \frac{\cos^2 \phi}{\cos^2 k_{10}}}} + \right. \\
& \left. + \frac{\cos \phi_0 \sin k_{10}}{\cos^2 k_{10} \sqrt{1 - \frac{\cos^2 \phi_0}{\cos^2 k_{10}}}} \right\} - \frac{1 + \operatorname{tg}^2 k_{10}}{\operatorname{tg} \phi \sqrt{\frac{1 - \operatorname{tg}^2 k_{10}}{\operatorname{tg}^2 \phi}}} + \frac{1 + \operatorname{tg}^2 k_{10}}{\operatorname{tg} \phi_0 \sqrt{\frac{1 - \operatorname{tg}^2 k_{10}}{\operatorname{tg}^2 \phi_0}}} = 0
\end{aligned} \tag{6.47}$$

Simplificando, e introduzindo τ na Equação (6.47), tem-se que o ponto conjugado ao ponto (ϕ^*, k_{10}) dado por:

$$\left(1 - \frac{4}{5} \sin^2 k_1\right) \sin(\tau - \tau_0) - \frac{4}{5} \cos^2 k_1 (\tau - \tau_0) \sin \tau \sin \tau_0 = 0. \tag{6.48}$$

O primeiro ponto em que a Equação (6.48) se anula após o ponto inicial de um extremal é chamado de ponto conjugado. Cada extremal do presente problema tem ponto conjugado correspondente a raiz da Equação (6.48). Portanto, Equação (6.48) define o lugar geométrico dos pontos conjugados no plano fase ω versus ϕ .

Para determinar o consumo de combustível necessário para realizar uma manobra de longa duração, notamos a partir das Equações (4.3), (4.8), (4.10) e (6.10), que a integral primeira H_1^* corresponde à taxa de variação temporal da variável de consumo J ; conseqüentemente,

$$J = H t_f = \frac{1}{2} \bar{\gamma}^2 t_f. \tag{6.49}$$

6.5 – Análise Numérica para Transferências entre Órbitas Coplanares Não-Coaxiais Diretas.

Características gerais sobre manobras de longa duração referentes a transferências entre órbitas coplanares e não-coaxiais diretas são apresentadas nas Figura 6.1, na qual é apresentado o gráfico do campo de extremais e os pontos conjugados, construído a partir das Equações (6.45) e (6.48).

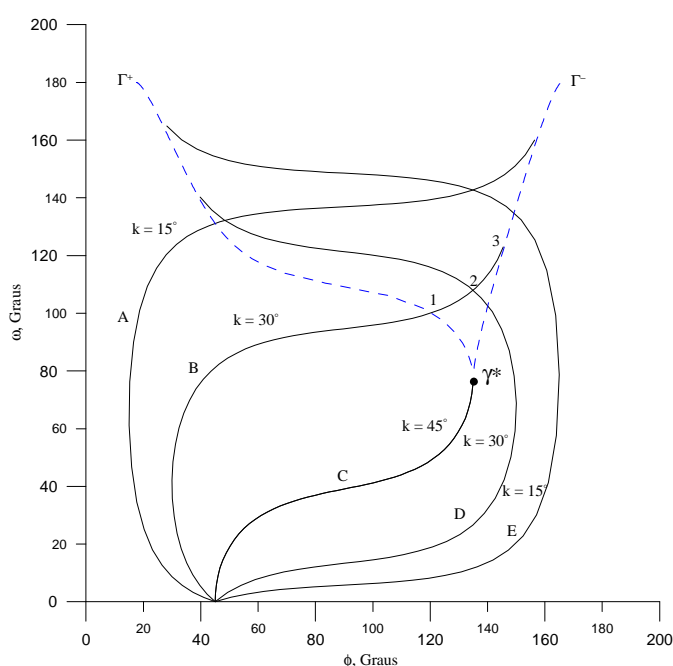


FIGURA 6.1 - Estrutura de um extremal para $\phi_0 = 45^\circ$.

As características dos extremais e dos pontos conjugados podem ser vista na Figura 6.1. Esta figura mostra o argumento do pericentro em função de ϕ e apresenta cinco extremais **A**, **B**, **C**, **D** e **E**. A linha pontilhada representa o envelope de extremais, obtida a partir da Equação (6.48). As cinco extremais partem do ponto $\phi_0 = 45^\circ$ e $\omega = 0^\circ$ correspondendo respectivamente aos valores $k = 15^\circ$ e $k = 30^\circ$ para Γ^- , $k = 45^\circ$ para Γ^+ e Γ^- e para $k = 15^\circ$ e $k = 30^\circ$ para Γ^+ . Os pontos conjugados, tal como o ponto 3 pela trajetória **B**, são os pontos de contato das trajetórias com o seu envelope de

extremais Γ^+ ou Γ^- . A trajetória **C**, ponto conjugado γ^* , corresponde ao valor $k^* = \phi_0 = 45^\circ$.

O extremal **C** é um extremal crítico que divide o espaço de fase em dois ou mais conjuntos de extremais. Para o extremal **C**, os pontos 1, 2 e 3 coincidem no ponto γ^* , e o ponto conjugado ocorre, quando o extremal **C** torna-se em um mínimo absoluto e um mínimo local.

Para as Figuras 6.2 e 6.3, com valores iniciais de $\phi_0 = 30^\circ$ e $\phi_0 = 60^\circ$ respectivamente, mostram a mesma estrutura de extremais apresentados na Figura 6.1 considerando diferentes valores de k .

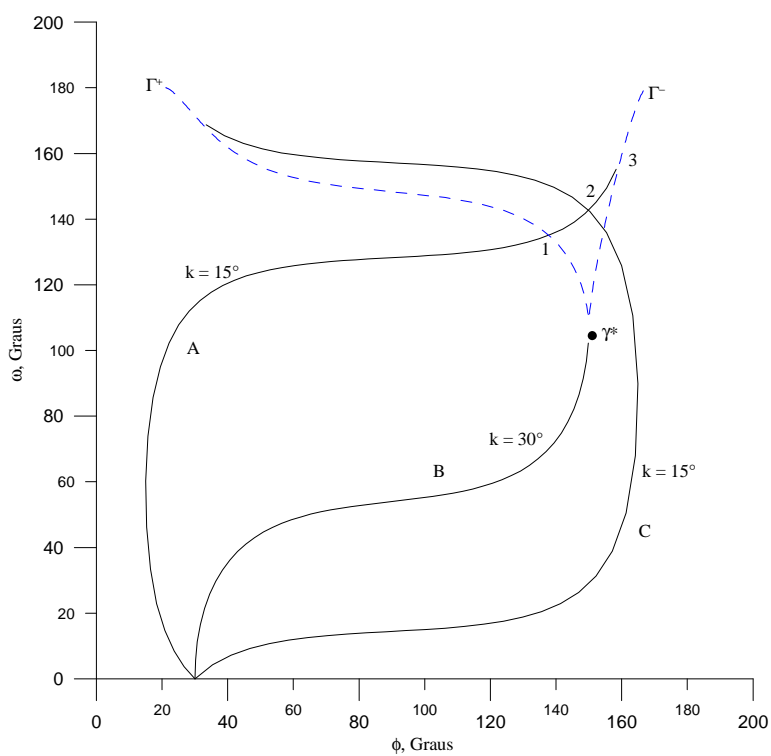


FIGURA 6.2- Estrutura de um extremal para $\phi_0 = 30^\circ$.

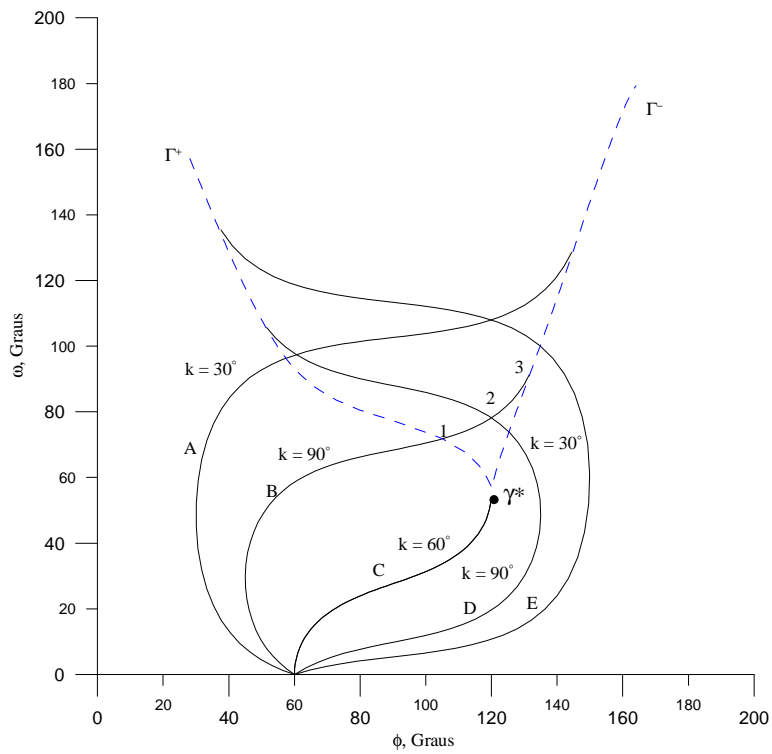


FIGURA 6.3 Estrutura de um extremal para $\phi_0 = 60^\circ$.

6.6 - Conclusões

Neste capítulo tem sido desenvolvida uma teoria completa baseada em transformações canônicas para o problema de transferências ótimas entre órbitas elípticas coplanares não-coaxiais realizadas por sistemas propulsivos baixo empuxo e potência limitada em campo central Newtoniano. Para as manobras de longa duração, verifica-se que a magnitude da aceleração média é constante. A análise da condição de Jacobi mostra a existência de pontos conjugados. Uma solução formal, incluindo os termos de primeira ordem, é facilmente obtida através da função geratriz construída através do método de Hori.

CAPÍTULO 7

TRANSFERÊNCIAS ÓTIMAS A BAIXO EMPUXO E POTÊNCIA LIMITADA ENTRE ÓRBITAS NÃO COPLANARES COAXIAIS DIRETAS

7.1 - Introdução

Neste capítulo é apresentado um estudo do problema de transferências de consumo mínimo de combustível entre órbitas elípticas não-coplanares coaxiais diretas, realizadas através de sistemas propulsivos a baixo empuxo e potência limitada em um campo de força central Newtoniano, incluindo a análise de condições de suficiência correspondente à determinação de pontos conjugados – condição de Jacobi. Para as manobras de duração qualquer, relativa às transferências entre órbitas não-coplanares coaxiais diretas, os termos periódicos são diretamente calculados a partir da função geratriz que define a transformação canônica infinitesimal construída através do método de Hori.

7.2- Aplicação do Método de Hori para Transferências entre Órbitas não Coplanares Coaxiais Diretas.

Para o problema de transferência simples (sem “rendez-vous”) entre órbitas não-coplanares coaxiais diretas em um campo de força central Newtoniano com duração fixada pode-se escolher um sistema de referência adequado (sistema que simplifica o problema em estudo, uma vez que o campo gravitacional é central) de tal forma que $I = 90^\circ$ e $\omega = 0^\circ$. Uma vez que não existem variações impostas sobre e e I , tem-se que, π_I e π_ω são nulos e faz-se uma rotação em torno do eixo OZ , como mostra a Figura 7.1, onde a linha dos apsis coincide com a linha dos nodos. Neste caso, a função Hamiltoniana H^* descrita pela Equação (4.24) para o problema em questão se reduz a

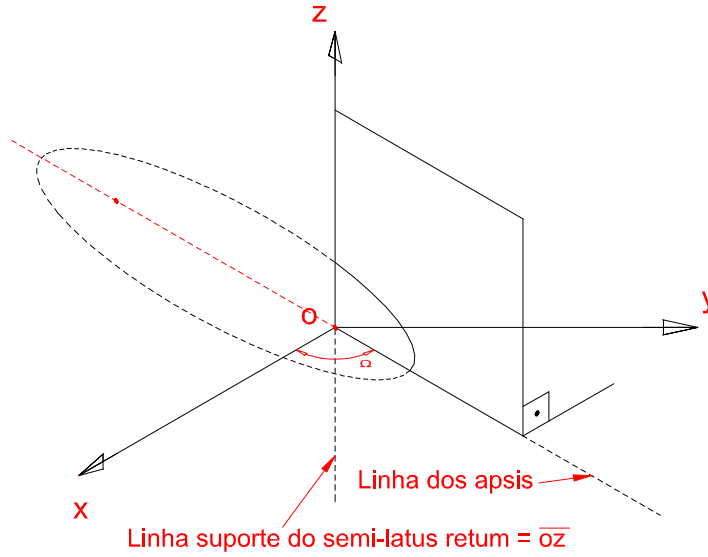


FIGURA 7.1 – Rotação em torno da linha dos apsis.

$$\begin{aligned}
 H_{\gamma}^* = n\pi_M + \frac{1}{2n^2a^2(1-e^2)} & \left\{ \frac{1}{2}(1-e\cos 2\nu)[2ae\pi_a + (1-e^2)\pi_e]^2 + \right. \\
 + 4a^2(1-e^2)^2 \left(\frac{a}{r}\right)^2 \pi_a^2 & + 4a^2(1-e^2)^2 \left(\frac{a}{r}\right) (\cos E + \cos \nu)\pi_a\pi_e + \\
 + (1-e^2)^2 (\cos E + \cos \nu)^2 \pi_e^2 & + \left. \frac{1}{2} \left(\frac{r}{a}\right)^2 [1 + \cos 2(\omega + \nu)]\pi_{\Omega}^2 \right\} \quad (7.1)
 \end{aligned}$$

Seguindo o mesmo procedimento adotado no capítulo anterior, teremos que a nova função Hamiltoniana H_1^* e a função geratriz S_1 da transformação canônica são expressas, em primeira ordem, por:

$$H_1^* = \frac{a}{2\mu} \left\{ 4a^2\pi_a^2 + \frac{5}{2}(1-e^2)\pi_e^2 + \frac{(1+4e^2)}{2(1-e^2)}\pi_{\Omega}^2 \right\} \quad (7.2)$$

$$\begin{aligned}
S' = & \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a^5}{\mu^3}} \left\{ 8e \operatorname{sen} Ea^2 \pi_a^2 + 8(1-e^2) \operatorname{sen} Ea \pi_a \pi_e + \right. \\
& + (1-e^2) \left[-\frac{5}{2} e \operatorname{sen} E + \frac{3}{4} \operatorname{sen} 2E - \frac{1}{12} e \operatorname{sen} 3E \right] \pi_e^2 + \\
& \left. + \frac{1}{(1-e^2)} \left[-\left(\frac{9}{4} e - e^3\right) \operatorname{sen} E + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + e^2\right) \operatorname{sen} 2E - \frac{1}{12} e \operatorname{sen} 3E \right] \pi_\Omega^2 \right\}
\end{aligned} \tag{7.3}$$

A fim de obter a solução do sistema canônico governado pela nova função Hamiltoniana H_1^* , que descreve as manobras de transferências ótimas de longa duração entre órbitas não-coplanares e coaxiais diretas (Edelbaum, 1965; Marec e Vinh, 1980) utilizaremos duas novas transformações canônicas descritas a seguir.

Consideremos a transformação de Mathieu definida por:

$$e = \operatorname{sen} \phi \tag{7.4}$$

$$\pi_\phi = \sqrt{1-e^2} \pi_e \tag{7.5}$$

as demais variáveis permanecem inalteradas. A Hamiltoniana H_1^* é invariante sob esta transformação, sendo expressa nas novas variáveis como:

$$H_1^* = \frac{a}{2\mu} \left\{ 4a^2 \pi_a^2 + \frac{5}{2} \pi_\phi^2 + \frac{5}{2} \left(\frac{1}{5} + \operatorname{tg}^2 \phi \right) \pi_\Omega^2 \right\} \tag{7.6}$$

O sistema dinâmico descrito por H_1^* , nas novas variáveis, possui três integrais primeiras:

$$H_1^* = \frac{a}{2\mu} \left\{ 4a^2 \pi_a^2 + \frac{5}{2} \pi_\phi^2 + \frac{5}{2} \left(\frac{1}{5} + \text{tg}^2 \phi \right) \pi_\Omega^2 \right\} \quad (7.7)$$

$$\pi_e^2 = \pi_{e_0}^2 + (\text{tg} \phi_0 - \text{tg} \phi) \pi_\Omega^2 \quad (7.8)$$

$$\pi_\Omega^2 = \pi_{\Omega_0}^2 \quad (7.9)$$

A solução geral do sistema governado pela Equação (7.6) é

$$a(t) = \frac{a_0}{1 + \frac{4a_0}{\mu} \left(\frac{1}{2} H_1^* t^2 - Bt \right)}, \quad (7.10)$$

$$\text{sen} \phi = \text{sen} k_1 \cos \tau \quad (7.11)$$

$$\Omega = -\frac{4}{5} (\tau - \tau_0) \cos k_1 + \arccos \left(\frac{\text{tg} \phi}{\text{tg} k_1} \right) + \arccos \left(\frac{\text{tg} \phi_0}{\text{tg} k_1} \right), \quad (7.12)$$

$$e = \text{sen} \phi \quad (7.13)$$

onde

$$\tau_0 = \arccos \left(\frac{\cos \phi_0}{\cos k_1} \right).$$

As condições iniciais têm sido tomadas tais que $a(0) = a_0$, $e_0 = \text{sen} \phi_0$ e $\Omega(0) = \Omega_0$.

As Equações (7.10) – (7.13) representam a solução do sistema de equações canônicas relativo ao problema de transferências ótimas de longa duração realizadas por sistemas propulsivos a baixo empuxo e potência limitada entre órbitas não-coplanares coaxiais em campo central Newtoniano.

7.3 – Trajetórias Extremais

Para as manobras de duração qualquer, os termos periódicos devem ser incluídos. Segue do método de Hori que uma solução formal de primeira ordem para o problema de transferência entre órbitas não-coplanares coaxiais diretas de duração qualquer é dada por:

$$a(t) = a'(t) + \sqrt{\frac{a'^5}{\mu^3}} \left[8e' \sin E' a'^2 \pi'_a + 4(1 - e'^2) a' \pi'_e \sin E' \right]_{E'_0}^{E'} \quad (7.14)$$

$$e(t) = e'(t) + \sqrt{\frac{a'^5}{\mu^3}} \left[4(1 - e'^2) a' \pi'_a \sin E' + \right. \\ \left. + (1 - e'^2) \left[-\frac{5}{4} e' \sin E' + \frac{3}{4} \sin 2E' - \frac{1}{12} e' \sin 3E' \right] \pi'_e \right]_{E'_0}^{E'} \quad (7.15)$$

$$\Omega(t) = \Omega'(t) + \sqrt{\frac{a'^5}{\mu^3}} \frac{1}{(1 - e'^2)} \left[-\left(\frac{9}{4} e' - e'^3 \right) \sin E' + \right. \\ \left. \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + e'^2 \right) \sin 2E' - \frac{1}{12} e' \sin 3E' \right]_{E'_0}^{E'} \pi'_\Omega \quad (7.15)$$

A apóstrofe é re-introduzido para indicar as novas variáveis canônicas resultantes da transformação canônica infinitesimal obtida através do método de Hori, que são expressas como funções de tempo através das Equações (7.10) – (7.13). A anomalia

excêntrica média E é calculada a partir da equação de Kepler, Equação (3.20), com a anomalia média “média” dada por:

$$M'(t) = M'_0 + \int_{t_0}^t \sqrt{\frac{\mu}{a'^3}} dt \quad (7.16)$$

sendo M'_0 a anomalia média “média” na época.

No Apêndice D na Seção D.2, é feita uma comparação entre os resultados analíticos e numéricos.

7.4 - Análise da Condição de Suficiência para Transferências entre Órbitas não Coplanares Coaxiais Diretas

Para complementar a análise e garantir que uma trajetória extremal obtida da família uni-paramétrica de extremais definida no plano de fase Ω versus ϕ represente uma solução ótima, é necessário investigar a existência de pontos conjugados associada à condição de Jacobi (Elsgolts, 1977). Repetindo o procedimento descrito no Capítulo anterior, tem-se que:

$$\Omega = -\frac{4}{5}(\tau - \tau_0)\cos k_1 + \arccos\left(\frac{tg\phi}{tgk_1}\right) + \arccos\left(\frac{tg\phi_0}{tgk_1}\right) \quad (7.17)$$

e,

$$\frac{\partial \Omega}{\partial k_1} = 0. \quad (7.18)$$

de forma que o ponto conjugado ao ponto (ϕ^*, k_{10}) do plano de fase sobre o extremal definido para $\Omega = \Omega(\phi^*, k_{10})$ é definido pela equação

$$\Omega = -\frac{4}{5}(\tau - \tau_0)\cos k_{10} + \arccos\left(\frac{\operatorname{tg}\phi}{\operatorname{tg}k_{10}}\right) + \arccos\left(\frac{\operatorname{tg}\phi_0}{\operatorname{tg}k_{10}}\right) \quad (7.19)$$

e,

$$\left.\frac{\partial\Omega}{\partial k_1}\right|_{k_{10}} = 0 \quad (7.20)$$

Portanto, resolvendo-se as Equações (7.19) e introduzindo τ tem-se que o ponto conjugado ao ponto $\Omega = \Omega(\phi^*, k_{10})$ é dado por

$$\left(1 - \frac{4}{5}\cos^2 k_1\right)\cos(\tau - \tau_0) - \frac{4}{5}\operatorname{sen}^2 k_1(\tau - \tau_0)\cos\tau\cos\tau_0 = 0 \quad (7.21)$$

A Equação (7.21) define o lugar geométrico dos pontos conjugados, ou seja, o envelope de extremais no plano fase Ω versus ϕ .

A fim de calcular o consumo de combustível necessário para realizar uma manobra de longa duração, notamos a partir das Equações (4.3), (4.10), (7.2) e (7.6), que a integral primeira H_1^* corresponde à taxa de variação temporal da variável de consumo J ; conseqüentemente,

$$J = Ht_f = \frac{1}{2}\bar{\gamma}^2 t_f \quad (7.22)$$

7.5 - Conclusões

Neste capítulo foi feita a aplicação do método de Hori baseada em transformações canônicas para o problema de transferências ótimas entre órbitas elípticas não coplanares coaxiais realizadas por sistemas propulsivo a baixo empuxo e potência

limitada em campo central Newtoniano. Para as manobras de longa duração, verifica-se que a magnitude da aceleração média é constante. Uma solução formal, incluindo os termos de primeira ordem, é facilmente obtida através da função geratriz construída através do método de Hori.

CAPÍTULO 8

CONCLUSÃO

8.1 - Introdução

Nesta tese tem-se estudado o problema de transferências ótimas a baixo empuxo e potência limitada entre órbitas elípticas quaisquer particularizando os seguintes casos: 1) Análise das transferências entre órbitas coplanares coaxiais diretas, 2) Transferências entre órbitas coplanares não-coaxiais diretas e 3) Transferências entre órbitas não-coplanares coaxiais diretas, estudadas nos capítulos 5, 6 e 7, onde utilizou-se o método de Hori para a obtenção da solução em primeira para o problema de transferências.

8.2 – Análise do Problema de Transferência Estudado

O problema de transferências entre órbitas elípticas realizadas através de sistemas propulsivos a baixo empuxo e potência limitada em um campo de força central Newtoniano tem sido analisado, utilizando-se a abordagem canônica sem-generalizada desenvolvida por Da Silva Fernandes. Para o problema de transferências de longa duração entre órbitas quaisquer, são obtidas soluções analíticas completas para o problema de transferências entre órbitas coplanares coaxiais diretas, para o problema de transferências entre órbitas coplanares não-coaxiais diretas e para o problema de transferências entre órbitas não-coplanares coaxiais diretas. São incluídas as análises de condições de suficiência correspondentes a determinação de pontos conjugados – condição de Jacobi. Os termos periódicos são diretamente calculados a partir da função geratriz que define a transformação canônica infinitesimal construída através do método de Hori. O que difere este trabalho dos trabalhos de Edelbaum e do Marec, basicamente é a determinação da função geratriz pelo método de Hori na determinação dos termos periódicos envolvidos na transferência orbital acima citadas.

As principais contribuições deste trabalho foram:

- a) Desenvolvimento analítico em primeira ordem para o problema de transferências entre órbitas coplanares coaxiais diretas,
- b) Desenvolvimento analítico em primeira ordem para o problema de transferências entre órbitas coplanares não-coaxiais diretas,
- c) Desenvolvimento analítico em primeira ordem para o problema de transferências entre órbitas não-coplanares coaxiais diretas,
- d) Construção das trajetórias extremas e as curvas de isoconsumo para as transferências entre órbitas coplanares coaxiais diretas;
- e) Estudo numérico complementar para comparar com os resultados analíticos encontrados para as transferências aqui estudadas;
- f) Como contribuição mais importante neste trabalho, foi aplicação da teoria de transformações canônicas associadas aos sistemas canônicos semi-generalizados e a teoria de integração do método de Hori, desenvolvida por Da Silva Fernandes, para a obtenção da solução analítica completa em primeira ordem de transferências espaciais.

8.3 – Proposta Para Trabalhos Futuros

A seqüência imediata deste trabalho é a construção das superfícies de isoconsumo para as transferências entre órbitas coplanares não-coaxiais diretas e transferências entre órbitas não-coplanares coaxiais diretas, incluindo os termos periódicos.

Encontrar as equações para as transferências entre órbitas coplanares coaxiais diretas, transferências entre órbitas coplanares não coaxiais diretas e transferências entre órbitas não-coplanares coaxiais diretas em elementos orbitais não-singulares, Construindo as trajetórias extremas e as curvas de isoconsumo nesse novo conjunto de elementos, comparando os resultados obtidos nos elementos orbitais clássicos.

Encontrar a solução completa para o problema de transferências ótimas a baixo empuxo e potência limitada entre órbitas elípticas quaisquer.

Enfim, ainda existem muitos fatores a serem estudados nesse problema. Os resultados analíticos obtidos neste trabalho servem como base para um estudo numérico mais aprofundado.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Bell, D. J. Optimal space trajectories - a review published work. **The aeronautical journal of the royal aeronautical society**, v. 72, n. 686, p. 141, 1968.
- Betts, J. T. Survey of numerical methods for trajectory optimization. **Journal of guidance, control, and dynamics**, v. 21, n. 2, p. 193-207, 1998.
- Bliss, G. A. **Lectures on the calculus of variations**. Chicago: University of Chicago Press, 1946.
- Breakwell, J. V. The optimization of trajectories. **SIAM journal**, v. 7, n. 2, p. 215-247, 1959.
- Carvalho F. C. ; Da Silva Fernandes, S. Transferências ótimas a baixo empuxo e potência limitada. In: PRIMEIRA ESCOLA BRASILEIRA DE APLICAÇÕES EM DINÂMICA E CONTROLE, 2001, São Carlos. **Anais...** São Carlos: EESC/USP, 2001. p. 107-113.
- CARVALHO, Francisco das Chagas. **Transferências ótimas a baixo empuxo e potência limitada entre órbitas elípticas**. São José dos Campos: CTA/ITA, 1999. Único. 166 p. (CTA/ITA-IEA/TM-001/99).
- Da Silva Fernandes, S. Earth oblateness effect on the optimal impulsive transfer between close orbits. Part II: Singular solutions. **Acta astronautica**, v. 19, n. 5, p. 393-399, 1989.
- Da Silva Fernandes, S. Generalized canonical systems I. General properties. **Acta astronautica**, v. 32, n. 5, p. 331 - 338, 1994.
- Da Silva Fernandes, S. Generalized canonical systems II. Derivation of Lagrange's and Gauss's equations. **Acta astronautica**, v. 32, n. 5, p. 339 - 345, 1994a.

Da Silva Fernandes, S. Generalized canonical systems III. Space dynamics applications: Solution of the coast-arc problem. **Acta astronautica**, v. 32, n. 5, p. 347 - 354, 1994b.

Da Silva Fernandes, S. Optimal low-thrust limited power transfers between neighbouring elliptic non-equatorial in a non-central gravity field. **Acta astronautica**, v. 35, n. 12, p. 763 - 770, 1995.

Da Silva Fernandes, S. Optimal low-thrust transfer between neighbouring quasi-circular orbits around an oblate planet. **Acta astronautica**, v. 19, n. 12, p. 933 - 938, 1989.

FERNANDES, Sandro Silva. **Transferências espaciais ótimas entre órbitas próximas em campo gravitacional não-central**. São José dos Campos: CTA/ITA, 1992. Único. 483 p.

Da Silva Fernandes, S.; Moraes R. V. Earth oblateness effect on the optimal impulsive transfer between close orbits. Part I: Nonsingular solutions. **Acta astronautica**, v. 19, n. 4, p. 281-285, 1989.

Da Silva Fernandes, S.; Sessin, W. Optimal low-thrust power transfer between neighbouring quasi-circular orbits of small inclinations around an oblate planet. **Acta astronautica**, v. 19, n. 5, p. 401-409, 1989.

Da Silva Fernandes, S.; Sessin, W. The generalized canonical form of Hori's method for non-canonical systems. **Celestial mechanics and dynamical astronomy**, v. 46, p. 49 – 57, 1989.

Da Silva Fernandes, S. Notes on Hori method for canonical systems. **Celestial mechanics and dynamical astronomy**, v.85, n. 1 p. 67-77, 2003.

Da Silva Fernandes, S. Generalized canonical system applications to optimal trajectory analysis. **Journal of guidance, control and dynamics**, v. 22, n. 6, p. 918-921, 1999.

Da Silva Fernandes, S. Lagrangian multipliers for coast-arcs of optimum space trajectories. **Journal of the brazilian society of mechanical sciences**, v. 23, n. 2, p. 123-138, 2001.

- Da Silva Fernandes, S. A note on the solution of the coast-arc problem. **Acta astronautica**, v. 45, n. 1, p. 53-57, 1999.
- Eckel, K. G. Optimal impulsive transfer with time constraint. **Astronautica acta**, v. 9, n. 3, p.139-146, 1982.
- Eckel, K. G.; Vinh, N. X. Optimal switching conditions for minimum fuel fixed time transfer between non coplanar elliptical orbits. **Astronautica acta**, v. 11, n. 10-11, p. 621-631, 1984.
- Edelbaum, T. N. An asymptotic solution for optimum power limited orbit transfer. **AIAA journal**, v. 4, n. 8, p. 1491 - 1494, 1966.
- Edelbaum, T. N. How many impulses?. **Astronautics e aeronautics**, v. 5, n. 11, p. 64-69, 1967.
- Edelbaum, T. N. Optimal low-thrust rendezvous and station keeping. **AIAA journal**, v. 2, n. 7, p. 1196-1201, 1964.
- Edelbaum, T. N. Optimum low-thrust transfer between circular and elliptic orbits. In: NATIONAL MEETING ON APPLIED MECHANICS, 4., 1964, New York. **Proceedings...** New York: American society of mechanical engineers, 1964, p. 137 - 141.
- Edelbaum, T. N. Optimum power-limited orbit transfer in strong gravity field. **AIAA journal**, v. 3, n. 5, p. 921 - 925, 1965.
- Edelbaum, T. N. Propulsion requirements for controllable satellites. **ARS journal**, v. 32, n. 8, p. 1079-1089, 1961.
- Edelbaum, T. N. The use of high and low-thrust propulsion in combination for space missions. **The journal of the astronautical sciences**, v. 9, n. 2, p. 58, 1962.
- Edelbaum, T. N. An asymptotic solution for optimum power-limited orbit transfer. **AIAA journal**, v. 4, n. 8, p. 1491-1494, 1966.

- Elsgolts, L. **Differential equations and the calculus of variations**. Moscow: Mir Publishers, 1977, 440 p.
- Gefroy, S.; Epenoy, R. Optimal low-thrust transfers with constraints-generalization of averaging techniques. **Acta astronautica**, v. 41, n. 3, p.133-149, 1997.
- Gobet, F. W. A linear theory of optimum low-thrust rendezvous trajectories. **Journal of the astronautical sciences**, v. 12, n. 3, p. 69, 1965.
- Gobet, F. W. Optimal variable-thrust transfer of a power-limited rocket between neighboring circular orbits. **AIAA journal**, v. 2, n. 2, p. 339-343, 1964.
- Gobet, F. W.; Doll, J. R. A survey of impulsive trajectories. **AIAA journal**, v. 7, n. 5, p. 801-834, 1969.
- Goddard, R. H. A Method of reaching extreme altitudes. In: Goddard, E. C.; Edward. G. (eds). **Smithsonian miscellaneous collections**. New York: Pendray McGraw-Hill, 1970. v. 71, n. 2. (reedição da publicação de 1919).
- Guelman, M. Earth-to-moon transfer with a limited power engine. **Journal of guidance, control, and dynamics**, v. 18, n. 5, p. 1133 - 1138, 1995.
- Haissig, C. M.; Mease, K. D.; Vinh, N. X. Minimum-fuel, power-limited transfers between coplanar elliptical orbits. **Acta astronautica**, v. 29, n. 1, p. 1 - 15, 1993.
- Hohmann, W. **Die Erreichbarkeit der Himmelskorper**. Munich: Oldenbourg, 1925.
- Hori, G. Theory of general perturbations with unspecified canonical variables. **Publications of the astronomical society of japan**, v. 18, n. 4, p. 287-295, 1966.
- Kechichian, J. A. Minimum-time low-thrust rendezvous and transfer using epoch mean longitude formulation. **Journal of guidance, control, and dynamics**, v. 22, n. 3, p. 421-432, 1999.

Kechichian, J. A. Optimal low-earth-orbit-geostationary-earth-orbit intermediate acceleration orbit transfer. **Journal of guidance, control, and dynamics**, v. 20, n. 4, p. 803-811, 1997a.

Kechichian, J. A. Optimal low-thrust transfer using bounded thrust. **Acta astronautica**, v. 36, n. 7, p. 357-365, 1995.

Kechichian, J. A. Reformulation of edelbaum's low-thrust transfer problem using optimal control theory. **Journal of guidance, control, and dynamics**, v. 20, n. 5, p. 988 - 994, 1997b.

Kechichian, J. A. Trajectory optimization using nonsingular orbital elements and true longitude. **Journal of guidance, control, and dynamics**, v. 20, n. 5, p. 1003 - 1009, 1997c.

Kovalevsky, J. **Introduction to celestial mechanics**. Dordrecht: D. Reidel publishing company, 1967, 127 p.

Lanczos, C. **The variational principles of mechanics**. New York: Dover, 1970, 418 p.

Lawden, D. F. General motion of a rocket in a gravitational field. **Journal of the british interplanetary society**, v. 6, p. 187-191, 1947.

Lawden D F. Minimal Trajectories. **Journal of the British Interplanetary Society**, v.9, p. 179-186, 1950.

Lawden, D. F. Minimal rocket trajectories. **ARS Journal**, v. 23, n. 6 p 360-382, 1953.

Lawden, D. F. **Optimal trajectories for space navigation**. London: Butterworths Mathematical Texts, 1963, 126 p.

Lawden, D. F. Optimum launching of a rocket into an orbit about the earth. **Astronautica Acta**, v. 1, p. 185-190, 1955.

Lawden, D. F. Orbital transfer via tangencial ellipses. **Journal of the British Interplanetary Society**, v. 11, n. 6, p. 278-289, 1952.

Lawden, D.F. Fundamentals of space navigation. **Journal of the british interplanetary society**, v. 13, p. 87-101, 1954.

Lembeck, C. A.; Prussing, J. E. Optimal impulsive intercept with low-thrust rendezvous return. **Journal of guidance, control, and dynamics**, v. 16, n. 3, p. 426-433, 1993.

Marchal, C.; Marec, J. P.; Winn, C. B. Synthèse des résultats analytiques sur les transferts optimaux entre orbites képlériennes. In: CONGRÈS INTERNATIONAL D'ASTRONAUTIQUE, 18., 1967, Belgrade. **Anais ...**Toulouse: ONERA, 1967. ONERA TP 515.

Marec, J. P. **Optimal space trajectories**. Amsterdam: Elsevier, 1979, 329 p.

Marec, J. P. Trajectoires spatiales optimales. In: COURS INTERNATIONAL DE TECHNOLOGIE SPATIALE, 1984, Toulouse. **Mathématiques spatiales pour la préparation et la réalisation de l'exploitation des satellites**. Toulouse: ONERA, 1984. ONERA TP 1984-7.

Marec, J. P. Transferts économiques entre orbites infiniment proches. In: CONGRÈS INTERNATIONAL D'ASTRONAUTIQUE, 16., 1965, Athenes. **Anais ...**Toulouse: ONERA, 1965. ONERA TP 270, S2-T16475.

Marec, J. P.; Vinh, N. X. **Etude generale des transferts optimaux a pousse faible et puissance limitee entre orbites elliptiques quelconques**. Toulouse: ONERA, 1980. (ONERA PUB 1980-2).

Marec, J. P.; Vinh, N. X. Optimal low-thrust, limited power transfers between arbitrary elliptical orbits. **Acta Astronautica**, v. 4, n. 5-6, p. 511-540, 1977.

Markopolos, N. Explicit, near-optimal guidance for power-limited transfers between coplanar circular orbits. **Journal of guidance, control, and dynamics**, v. 19, n. 6, p. 1317-1325, 1996.

Melbourne, W. G.; Sauer, C. G. Jr. Optimum thrust programs for power-limited propulsion systems. **Astronautica acta**, v. 8, n. 4, p. 205-227, 1962.

Pardis, J. C.; Carter, E. T. Optimal power-limited rendezvous with thrust saturation.

Journal of guidance, control, and dynamics, v. 18, n. 5, p. 1145-1150, 1995.

Pontryagin, L.S.; Boltyanskii, V.G., Gamkrelidze, R. V.; Mishchenko, E. F. **The mathematical theory of optimal control processes**. New York: John Wiley & Sons, 1962, 362 p.

Popescu, M. Applications of canonical transformations in optimizing orbital transfers.

Journal of guidance, control and dynamics, v. 20, n. 4, p. 774-779, 1997.

Powers, W.F.; Tapley, B.D. Canonical transformation applications to optimal trajectory analysis. **AIAA journal**, v. 7, n. 3, p. 394-399, 1969.

Rider, L. Low thrust correction of orbital orientation. **ARS journal**, v. 30, n. 7, p. 647-648, 1960.

Sagan, H. **Introduction to the calculus of variations**. New York: Dover, 1969, 449 p.

BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTAR

Betts, J. T. Using sparse nonlinear programming to compute low thrust orbit transfers. **Journal of the astronautical sciences**, v. 41, n. 3, p. 349-371, 1993.

Broucke, R. A. Low-thrust trajectory optimization in an inverse square force central. Houston: **AIAA spaceflight mechanics meeting**, AAS paper 91-159, 1991.

Deprit, A. Comment on canonical transformation applications to optimal trajectory analysis. **AIAA journal**, v. 8, n. 6, p. 1182, 1970.

Fraeijis de Veubeke, B. Canonical transformations and the thrust-coast-thrust optimal transfer problem. **Astronautica acta**, v. 11, n. 4, p. 271-282, 1965.

Fraeijis de Veubeke, B. Optimal steering and cutoff-relight programs for optimal transfer. **Astronautica acta**, v. 12, n. 4, p. 323-328, 1966.

Lee, E. B. A sufficient condition in the theory of optimal control. **J. SIAM on control**, Ser. A, v. 1, n. 3, p. 241, 1963.

Marchal, C. Optimization of space trajectories. In: CONGRÈS INTERNATIONAL D'ASTRONAUTIQUE, 27., 1976, Anaheim. **Anais ...**Toulouse: ONERA, 1976. ONERA TP 1976-107, S2-T16538.

Troitskii, V. A. On variational problems of optimization of control processes. **PMM**, v. 26, n. 1, p. 25 - 38, 1962.

Troitskii, V. A. The mayer-bolza problem of the calculus of variations and the theory of optimum systems. **PMM**, v. 25, n. 5, p. 668 - 679, 1961.

Ulybyshev, Y. P. Comment on: "optimal cooperative power-limited rendezvous between neighboring circular orbits". **Journal of guidance, control, and dynamics**, v. 18, n. 5, p. 1223-1224, 1995.

Wenzel, R. S.; Prussing, J. E. Preliminary study of optimal thrust-limited path-constrained maneuvers. **Journal of guidance, control, and dynamics**, v. 19, n. 6, p. 1303 - 1309, 1996.

APÊNDICE A

DETERMINAÇÃO DA MATRIZ JACOBIANA

É apresentada aqui a determinação da matriz de transformação de elementos cartesianos para elementos orbitais desenvolvida por Da Silva Fernandes (1995) e utilizada no desenvolvimento deste trabalho.

A.1 - Construção da Matriz de Transformação

A derivada da matriz Jacobiana de derivadas parciais de elementos cartesianos \vec{r} e \vec{v} com respeito aos elementos Keplerianos a, e, ω, I, Ω e M , é obtida usando a noção de variação e uma propriedade da transformação inversa, segundo a qual

$$\Delta_{\varphi^{-1}} = \Delta_{\varphi}^{-1} \quad (\text{A.1})$$

A inversa da transformação definida pelas Equações (4.15) – (4.20) é dada por

$$a = \frac{r}{2 - \left(\frac{rv^2}{\mu} \right)}$$

$$e = |\vec{e}|$$

$$\cos I = k \cdot \frac{\vec{h}}{h}$$

$$\cos \Omega = \hat{i} \cdot \frac{\vec{N}}{N}$$

$$\cos \omega = \frac{\vec{e} \cdot \vec{N}}{eN}$$

$$\cos E = \frac{e}{\left(1 - \frac{r}{a}\right)}, \quad (\text{A.2})$$

onde o vetor excentricidade \vec{e} , o vetor momento angular \vec{h} e o vetor nodal \vec{N} , mostrado na Figura A1, são dados por

$$\vec{e} = \frac{\vec{v} \times \vec{h}}{\mu} - \frac{\vec{r}}{r}, \quad (\text{A.3})$$

$$\vec{h} = \vec{r} \times \vec{v}, \quad (\text{A.4})$$

$$\vec{N} = \vec{k} \times \vec{h}. \quad (\text{A.5})$$

Onde \times denota o produto vetorial.

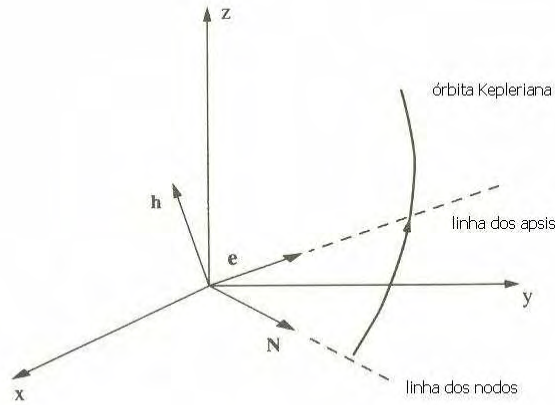


FIGURA A.1 - Representação dos vetores \vec{e} , \vec{h} e \vec{N} .

Considere as variações $\delta\vec{r}$ e $\delta\vec{v}$ expressa, no sistema de referência móvel, por

$$\delta\vec{r} = \delta\zeta\hat{r} + \delta\eta\hat{s} + \delta\zeta\hat{w}, \quad (\text{A.6})$$

$$\delta\vec{v} = \delta u\hat{t} + \delta v\hat{s} + \delta w\hat{w}. \quad (\text{A.7})$$

Então, das Equações (A.2) – (A.7), as variações dos elementos Keplerianos introduzindo as variações $\delta\vec{r}$ e $\delta\vec{v}$ dos elementos Cartesianos são dadas por

$$\delta a = 2\left(\frac{a}{r}\right)^2 \frac{\vec{r} \cdot \delta\vec{r}}{r} + 2\frac{a^2}{\mu} \vec{v} \cdot \delta\vec{v}, \quad (\text{A.8})$$

$$\delta e = -\frac{\vec{h} \cdot \delta\vec{h}}{\mu a e} + \frac{h^2}{2\mu a e} \frac{\delta a}{a}, \quad (\text{A.9})$$

$$\delta\omega = \left[\frac{\delta e}{e} + \frac{\vec{N} \cdot \delta\vec{N}}{N^2} \right] \cotg \omega - \frac{1}{Ne} [\delta\vec{e} \cdot \vec{N} + \vec{e} \cdot \delta\vec{N}] \operatorname{cosec} \omega, \quad (\text{A.10})$$

$$\delta I = \frac{\vec{h} \cdot \delta\vec{h}}{h^2} \cotg I - \frac{\hat{k} \cdot \delta h}{h} \operatorname{cosec} I, \quad (\text{A.11})$$

$$\delta\Omega = \frac{\vec{N} \cdot \delta\vec{N}}{N^2} \cotg \Omega - \frac{\hat{i} \cdot \delta\vec{N}}{N} \operatorname{cosec} \Omega, \quad (\text{A.12})$$

$$\delta E = \frac{1}{e \operatorname{sen} E} \left[\frac{\vec{r} \cdot \delta\vec{r}}{ra} - \frac{r\delta a}{a^2} + \cos E \delta e \right]. \quad (\text{A.13})$$

Sendo as variações dos vetores \vec{e} , \vec{h} e \vec{N} expressas por

$$\begin{aligned} \delta\vec{e} = & \frac{1}{\mu} \left\{ [v_s^2 \delta\xi - v_r v_s \delta\eta + (h + rv_s) \delta v] \hat{r} + \right. \\ & + \left[-v_r v_s \delta\xi + \left(v_r^2 - \frac{\mu}{r} \right) \delta\eta - h \delta u - rv_r \delta v \right] \hat{s} + \\ & \left. + \left[\left(v^2 - \frac{\mu}{r} \right) \delta\xi - rv_r \delta v \right] \hat{w} \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

$$\delta\vec{h} = -v_s \delta\xi \hat{r} + (v_r \delta\xi - r \delta w) \hat{s} + (v_s \delta\xi - v_r \delta\eta + r \delta v) \hat{w}, \quad (\text{A.15})$$

$$\begin{aligned}
\delta\vec{N} = & [(v_s\delta\xi - v_r\delta\eta + r\delta\nu)\text{sen } I \cos(\omega + \nu) - (v_r\delta\zeta - r\delta w)\cos I]\hat{r} + \\
& + [-(v_s\delta\xi - v_r\delta\eta + r\delta\nu)\text{sen } I \text{sen}(\omega + \nu) - v_s \cos I \delta\zeta]\hat{s} + \\
& + [(v_r\delta\zeta - r\delta w)\text{sen } I \text{sen}(\omega + \nu) + v_s \text{sen } I \cos(\omega + \nu)\delta\zeta]\hat{w}.
\end{aligned} \tag{A.16}$$

Onde v_r e v_s denotam as componentes radial e circunferencial do vetor velocidade respectivamente.

No sistema de referênci móvel os vetores \vec{e} , \vec{h} e \vec{N} e os vetores unitários \hat{i} , \hat{j} , \hat{k} são escritos como

$$\vec{e} = \left(\frac{hv_s}{\mu} - 1 \right) \hat{r} - \frac{hv_r}{\mu} \hat{s}, \tag{A.17}$$

$$\vec{h} = h\hat{w} = \sqrt{\mu a(1 - e^2)} \hat{w}, \tag{A.18}$$

$$\vec{N} = h \text{sen } I \cos(\omega + \nu) \hat{r} - h \text{sen } I \text{sen}(\omega + \nu) \hat{s}, \tag{A.19}$$

$$\begin{aligned}
\hat{i} = & [\cos \Omega \cos(\omega + \nu) - \text{sen } \Omega \text{sen}(\omega + \nu) \cos I] \hat{r} - \\
& - [\cos \Omega \text{sen}(\omega + \nu) + \text{sen } \Omega \cos(\omega + \nu) \cos I] \hat{s} + \\
& + \text{sen } \Omega \text{sen } I \hat{w}
\end{aligned} \tag{A.20}$$

$$\begin{aligned}
\hat{j} = & [\text{sen } \Omega \cos(\omega + \nu) + \cos \Omega \text{sen}(\omega + \nu) \cos I] \hat{r} + \\
& + [-\text{sen } \Omega \text{sen}(\omega + \nu) + \cos \Omega \cos(\omega + \nu) \cos I] \hat{s} - \\
& - \cos \Omega \text{sen } I \hat{w}
\end{aligned} \tag{A.21}$$

$$\hat{k} = \text{sen}(\omega + \nu)\text{sen } I\hat{r} + \cos(\omega + \nu)\text{sen } I\hat{s} + \cos I\hat{w}. \quad (\text{A.22})$$

Substituindo as Equações (A.17) – (A.22) nas Equações (A.8) – (A.16), Explicitamos as variações dos elementos Keplerianos a, e, ω, I, Ω e M em termo das variações $\delta\vec{r}$ e $\delta\vec{v}$ dos elementos Cartesianos \vec{r} e \vec{v} . Neste ponto substituímos a variação da anomalia excêntrica E pela variação da anomalia média M .

$$\delta M = \left(\frac{r}{a}\right)\delta E - \text{sen } E\delta e. \quad (\text{A.23})$$

Deste modo encontra-se

$$\delta a = 2\left(\frac{a}{r}\right)^2 \delta\xi + \frac{2e \text{sen } \nu}{n\sqrt{1-e^2}} \delta u + \frac{2\sqrt{1-e^2}}{n} \left(\frac{a}{r}\right) \delta\nu, \quad (\text{A.24})$$

$$\begin{aligned} \delta e = & \frac{a}{r^2}(1-e^2)\cos E\delta\xi + \frac{\text{sen } \nu}{a} \delta\eta + \frac{\sqrt{1-e^2}}{na} \text{sen } \nu\delta u + \\ & + \frac{\sqrt{1-e^2}}{na} (\cos \nu + \cos E)\delta\nu, \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

$$\begin{aligned}
\delta\omega &= \frac{\text{sen } \nu}{re} \delta\xi - \frac{(\cos \nu + e)}{ae(1-e^2)} \delta\eta + \frac{\text{cotg } I}{r} \times \\
&\times \left(\cos E \cos \omega - (1-e^2)^{\frac{1}{2}} \text{sen } E \text{sen } \omega \right) \delta\zeta - \\
&- \frac{\sqrt{1-e^2}}{nae} \cos \nu \delta u + \frac{\sqrt{1-e^2}}{nae} \left(1 + \frac{1}{1+e \cos \nu} \right) \text{sen } \nu \delta v - \\
&- \frac{\text{cotg } I}{na\sqrt{1-e^2}} \left(\frac{r}{a} \right) \text{sen}(\omega + \nu) \delta w,
\end{aligned} \tag{A.26}$$

$$\delta I = \frac{1}{r} \left(\cos E \text{sen } \omega + (1-e^2)^{\frac{1}{2}} \text{sen } E \cos \omega \right) \delta\zeta + \frac{1}{na\sqrt{1-e^2}} \left(\frac{r}{a} \right) \cos(\omega + \nu) \delta w, \tag{A.27}$$

$$\begin{aligned}
\delta\Omega &= \frac{1}{r \text{sen } I} \left(-\cos E \cos \omega + (1-e^2)^{\frac{1}{2}} \text{sen } E \text{sen } \omega \right) \delta\zeta + \\
&+ \frac{1}{na \text{sen } I \sqrt{1-e^2}} \left(\frac{r}{a} \right) \text{sen}(\omega + \nu) \delta w,
\end{aligned} \tag{A.28}$$

$$\begin{aligned}
\delta M &= -\frac{(1-e^3 \cos E)}{re\sqrt{1-e^2}} \text{sen } \nu \delta\xi + \frac{\sqrt{1-e^2}}{ae} \cos \nu \delta\eta + \\
&+ \frac{(1-e^2)}{nae} \left(\frac{-2e}{1+e \cos \nu} + \cos \nu \right) \delta u - \\
&- \frac{(1-e^2)}{nae} \left(1 + \frac{1}{1+e \cos \nu} \right) \text{sen } \nu \delta v.
\end{aligned} \tag{A.29}$$

onde $n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}$

As Equações (A.24) – (A.29) podem ser posta na forma

$$\begin{bmatrix} \delta a \\ \delta e \\ \delta \omega \\ \delta I \\ \delta \Omega \\ \delta M \end{bmatrix} = \Delta_{\varphi-1} \begin{bmatrix} \delta \xi \\ \delta \eta \\ \delta \zeta \\ \delta u \\ \delta v \\ \delta w \end{bmatrix}, \quad (\text{A.30})$$

de forma que a solução das equações adjuntas são expressas por

$$\begin{bmatrix} \bar{p}_r \\ \bar{p}_v \end{bmatrix} = (\Delta_{\varphi-1})^T \begin{bmatrix} \pi_a \\ \pi_e \\ \pi_\omega \\ \pi_I \\ \pi_\Omega \\ \pi_M \end{bmatrix}. \quad (\text{A.31})$$

Os vetores \bar{p}_r e \bar{p}_v estão representados explicitamente no Capítulo 4 na Seção 4.5.1 pelas Equações (4.17) e (4.18). Um vez que as variações de $\delta \vec{r}$ e $\delta \vec{v}$ são dadas no sistema de referência móvel os vetores adjuntos são também obtidos do sistema de referência móvel (sistema de Gauss).

APÊNDICE B

RESULTADOS NUMÉRICOS PARA TRANSFERÊNCIAS ENTRE ÓRBITAS COPLANARES COAXIAIS DIRETAS

B.1 - Introdução

Neste apêndice é feito um estudo numérico comparativo para transferências entre órbitas coplanares coaxiais diretas através de sistemas propulsivos de baixo empuxo e potência limitada em um campo de força central. Na primeira parte desta análise é feito um estudo comparativo numérico entre os resultados obtidos na sua forma analítica completa em primeira ordem, com os resultados obtidos por integração numérica utilizando o método de Runge-Kutta de quarta quinta ordem. Na segunda parte é apresentado um estudo comparativo com valores médios de excentricidade e semi-eixo maior com sua respectiva solução periódica em primeira ordem.

B.2 – Validação Numérica

As equações de movimento são obtidas da função Hamiltoniana dada pela Equação (5.1) através do software Maple V, sendo expressas por:

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{1}{2} \frac{a}{(1-e^2)} \left\{ 2(1-\cos 2\nu)(2ae\pi_a + (1-e^2)\pi_e)ae + \right. \\ &\quad \left. + 8a^2(1+\cos\nu)^2\pi_a + 4a(1-e^2)(1+\cos\nu)(\cos E + \cos\nu)\pi_e \right\} \\ \frac{de}{dt} &= \frac{1}{2} \frac{a}{(1-e^2)} \left\{ (1-\cos 2\nu)(2ae\pi_a + (1-e^2)\pi_e)(1-e^2) + \right. \\ &\quad \left. + 4a(1-e^2)(1+\cos\nu)(\cos E + \cos\nu)\pi_a + 2(1-e^2)^2(\cos E + \cos\nu)^2\pi_e \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\pi_a}{dt} = & -\frac{1}{2} \frac{a}{(1-e^2)} \left\{ 2(1-\cos 2\nu)(2ae\pi_a + (1-e^2)\pi_e)e\pi_a + 8a(1+\operatorname{ecos}\nu)^2\pi_a^2 + \right. \\ & \left. + 4(1-e^2)(1+\operatorname{ecos}\nu)(\cos E + \cos \nu)\pi_a\pi_e \right\} - \frac{1}{2} \frac{1}{(1-e^2)} \left\{ \frac{1}{2}(1-\cos 2\nu)(2ae\pi_a + \right. \\ & \left. + (1-e^2)\pi_e)^2 + 4a^2(1+\operatorname{ecos}\nu)^2\pi_a^2 + 4a(1-e^2)(1+\operatorname{ecos}\nu)(\cos E + \cos \nu)\pi_a\pi_e + \right. \\ & \left. + (1-e^2)^2(\cos E + \cos \nu)^2\pi_e^2 \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\pi_e}{dt} = & -\frac{1}{2} \frac{a}{(1-e^2)} \left\{ (1-\cos 2\nu)(2ae\pi_a + (1-e^2)\pi_e)(2a\pi_a - 2e\pi_e) + \right. \\ & \left. + 8a^2(1+\operatorname{ecos}\nu)\cos \nu\pi_a^2 - 8ae(1+\operatorname{ecos}\nu)(\cos E + \cos \nu)\pi_a\pi_e + \right. \\ & \left. + 4a(1-e^2)\cos \nu(\cos E + \cos \nu)\pi_a\pi_e - 4(1-e^2)(\cos E + \cos \nu)^2e\pi_e^2 \right\} - \\ & - \frac{ae}{(1-e^2)^2} \left\{ \frac{1}{2}(1-\cos 2\nu)(2ae\pi_a + (1-e^2)\pi_e)^2 + 4a^2(1+\operatorname{ecos}\nu)^2\pi_a^2 + \right. \\ & \left. + 4a(1-e^2)(1+\operatorname{ecos}\nu)(\cos E + \cos \nu)\pi_a\pi_e + (1-e^2)^2(\cos E + \cos \nu)^2\pi_e^2 \right\} + \\ & + \left\{ -\frac{a}{2(1-e^2)} \left[\operatorname{sen} 2\nu(2ae\pi_a + (1-e^2)\pi_e)^2 - 8a^2e(1+e\cos \nu)\operatorname{sen} \nu\pi_a^2 - \right. \right. \\ & \left. \left. - 4a(1-e^2)(\cos E + \cos \nu)e\operatorname{sen} \nu\pi_a\pi_e - 4a(1-e^2)(1+e\cos \nu)\operatorname{sen} \nu\pi_a\pi_e - \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2(1-e^2)^2 (\cos E + \cos \nu) \text{sen } \nu \pi_e^2 \left[\frac{(2+e \cos \nu) \text{sen } \nu}{(1-e^2)} \right] \Bigg\} + \\
& + \left\{ -\frac{a}{2(1-e^2)} \left[-4a(1-e^2)(1+e \cos \nu) \text{sen } \nu \pi_a \pi_e - \right. \right. \\
& \left. \left. -2(1-e^2)^2 (\cos E + \cos \nu) \text{sen } E \pi_e^2 \right] \frac{\text{sen } \nu}{(1-e \cos E)} \right\}
\end{aligned} \tag{B.1}$$

Com essas expressões torna-se possível fazer uma integração numérica utilizando o método de Runge-Kutta de quarta quinta ordem. Desta forma, os resultados numéricos são comparados com os resultados analíticos em primeira ordem obtidos pelo método de Hori. Estes resultados estão apresentados nas Figuras de B.1 a B.4, e mostram que os valores de semi-eixo maior e excentricidade em função do tempo. Como pode ser observado os resultados analíticos estão muito próximos dos resultados obtidos por integração numérica, para as condições iniciais apresentadas na Tabela B.1. Nas Figuras B.1 e B.2 (a) estão representadas as soluções numérica e analítica para o semi-eixo maior e excentricidade dos valores das condições iniciais da manobra I representados na Tabela B.1. Nas Figuras B.1 e B.2 (b) estão representadas as diferenças entre as soluções analítica e numérica para semi-eixo maior e excentricidade no tempo. E, nas Figuras B.3 e B.4 (a) estão representadas as soluções numérica e analítica para o semi-eixo maior e excentricidade dos valores das condições iniciais da manobra II representados na Tabela B.1

TABELA B.1 – Dados de entrada para a comparação dos resultados analítico e numérico para transferências entre órbitas coplanares coaxiais diretas.

Constantes	Condições Iniciais da Manobra I	Condições Iniciais da Manobra II
t_0	0.0	0.0
t_f	800	1100
a_0	1.0	1.0
e_0	0.0	0.3
J_0	0.0	0.0
B	0.000206	0.000206
C	0.000261	0.000261

Vale a pena ressaltar que estão sendo comparadas as Equações (4.30) – (4.31) da solução formal obtida em primeira ordem pelo método de Hori com a integração numérica do sistema de equações, dado pela Equação (C.1), pelo método de Runge – Kutta de quarta quinta ordem.

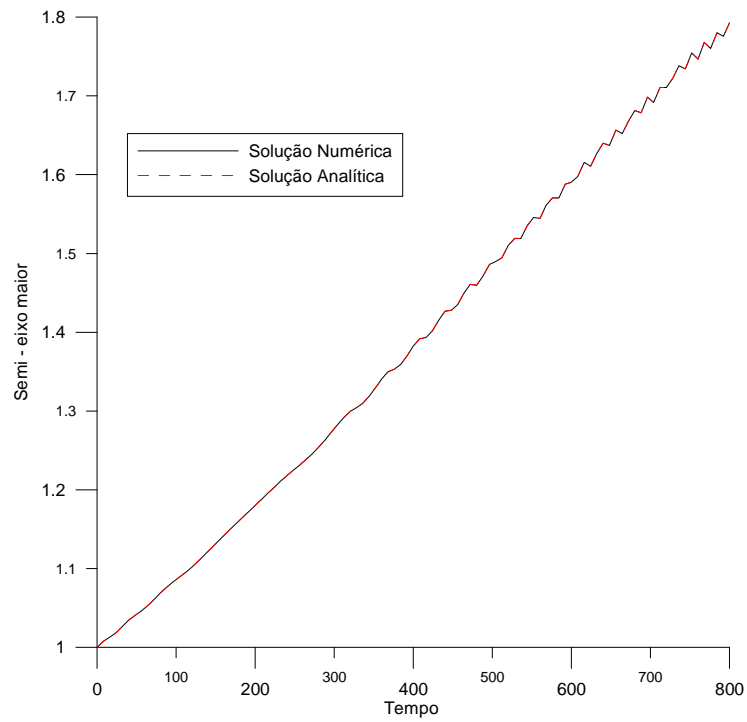


FIGURA B.1(a) - Semi-eixo maior em função do tempo para a manobra I.

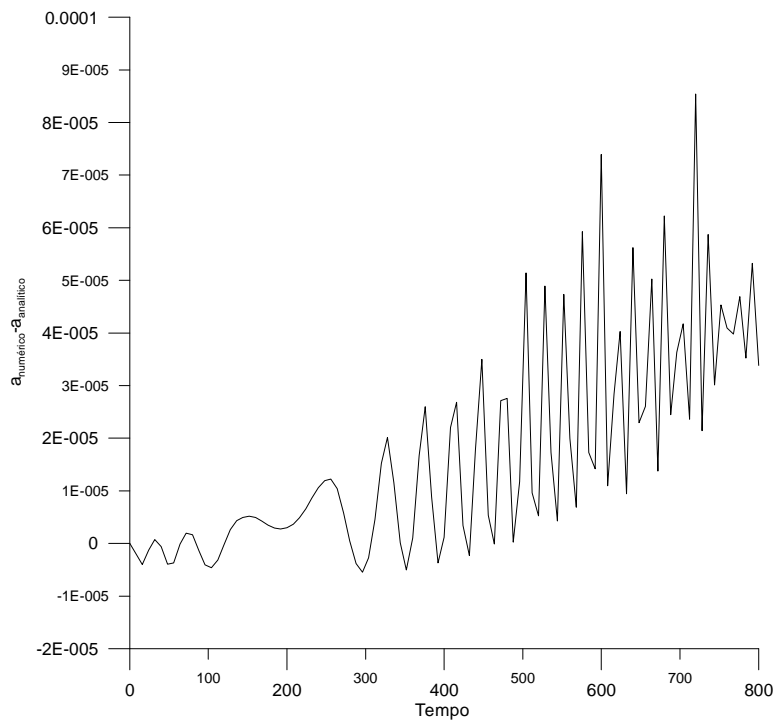


FIGURA B.1(b) - Semi-eixo maior em função do tempo para a manobra I.

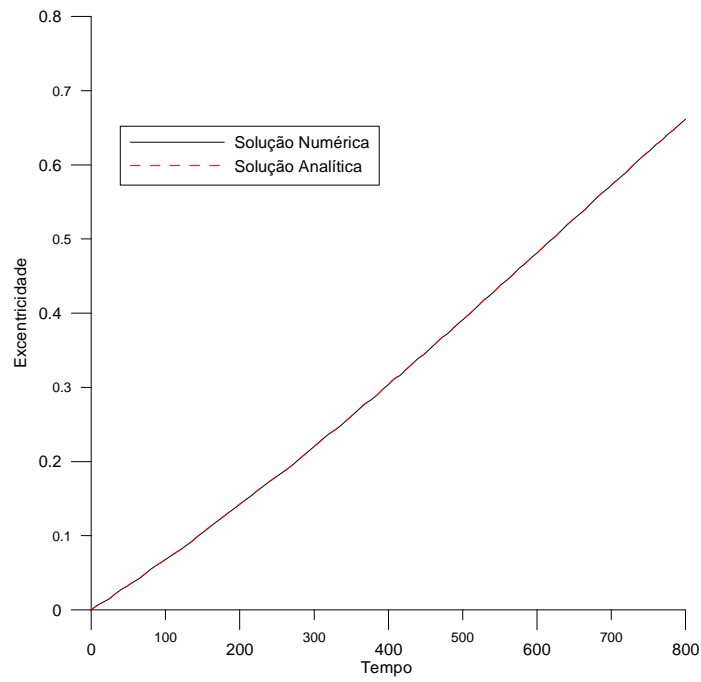


FIGURA B.2(a) - Excentricidade em função do tempo para a manobra I.

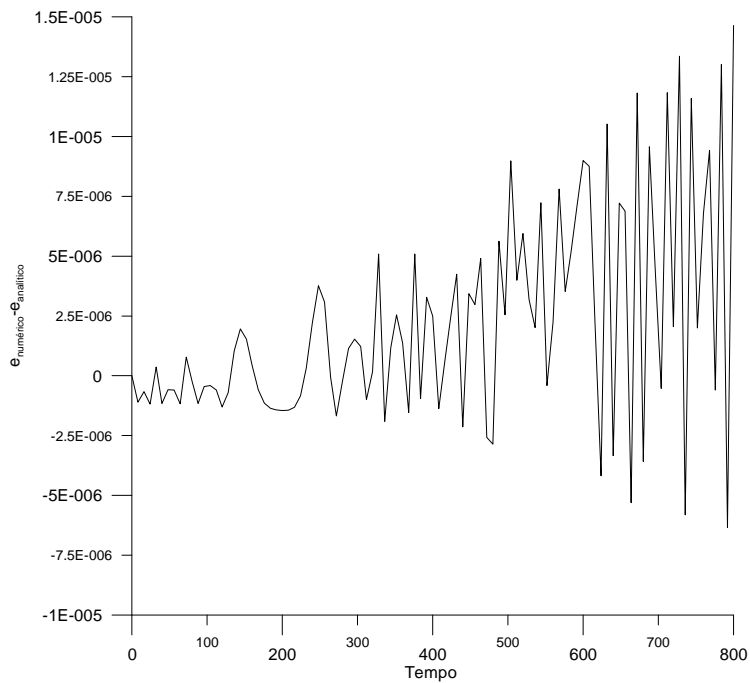


FIGURA B.2(b) - Excentricidade em função do tempo para a manobra I.

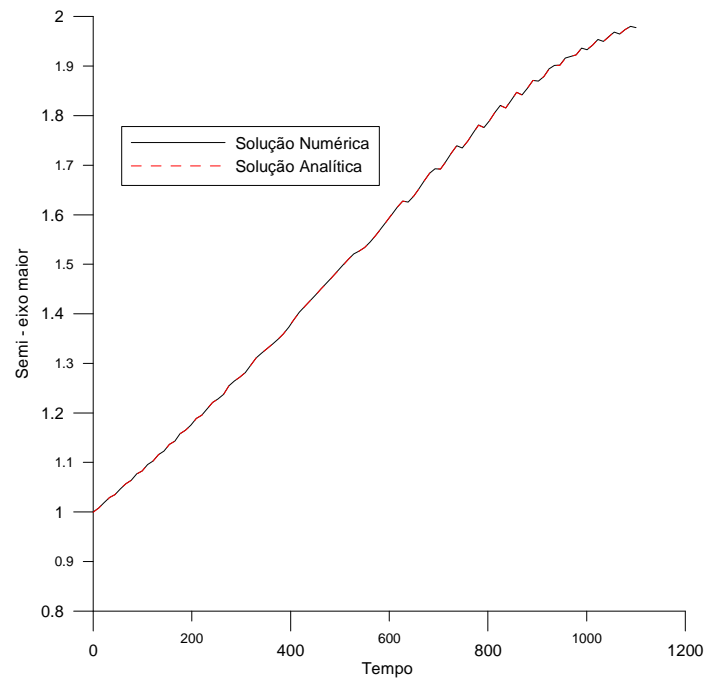


FIGURA B.3(a) - Semi-eixo maior em função do tempo para a manobra II.

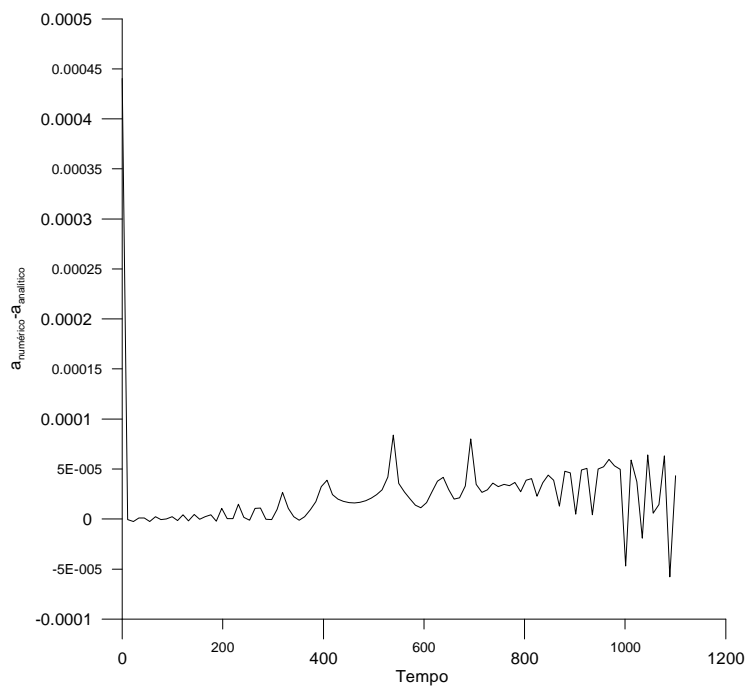


FIGURA B.3(b) - Semi-eixo maior em função do tempo para a manobra II.

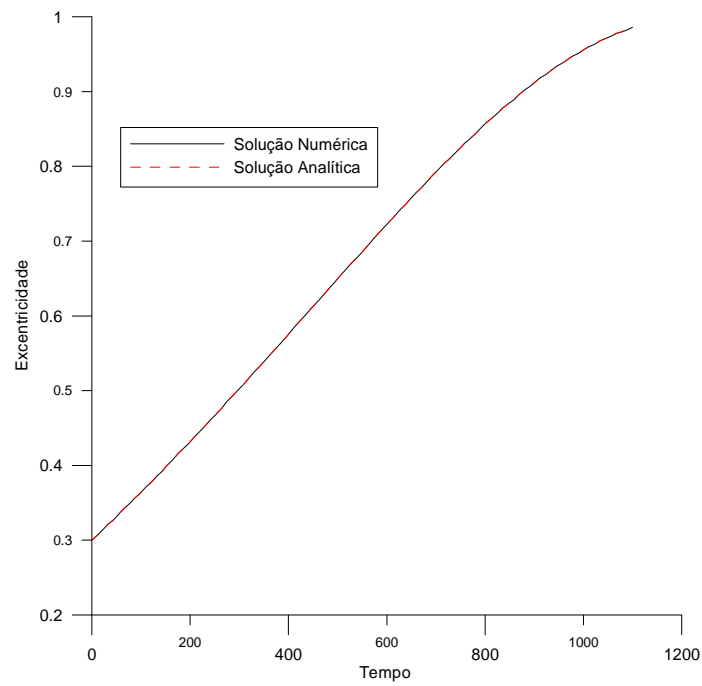


FIGURA B.4(a) - Excentricidade em função do tempo para a manobra II.

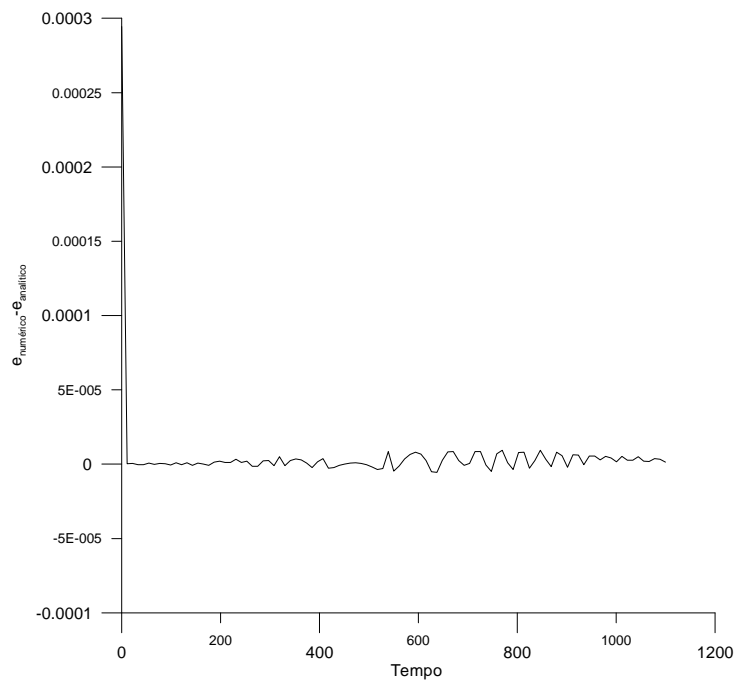


FIGURA B.4(b) - Excentricidade em função do tempo para a manobra II.

Portanto, a solução analítica de primeira ordem consiste numa boa aproximação para as transferências entre órbitas coplanares coaxiais diretas em um campo de força central Newtoniano realizados por sistema de baixo empuxo e potência limitada. Com os resultados aqui apresentados, pode-se garantir que os resultados anteriormente apresentados constituem uma boa solução para o problema de transferência estudado no Capítulo 5.

B.3 – Comparação entre Resultados Médios e Osculadores

Os resultados que são apresentados nas Figuras B.5 – B.20, com dados iniciais apresentados na Tabela B.2, representam a comparação da solução média, nas Equações (5.22) – (5.26), com a solução osculadora, Equações (5.30) – (5.32).

TABELA B.2 – Exemplos de transferências entre órbitas coplanares coaxiais diretas.

Descrição da Transferência	Excentricidade de Inicial	Semi-eixo Maior Inicial	Aceleração Média	Duração da Transferência	Número de Revoluções
Circular	$e_0 = 0,0$	$a_0 = 1$	$5 \cdot 10^{-4}$	100	16
Elíptica	$e_0 = 0,3$	$a_0 = 1$	$2 \cdot 10^{-4}$	200	32
Elíptica	$e_0 = 0,5$	$a_0 = 1$	$2 \cdot 10^{-4}$	200	32
Elíptica	$e_0 = 0,6$	$a_0 = 1$	$5 \cdot 10^{-4}$	50	8

Para transferências com excentricidade inicial zero, e condições iniciais apresentadas na Tabela B.2, tem-se que o valor médio do semi-eixo maior cresce linearmente com o tempo até o seu valor final. O valor oscilador do semi-eixo maior obtido em primeira ordem pelo método de Hori oscila em torno do valor médio do semi-eixo maior. Para o valor médio da excentricidade, tem-se um comportamento semelhante ao do semi-eixo maior. O valor oscilador da excentricidade também oscila em torno do valor médio da excentricidade e o consumo varia linearmente no tempo. Estes resultados estão apresentados nas Figuras B.5 a B.8. A expressão valor oscilador refere-se à solução formal incluindo os termos periódicos.

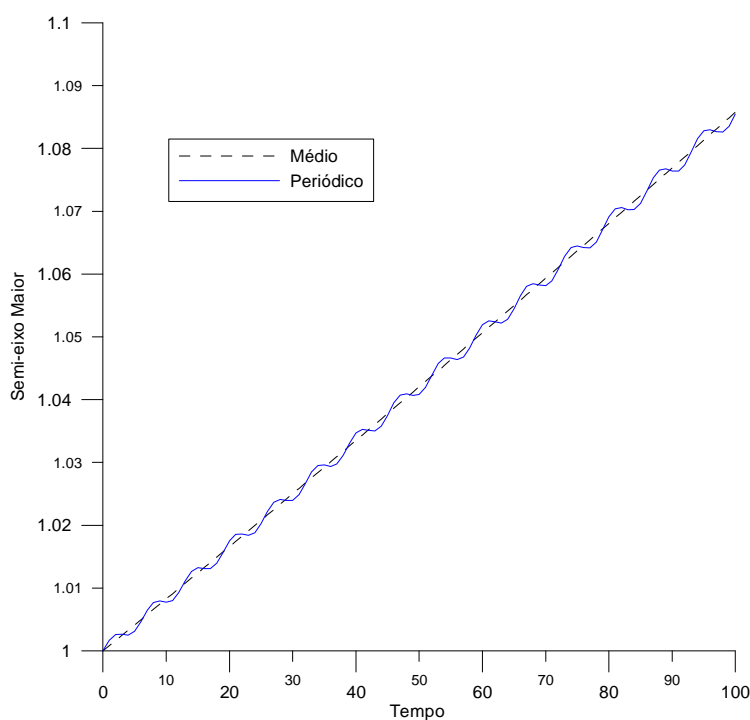


FIGURA B.5 - Comparação entre o valor médio e oscilador do semi-eixo maior($e_0 = 0$).

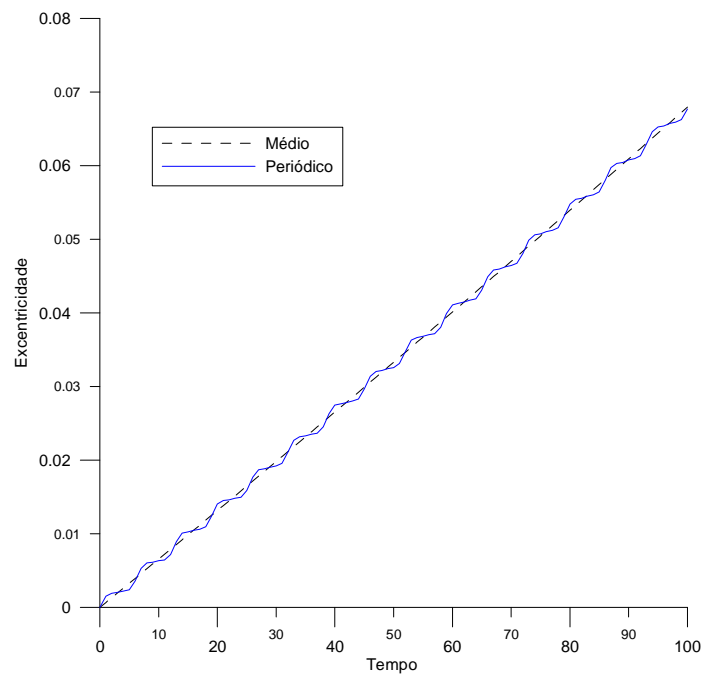


FIGURA B.6 - Comparação entre o valor médio e osculador da excentricidade.

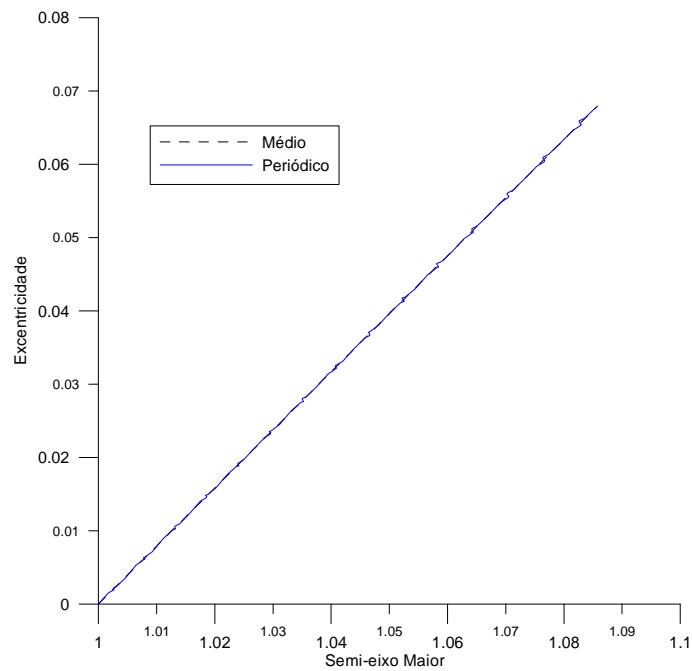


FIGURA B.7 - Comparação entre o valor médio e osculador da excentricidade semi-eixo maior.

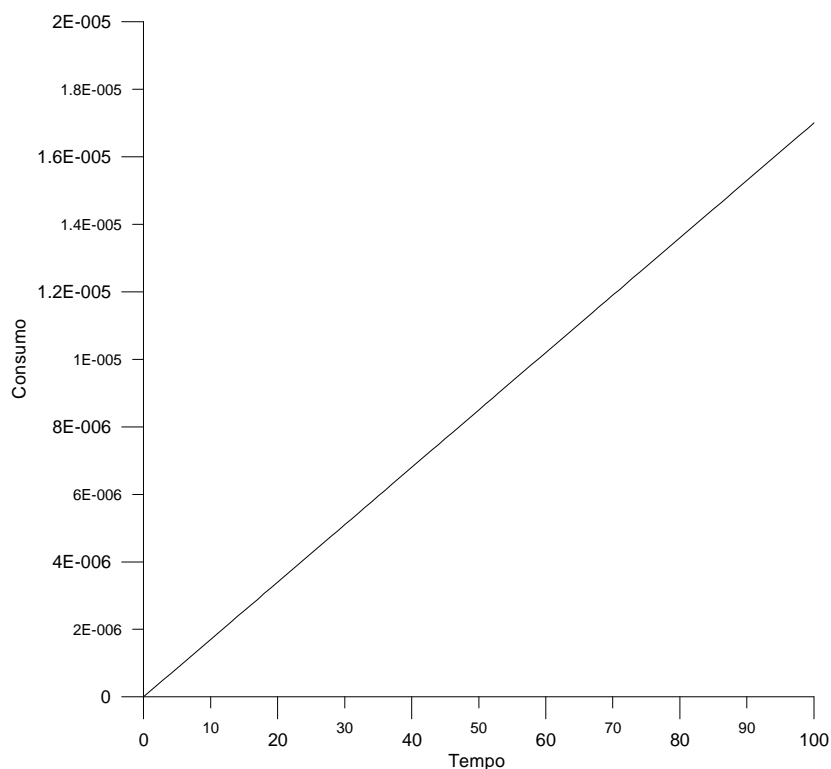


FIGURA B.8 – Evolução temporal do consumo.

Para transferências entre órbitas elípticas tem-se um comportamento idêntico ao apresentado para transferência com órbita inicial circular, no qual os valores estão apresentados na Tabela B.2. Pode-se notar que além do valor da excentricidade inicial ($e_0 = 0,3$), a duração da transferência também foi alterada para 32 revoluções em torno do corpo central. Portanto, tem-se que o semi-eixo maior médio cresce linearmente com o tempo até o seu valor final. O semi-eixo maior osculador oscila em torno do semi-eixo maior médio e o mesmo ocorre com a excentricidade média que é linearmente crescente no tempo. A excentricidade osculadora também oscila em torno do valor médio da excentricidade. O consumo evolui linearmente no tempo. Estes resultados estão apresentados nas Figuras B.9 a B.12.

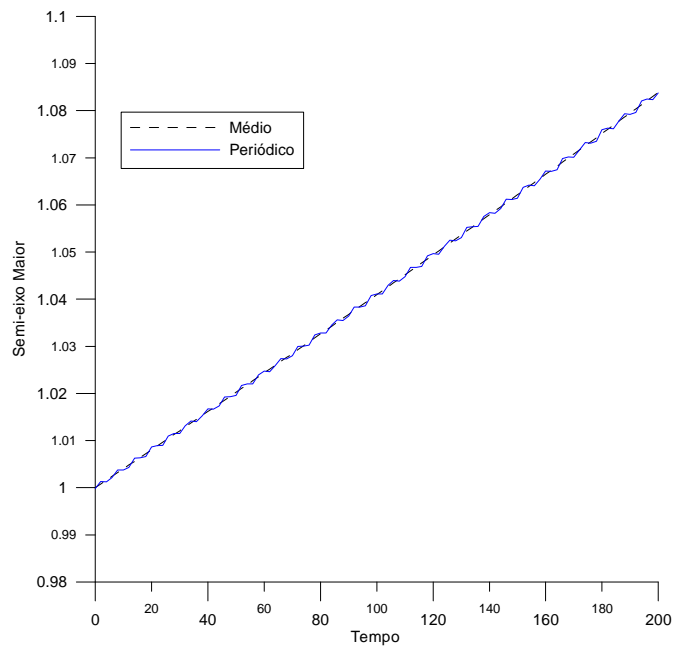


FIGURA B.9 - Comparação entre o valor médio e osculador do semi-eixo maior ($e_0 = 0,3$).

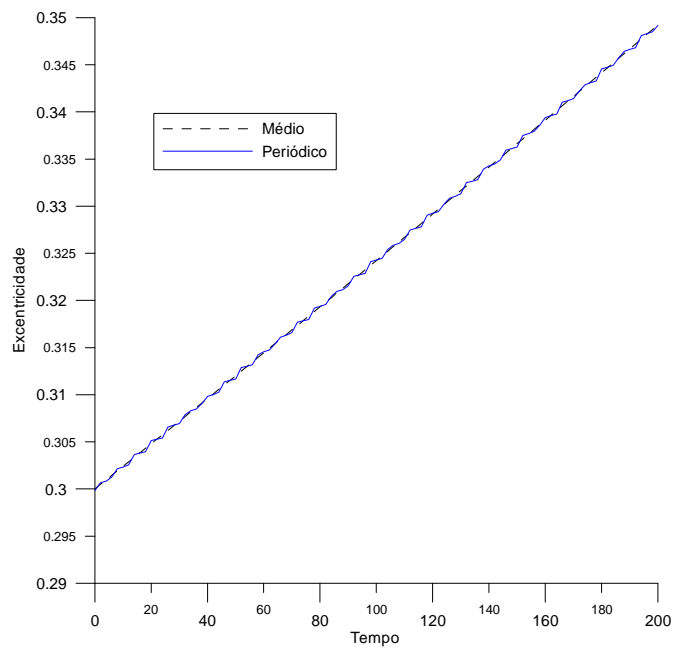


FIGURA B.10 - Comparação entre o valor médio e osculador da excentricidade ($e_0 = 0,3$).

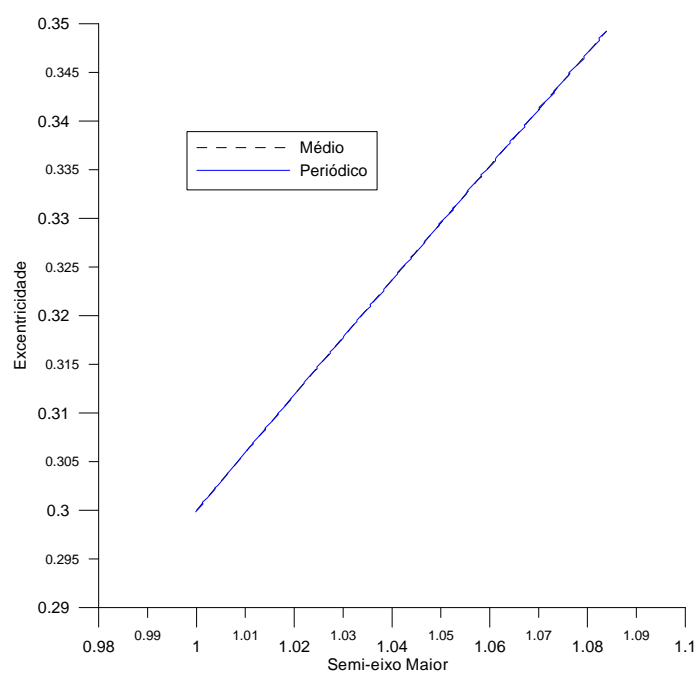


FIGURA B.11 - Comparação entre o valor médio e oscilador da excentricidade e semi-eixo maior ($e_0 = 0,3$).

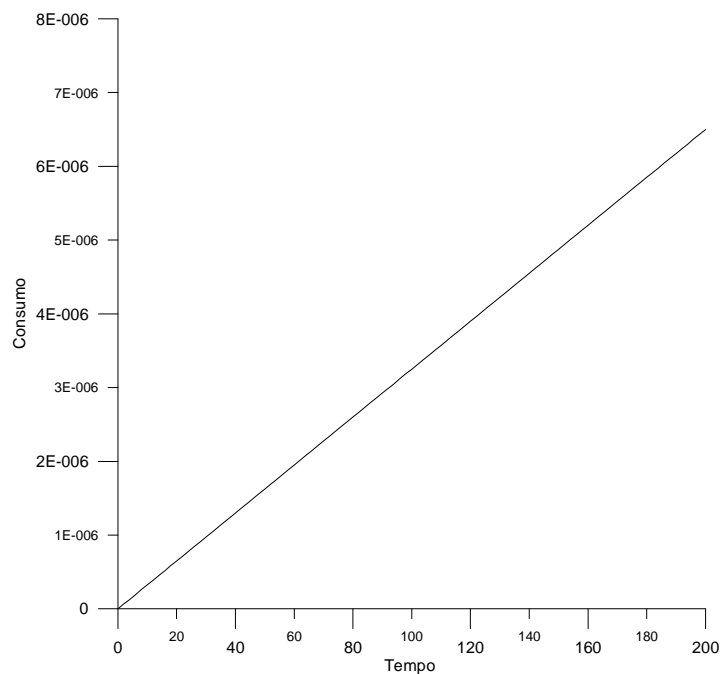


FIGURA B.12 – Evolução temporal do consumo ($e_0 = 0,3$).

Para transferências entre órbitas elípticas com excentricidade inicial ($e_0 = 0,5$) e mantendo o mesmo tempo de duração transferência, com 32 revoluções em torno corpo central, tem-se comportamento semelhante ao caso anterior e com os resultados apresentados nas Figuras B.13 a B.16.

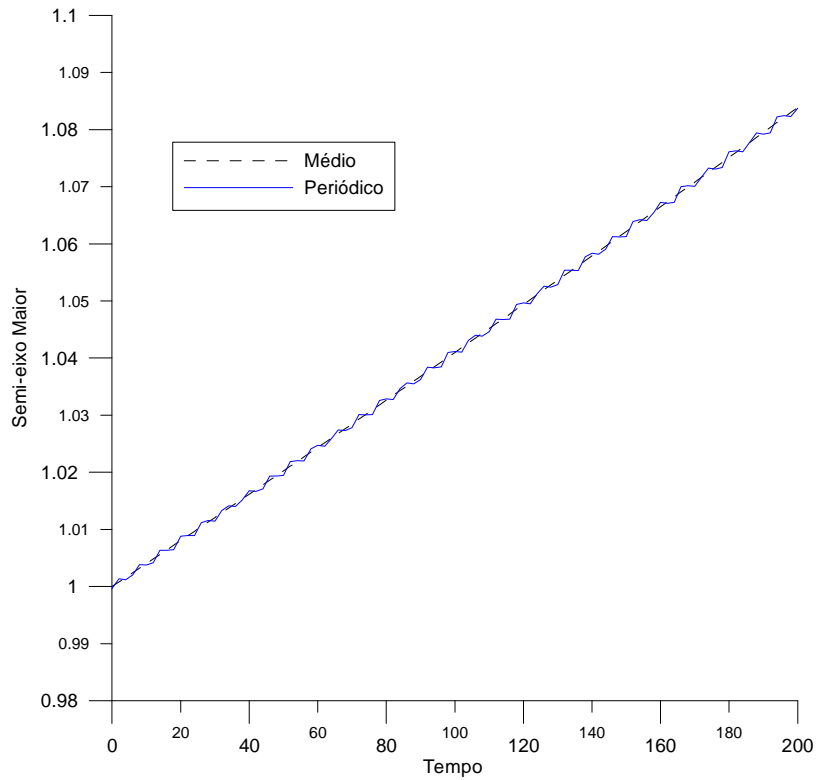


FIGURA B.13 - Comparação entre o valor médio e osculador do semi-eixo maior ($e_0 = 0,5$).

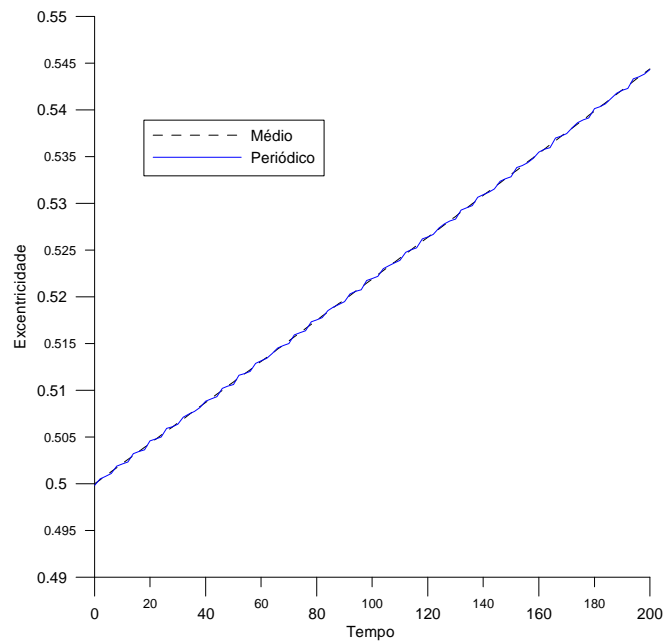


FIGURA B.14 - Comparação entre os valores médio e osculador da excentricidade ($e_0 = 0,5$).

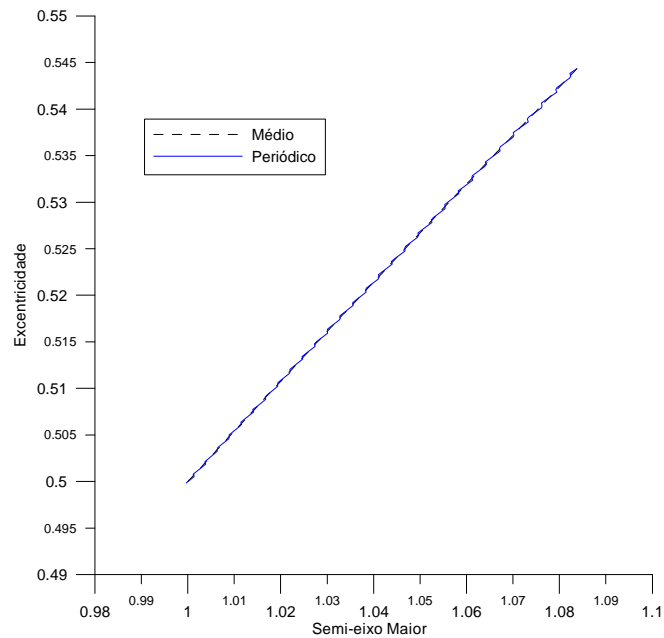


FIGURA B.15 - Comparação entre os valores médio e osculador da excentricidade e semi-eixo maior ($e_0 = 0,5$).

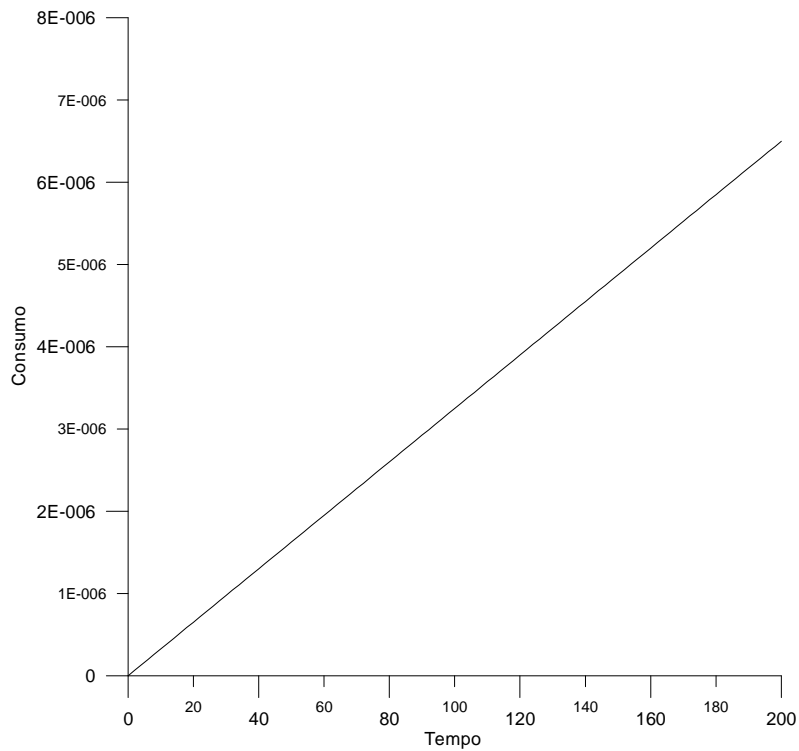


FIGURA B.16 - Evolução temporal do consumo ($e_0 = 0,5$).

Para transferências entre órbitas elípticas com excentricidade inicial ($e_0 = 0,6$), pode-se notar que a duração da transferência foi reduzida para 8 revoluções em torno do corpo central. E, verifica-se que os comportamentos dos valores médios do semi-eixo maior e da excentricidade permanecem inalterados com relação aos casos anteriores. Estes resultados estão apresentados nas Figuras de B.17 a B.20.

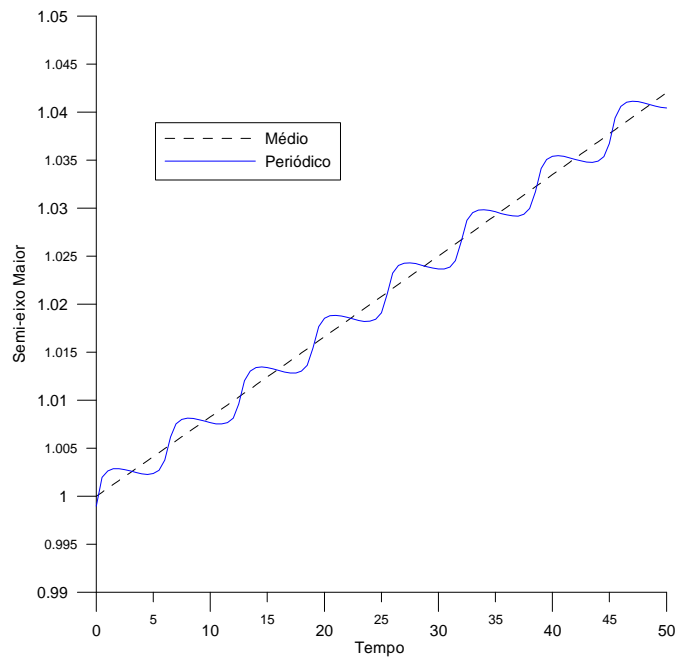


FIGURA B.17 - Comparação entre o valor médio e osculador do semi-eixo maior ($e_0 = 0,6$).

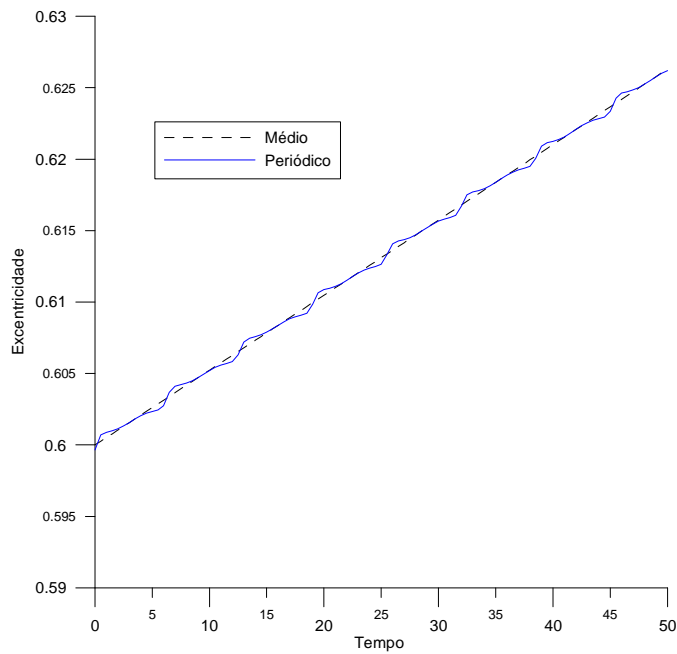


FIGURA B.18 - Comparação entre o valor médio e osculador da excentricidade ($e_0 = 0,6$).

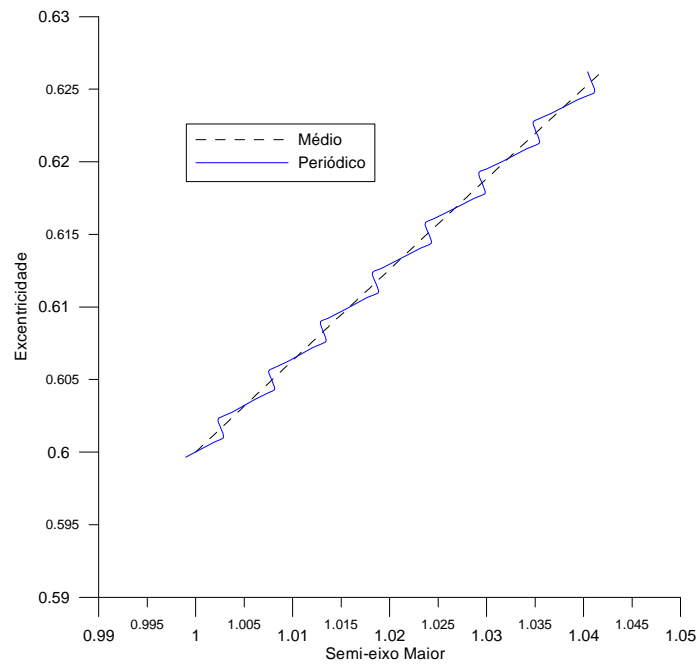


FIGURA B.19 - Comparação entre o valor médio e osculador da excentricidade e semi-eixo maior ($e_0 = 0,6$).

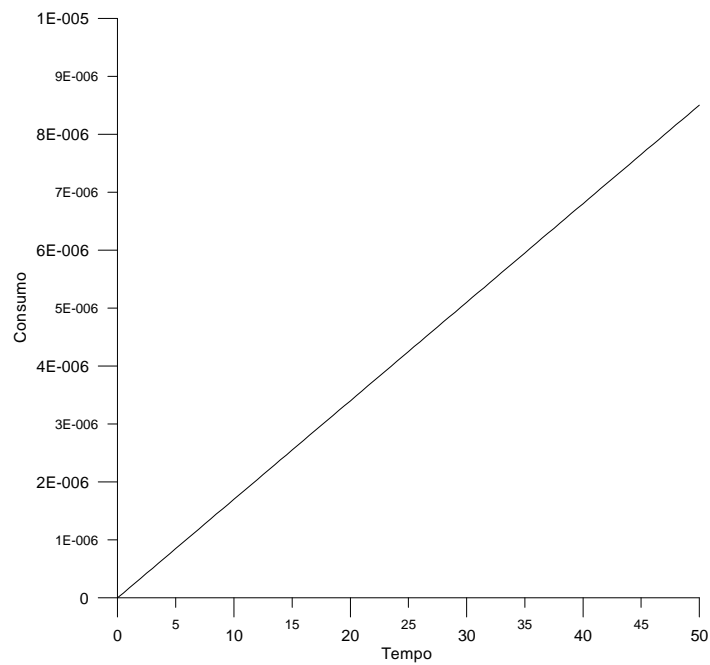


FIGURA B.20 - Evolução temporal do consumo ($e_0 = 0,6$).

B.4 – Conclusões Finais

É possível concluir dos estudos feitos nesse Apêndice que a solução analítica de primeira ordem obtida para o problema de transferências entre órbitas coplanares coaxiais diretas, quando comparada com a solução numérica, fornece uma excelente aproximação com desvios da ordem de 10^{-6} . Portanto, justifica-se a utilização desta solução para a construção das trajetórias extremas e as curvas de isoconsumo, apresentadas no Capítulo 5.

Em relação aos resultados obtidos com a comparação entre os valores médios e osciladores, verifica-se que os valores osciladores oscilam em torno dos valores médios. A amplitude das oscilações torna-se suficientemente pequenas para as manobras que envolvem muitas revoluções em torno do corpo central, tal que, nestes casos os termos periódicos podem ser negligenciados.

APÊNDICE C

RESULTADOS NUMÉRICOS PARA TRANSFERÊNCIAS ENTRE ÓRBITAS COPLANARES NÃO-COAXIAIS DIRETAS

C.1 - Introdução

Neste apêndice é feito um estudo numérico comparativo para transferências entre órbitas coplanares coaxiais diretas através de sistemas propulsivos de baixo empuxo e potência limitada em um campo de força central. A primeira parte desta análise é dedicada ao estudo comparativo numérico entre os resultados obtidos na sua forma analítica completa em primeira ordem, com os resultados obtidos por integração numérica utilizando o método de Runge-Kutta de quarta quinta ordem. Na segunda parte é apresentado um estudo comparativo entre os valores médios da excentricidade, semi-eixo maior e argumento do pericentro com sua respectiva solução periódica em primeira ordem.

C.2 – Validação Numérica

As equações de movimento são obtidas da função Hamiltoniana dada pela Equação (6.1) através do software Maple V, sendo expressas por:

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} = & \frac{a}{2\mu(1-e^2)} \left\{ 2ae(1-\cos 2\nu) \left(2ae\pi_a + (1-e^2)\pi_e \right) - 2a(1-e^2)\sin 2\nu\pi_\omega + \right. \\ & + 8a^2(1+\operatorname{ecos}\nu)^2\pi_a + 4a(1-e^2)(1+\operatorname{ecos}\nu)(\cos E + \cos\nu)\pi_e + \\ & \left. + \frac{4a}{e}(1-e^2)(1+\operatorname{ecos}\nu) \left(1 + \frac{1}{(1+\operatorname{ecos}\nu)} \right) \sin\nu\pi_\omega \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{de}{dt} = \frac{a}{2\mu(1-e^2)} & \left\{ (1 - \cos 2\nu)(2ae\pi_a + (1-e^2)\pi_e)(1-e^2) - \frac{(1-e^2)^2}{e} \text{sen} 2\nu\pi_\omega + \right. \\ & + 4a(1-e^2)(1 + \text{ecos } \nu)(\cos E + \cos \nu)\pi_a + 2(1-e^2)^2(\cos E + \cos \nu)^2\pi_e + \\ & \left. + 2\frac{(1-e^2)^2}{e}(\cos E + \cos \nu)\left(1 + \frac{1}{(1 + \text{ecos } \nu)}\right)\text{sen } \nu\pi_\omega \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{dt} = \frac{a}{2\mu(1-e^2)} & \left\{ -2a(1-e^2)\text{sen} 2\nu\pi_a - \frac{(1-e^2)^2}{e}\text{sen} 2\nu\pi_e + \frac{(1-e^2)^2}{e^2}(1 + \cos 2\nu)\pi_\omega + \right. \\ & + \frac{4a}{e}(1-e^2)(1 + \text{ecos } \nu)\left(1 + \frac{1}{(1 + \text{ecos } \nu)}\right)\text{sen } \nu\pi_a + \\ & + \frac{2(1-e^2)^2}{e}(\cos E + \cos \nu)\left(1 + \frac{1}{(1 + \text{ecos } \nu)}\right)\text{sen } \nu\pi_e + \\ & \left. + \frac{2(1-e^2)^2}{e^2}\left(1 + \frac{1}{(1 + \text{ecos } \nu)}\right)^2 \text{sen}^2 \nu\pi_\omega \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\pi_a}{dt} = \frac{a}{2\mu(1-e^2)} & \left\{ 2(1 - \cos 2\nu)(2ae\pi_a + (1-e^2)\pi_e)\pi_a - 2(1-e^2)\text{sen} 2\nu\pi_a\pi_\omega + \right. \\ & + 8a(1 + \text{ecos } \nu)^2\pi_a^2 + 4(1-e^2)(1 + \text{ecos } \nu)(\cos E + \cos \nu)\pi_a\pi_e + \\ & \left. + \frac{4(1-e^2)}{e}(1 + \text{ecos } \nu)\left(1 + \frac{1}{(1 + \text{ecos } \nu)}\right)\text{sen } \nu\pi_a\pi_\omega \right\} - \\ & - \frac{1}{2\mu(1-e^2)} \left\{ \frac{1}{2} \frac{4(1-e^2)}{e}(2ae\pi_a + (1-e^2)\pi_e)^2 - 2a(1-e^2)\text{sen} 2\nu\pi_a\pi_\omega - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{(1-e^2)}{e} \text{sen} 2\nu \pi_e \pi_\omega + \frac{1}{2} \frac{(1-e^2)^2}{e^2} (1 + \cos 2\nu) \pi_\omega^2 + 4a^2 (1 + \text{ecos } \nu)^2 \pi_a^2 + \\
& + 4a(1-e^2)(1 + \text{ecos } \nu)(\cos E + \cos \nu) \pi_a \pi_e + (1-e^2)^2 (\cos E + \cos \nu)^2 \pi_e^2 + \\
& + \frac{4a(1-e^2)}{e} (1 + \text{ecos } \nu) \left(1 + \frac{1}{(1 + \text{ecos } \nu)} \right) \text{sen } \nu \pi_a \pi_\omega + \\
& + \frac{2(1-e^2)^2}{e} (\cos E + \cos \nu) \left(1 + \frac{1}{(1 + \text{ecos } \nu)} \right) \text{sen } \nu \pi_e \pi_\omega + \\
& + \frac{(1-e^2)^2}{e^2} \left(1 + \frac{1}{(1 + \text{ecos } \nu)} \right) \text{sen}^2 \nu \pi_\omega^2 \left. \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\pi_e}{dt} &= \frac{a}{2\mu(1-e^2)} \left\{ (1 - \cos 2\nu)(2ae\pi_a + (1-e^2)\pi_e)(2a\pi_a - 2e\pi_e) + 4ae \text{sen} 2\nu \pi_a \pi_\omega + \right. \\
& + 4(1-e^2) \text{sen} 2\nu \pi_e \pi_\omega + \frac{(1-e^2)^2}{e^2} \text{sen} 2\nu \pi_e \pi_\omega - \frac{2(1-e^2)}{e} (1 + \cos 2\nu) \pi_\omega^2 - \\
& - \frac{(1-e^2)^2}{e^3} (1 + \cos 2\nu) \pi_\omega^2 + 8a^2 (1 + \text{ecos } \nu) \cos \nu \pi_a^2 - 4e(1-e^2) (\cos E + \cos \nu)^2 \pi_e^2 \\
& - 8ae(1 + \text{ecos } \nu) (\cos E + \cos \nu) \pi_a \pi_e + 4a(1-e^2) \cos \nu (\cos E + \cos \nu) \pi_a \pi_e - \\
& \times \text{sen } \nu \pi_e \pi_\omega - \frac{2(1-e^2)^2}{e^2} (\cos E + \cos \nu) \left(1 + \frac{1}{(1 + \text{ecos } \nu)} \right) \text{sen } \nu \pi_e \pi_\omega - \\
& \left. - \frac{2(1-e^2)^2}{e(1 + \text{ecos } \nu)^2} (\cos E + \cos \nu) \cos \nu \text{sen } \nu \pi_e \pi_\omega - \frac{4(1-e^2)}{e} \left(1 + \frac{1}{(1 + \text{ecos } \nu)} \right)^2 \times \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \operatorname{sen}^2 \nu \pi_\omega^2 - \frac{2(1-e^2)^2}{e^3} \left(1 + \frac{1}{(1+\operatorname{ecos}\nu)} \right)^2 \operatorname{sen}^2 \nu \pi_\omega^2 - \frac{2(1-e^2)^2}{e^2(1+\operatorname{ecos}\nu)^2} \times \\
& \times \left(1 + \frac{1}{(1+\operatorname{ecos}\nu)} \right) \operatorname{sen}^2 \nu \cos \nu \pi_\omega^2 \left\} - \frac{ae}{\mu(1-e^2)^2} \left\{ \frac{1}{2} (1-\cos 2\nu) (2ae\pi_a + (1-e^2)\pi_e)^2 - \right. \\
& - 2a(1-e^2) \operatorname{sen} 2\nu \pi_a \pi_\omega - \frac{(1-e^2)^2}{e} \operatorname{sen} 2\nu \pi_e \pi_\omega + \frac{1}{2} \frac{4(1-e^2)^2}{e^2} (1+\cos 2\nu) \pi_\omega^2 + \\
& + 4a^2(1+\operatorname{ecos}\nu)^2 \pi_a^2 + 4a(1-e^2)(1+\operatorname{ecos}\nu)(\cos E + \cos \nu) \pi_a \pi_e + \\
& + (1-e^2)^2 (\cos E + \cos \nu)^2 \pi_e^2 + \frac{4a(1-e^2)}{e} (1+\operatorname{ecos}\nu) \left(1 + \frac{1}{(1+\operatorname{ecos}\nu)} \right) \operatorname{sen} \nu \pi_a \pi_\omega + \\
& + \frac{2(1-e^2)^2}{e} (\cos E + \cos \nu) \left(1 + \frac{1}{(1+\operatorname{ecos}\nu)} \right) \operatorname{sen} \nu \pi_e \pi_\omega + \frac{(1-e^2)^2}{e^2} \times \\
& \times \left(1 + \frac{1}{(1+\operatorname{ecos}\nu)} \right)^2 \operatorname{sen}^2 \nu \pi_\omega^2 \left\} + \frac{(2+e\cos\nu)\operatorname{sen}\nu}{(1-e^2)} \left\{ -\frac{a}{2\mu(1-e^2)} [\operatorname{sen} 2\nu \times \right. \\
& \times (2ae\pi_a + (1-e^2)\pi_e)^2 - 4a(1-e^2)\cos 2\nu \pi_a \pi_\omega - \\
& - \frac{2(1-e^2)^2}{e} \cos 2\nu \pi_e \pi_\omega - \frac{(1-e^2)^2}{e^2} \operatorname{sen} 2\nu \pi_\omega^2 - 8a^2(1+e\cos\nu)e \operatorname{sen} \nu \pi_a^2 - \\
& - 4ae(1-e^2) \operatorname{sen} \nu (\cos E + \cos \nu) \pi_a \pi_e - 4a(1-e^2)(1+e\cos\nu) \operatorname{sen} \nu \pi_a \pi_e - \\
& \left. - 2(1-e^2)^2 \operatorname{sen} \nu (\cos E + \cos \nu) \pi_e^2 - 4a(1-e^2) \operatorname{sen}^2 \nu \left(1 + \frac{1}{(1+e\cos\nu)} \right) \pi_a \pi_\omega + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{4a(1-e^2)}{(1+e\cos\nu)} \text{sen}^2 \nu \pi_a \pi_\omega + \frac{4a(1-e^2)}{e} (1+e\cos\nu) \left(1 + \frac{1}{(1+e\cos\nu)} \right) \cos \nu \pi_a \pi_\omega - \\
& - \frac{2(1-e^2)^2}{e} \text{sen}^2 \nu \left(1 + \frac{1}{(1+e\cos\nu)} \right) \pi_e \pi_\omega + \frac{2(1-e^2)^2}{(1+e\cos\nu)^2} (\cos E + \cos \nu) \text{sen}^2 \nu \pi_e \pi_\omega + \\
& + \frac{2(1-e^2)^2}{e} (\cos E + \cos \nu) \left(1 + \frac{1}{(1+e\cos\nu)} \right) \cos \nu \pi_e \pi_\omega + \frac{2(1-e^2)^2}{e(1+e\cos\nu)^2} \times \\
& \times \left[\left(1 + \frac{1}{(1+e\cos\nu)} \right) \text{sen}^3 \nu \pi_\omega^2 + \frac{2(1-e^2)^2}{e^2} \left(1 + \frac{1}{(1+e\cos\nu)} \right)^2 \text{sen} \nu \cos \nu \pi_\omega^2 \right] \Bigg\} + \\
& + \frac{\text{sen} \nu}{(1-e\cos E)} - \frac{a}{2\mu(1-e^2)} \left[-4a(1-e^2)(1+e\cos\nu) \text{sen} E \pi_a \pi_e - 2(1-e^2)^2 \times \right. \\
& \left. \times (\cos E + \cos \nu) \text{sen} E \pi_e^2 - \frac{2(1-e^2)^2}{e} \text{sen} E \text{sen} \nu \left(1 + \frac{1}{(1+e\cos\nu)} \right) \text{sen} E \text{sen} \nu \pi_e \pi_\omega \right]
\end{aligned}$$

$$\frac{d\pi_\omega}{dt} = 0. \tag{C.1}$$

Com essas expressões torna-se possível fazer uma integração numérica utilizando o método de Runge-Kutta de quarta quinta ordem. Desta forma, os resultados numéricos são comparados com os resultados analíticos em primeira ordem obtidos pelo método de Hori. Estes resultados estão apresentados nas Figuras de C.1 a C.3, e mostram que os valores de semi-eixo maior, excentricidade e argumento do pericentro em função do tempo estão próximos, isto significa que a solução analítica em primeira ordem é uma boa aproximação da solução do problema de transferências entre órbitas coplanares não-coaxiais diretas, para as condições iniciais apresentadas na Tabela C.1.

TABELA C.1 – Dados de entradas para a comparação dos resultados analítico e numérico para transferências entre órbitas coplanares não-coaxiais diretas.

Constantes	Valores Utilizados
t_0	0.0
t_f	1100.
a_0	1.0
e_0	0.3
ω_0	0.0
J_0	0.0
B	0.00005
C	0.00005
$\pi_\omega = A$	0.0000008

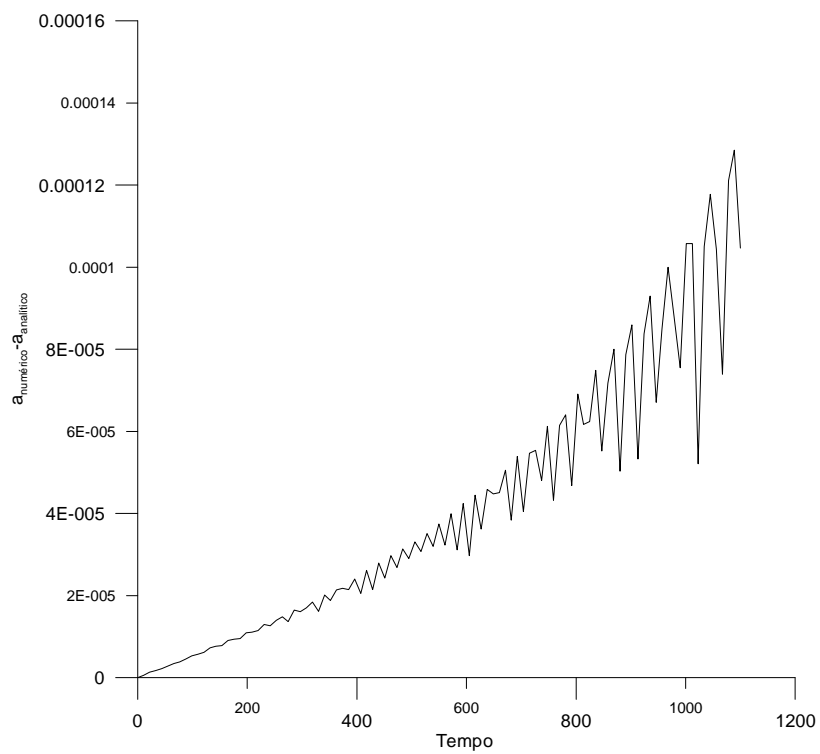
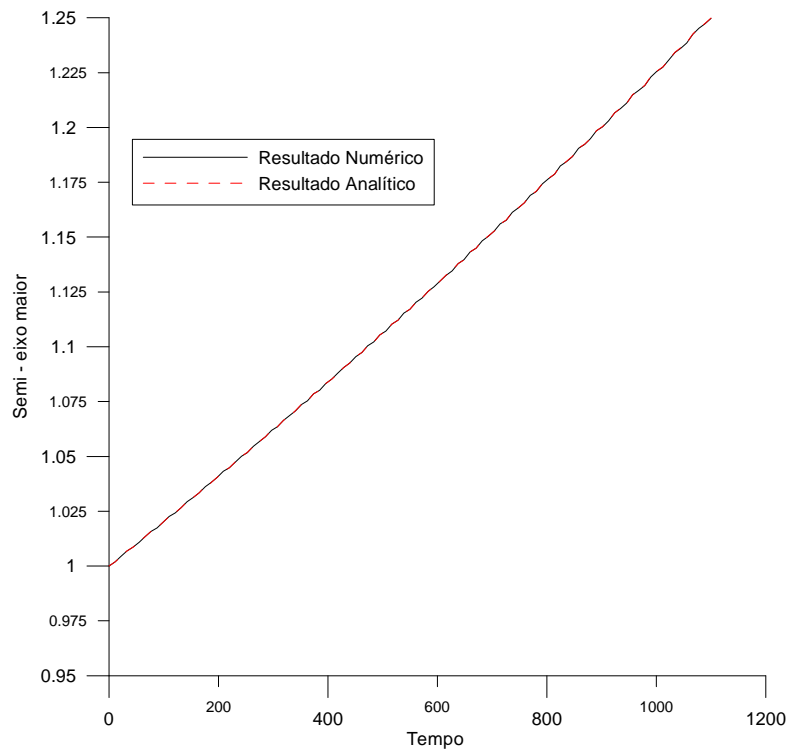


FIGURA C.1 - Semi-eixo Maior em função do tempo.

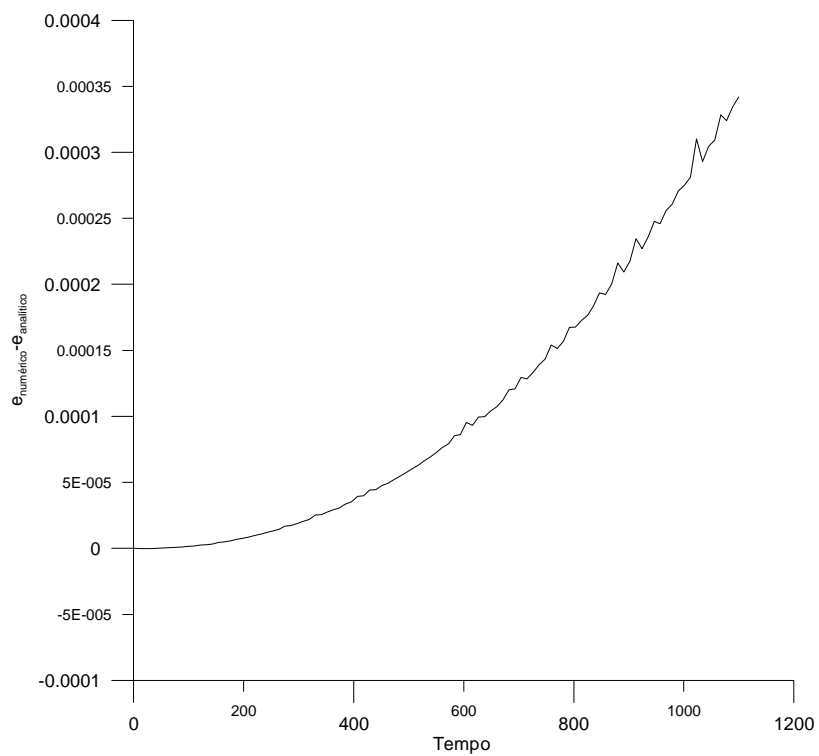
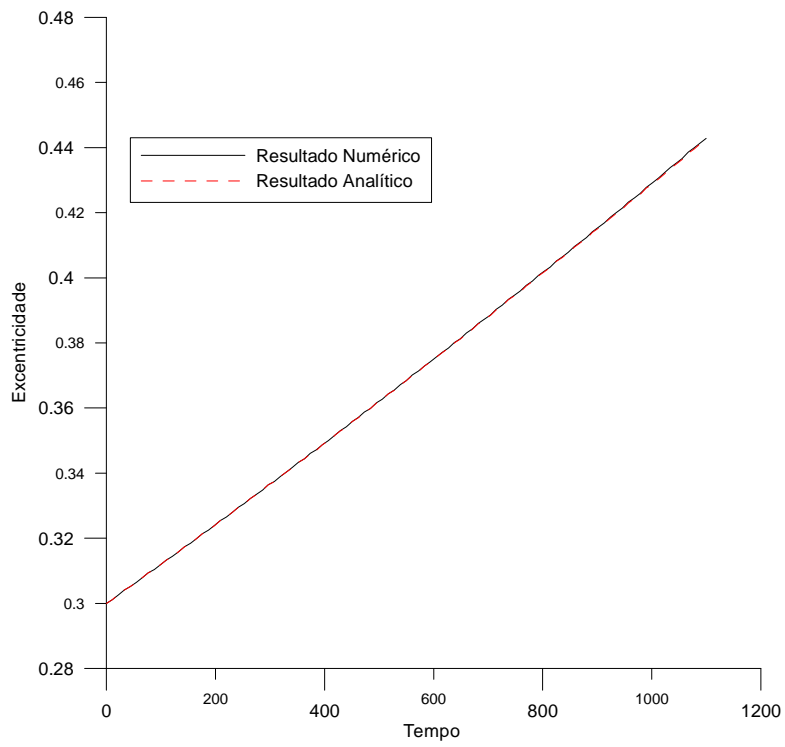


FIGURA C.2 - Excentricidade em função do tempo.

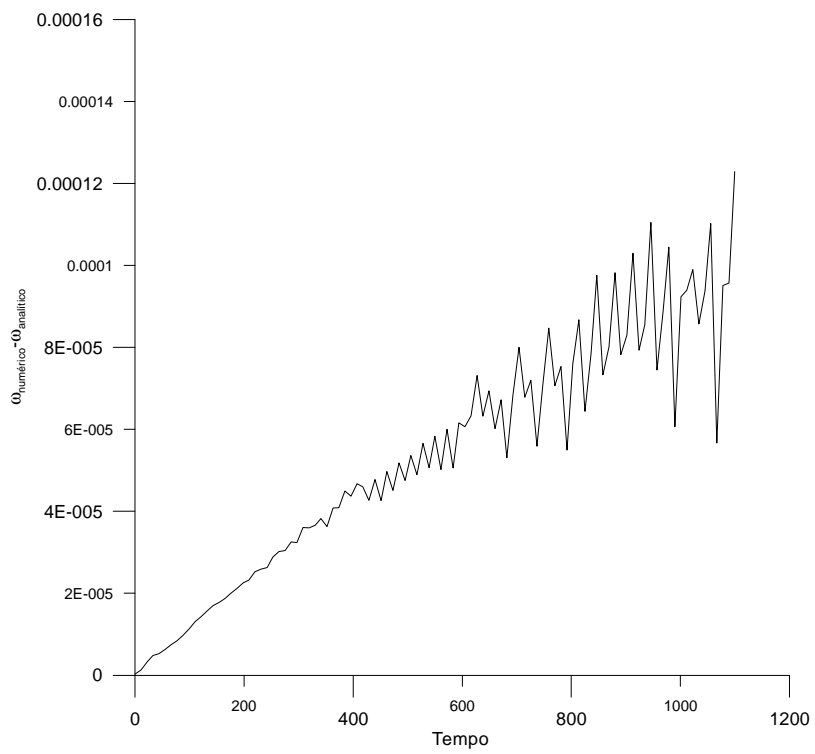
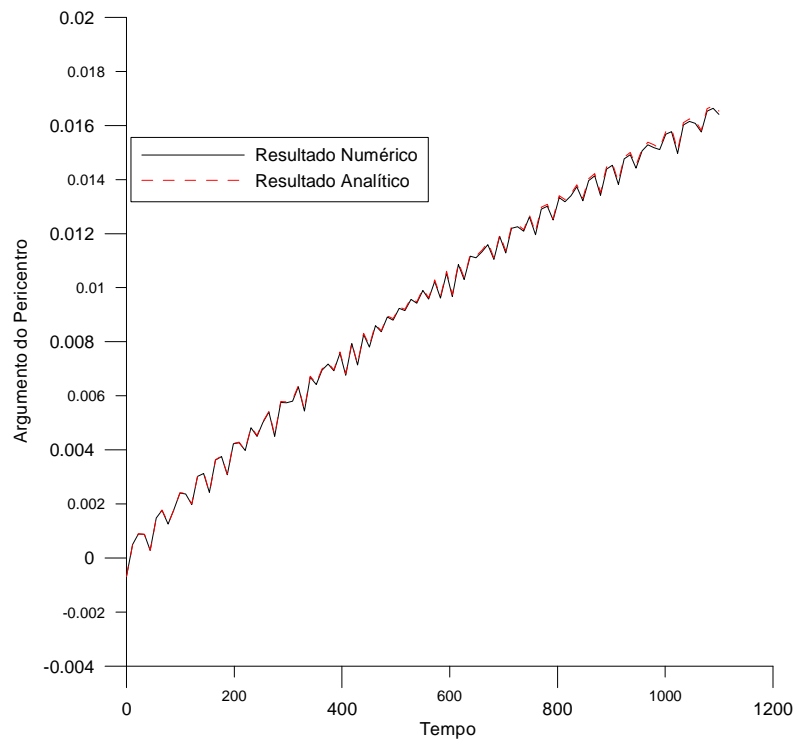


FIGURA C.3 - Argumento do Pericentro em função do tempo.

C.3 – Comparação entre os Resultados Médios e Osculadores

Para as transferências estudadas para as condições iniciais apresentadas na Tabela C.2, tem-se que os valores médios de semi-eixo maior, excentricidade e argumento do pericentro evoluem linearmente com o tempo. Nota-se também que a solução osculadora obtida em primeira ordem pelo método de Hori oscila em torno da solução média e o consumo varia linearmente no tempo. Estes resultados estão apresentados nas Figuras C.4 a C.7

TABELA C.2 – Exemplos de transferências entre órbitas coplanares não-coaxiais diretas.

Descrição da Transferência	Excentricidade Inicial	Semi-eixo Maior Inicial	Duração da Transferência	Número de Revoluções
Elíptica	$e_0 = 0,3$	$a_0 = 1$	600	96

Nas Figuras C.4 – C.7 a linha contínua representa a solução osculadora obtida pelas Equações (6.41) – (6.44), e a linha tracejada está representando a solução média, representada pelas Equações (6.38) – (6.40), para as transferências entre órbitas coplanares não-coaxiais diretas.

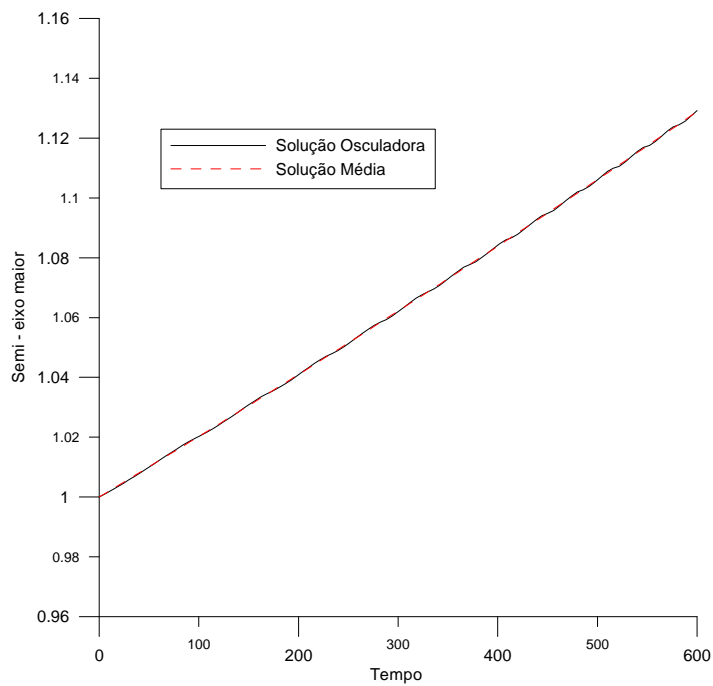


FIGURA C.4 - Comparação entre o valor médio e osculador do semi-eixo maior.

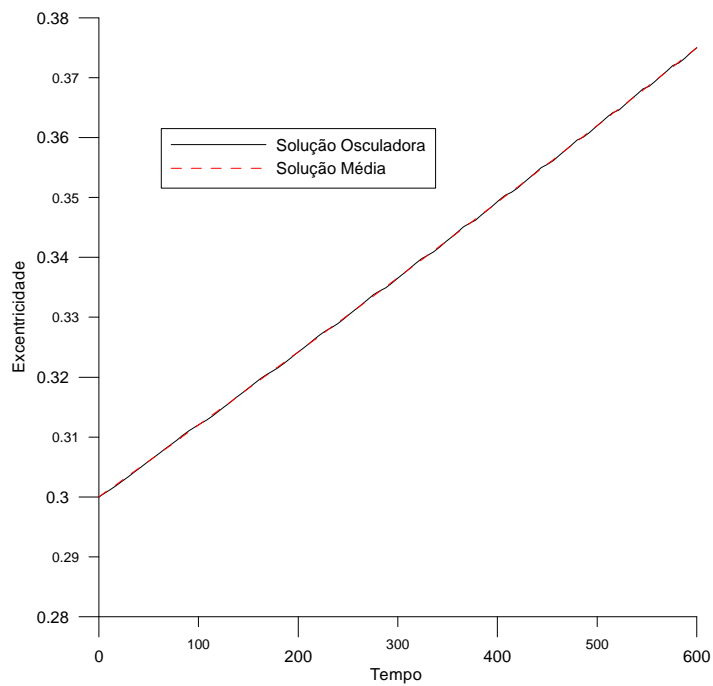


FIGURA C.5 - Comparação entre o valor médio e osculador da excentricidade.

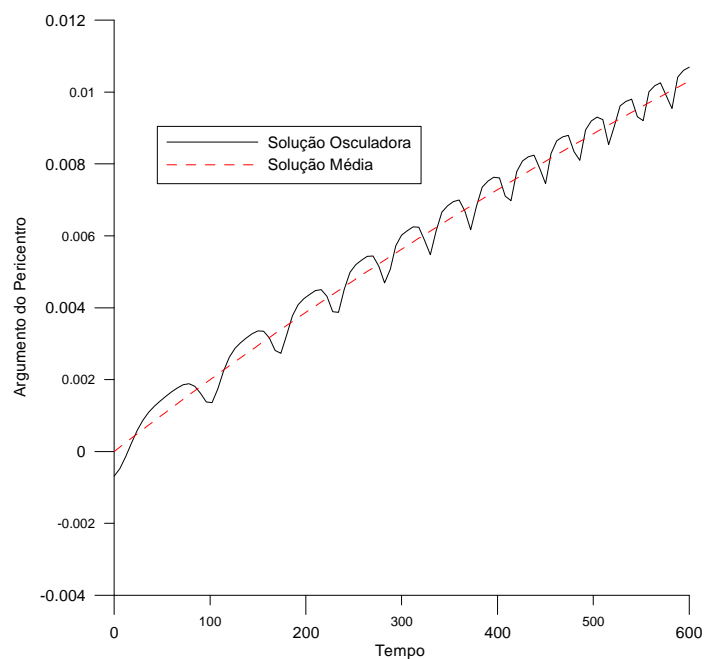


FIGURA C.6 - Comparação entre o valor médio e osculador do argumento do pericentro.

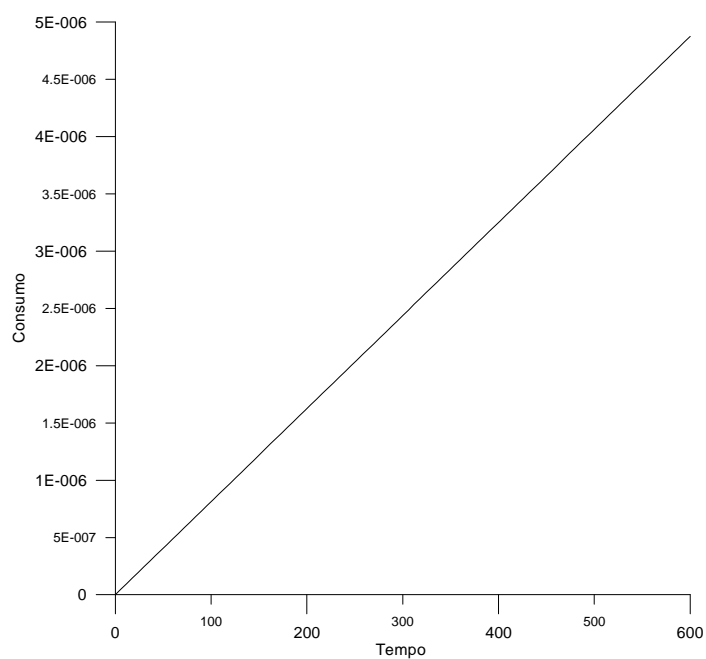


FIGURA C.7 – Evolução temporal do consumo.

C.4 – Conclusões Finais

É possível concluir dos estudos feitos nesse Apêndice que a solução analítica de primeira ordem obtida para o problema de transferências entre órbitas coplanares não-coaxiais diretas, quando comparada com a solução numérica, fornece uma excelente aproximação com desvios da ordem de 10^{-5} . Portanto, justifica-se a utilização desta solução para a construção da estrutura de um extremal, apresentadas no Capítulo 6.

Em relação aos resultados obtidos com a comparação entre os valores médios e osciladores, verifica-se que os valores osciladores oscilam em torno dos valores médios. A amplitude das oscilações torna-se suficientemente pequenas para as manobras que envolvem muitas revoluções em torno do corpo central, tal que, nestes casos os termos periódicos podem ser negligenciados.

APÊNDICE D

RESULTADOS NUMÉRICOS PARA TRANSFERÊNCIAS ENTRE ÓRBITAS NÃO-COPLANARES COAXIAIS DIRETAS

D.1 - Introdução

Neste Apêndice feito um estudo numérico comparativo para transferências entre órbitas não coplanares coaxiais diretas através de sistemas propulsivos de baixo empuxo e potência limitada em um campo de força central. A primeira parte desta análise é dedicada ao estudo comparativo numérico entre os resultados obtidos na sua forma analítica completa em primeira ordem, com os resultados obtidos por integração numérica utilizando o método de Runge-Kutta de quarta quinta ordem. Na segunda parte é apresentado um estudo comparativo entre os valores médios da excentricidade, semi-eixo maior e longitude do nodo ascendente com sua respectiva solução osculadora em primeira ordem.

D.2 – Validação Numérica

As equações de movimento são obtidas da função Hamiltoniana dada pela Equação (7.1) através do software Maple V, sendo expressas por:

$$\frac{da}{dt} = \frac{1}{2\mu} \frac{a}{(1-e^2)} \left\{ 2(1-\cos 2\nu)(2ae\pi_a + (1-e^2)\pi_e)ae + \right. \\ \left. + 8a^2(1+\cos\nu)^2\pi_a + 4a(1-e^2)(1+\cos\nu)(\cos E + \cos\nu)\pi_e \right\}$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{1}{2\mu} \frac{a}{(1-e^2)} \left\{ (1 - \cos 2\nu)(2ae\pi_a + (1-e^2)\pi_e)(1-e^2) + \right. \\ \left. + 4a(1-e^2)(1 + \operatorname{ecos}\nu)(\cos E + \cos\nu)\pi_a + 2(1-e^2)^2(\cos E + \cos\nu)^2\pi_e \right\}$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{2\mu} \frac{a}{(1-e^2)} (1 + 2e^2 - 4e \cos E + \cos 2E)\pi_\Omega$$

$$\frac{d\pi_a}{dt} = -\frac{1}{2\mu} \frac{a}{(1-e^2)} \left\{ 2(1 - \cos 2\nu)(2ae\pi_a + (1-e^2)\pi_e)e\pi_a + 8a(1 + \operatorname{ecos}\nu)^2\pi_a^2 + \right. \\ \left. + 4(1-e^2)(1 + \operatorname{ecos}\nu)(\cos E + \cos\nu)\pi_a\pi_e \right\} - \frac{1}{2\mu} \frac{1}{(1-e^2)} \left\{ \frac{1}{2}(1 - \cos 2\nu)(2ae\pi_a + \right. \\ \left. + (1-e^2)\pi_e)^2 + \frac{1}{2}(1 + 2e^2 - 4e \cos E + \cos 2E)\pi_a^2 + 4a^2(1 + \operatorname{ecos}\nu)^2\pi_a^2 + \right. \\ \left. + 4a(1-e^2)(1 + \operatorname{ecos}\nu)(\cos E + \cos\nu)\pi_a\pi_e + \right. \\ \left. + (1-e^2)^2(\cos E + \cos\nu)^2\pi_e^2 \right\}$$

$$\frac{d\pi_e}{dt} = -\frac{1}{2\mu} \frac{a}{(1-e^2)} \left\{ (1 - \cos 2\nu)(2ae\pi_a + (1-e^2)\pi_e)(2a\pi_a - 2e\pi_e) + \frac{1}{2}(4e - 4 \cos E)\pi_a^2 \right. \\ \left. + 8a^2(1 + \operatorname{ecos}\nu)\cos\nu\pi_a^2 - 8ae(1 + \operatorname{ecos}\nu)(\cos E + \cos\nu)\pi_a\pi_e + \right. \\ \left. + 4a(1-e^2)\cos\nu(\cos E + \cos\nu)\pi_a\pi_e - 4e(1-e^2)(\cos E + \cos\nu)^2\pi_e^2 \right\} - \\ - \frac{ae}{\mu(1-e^2)^2} \left\{ \frac{1}{2}(1 - \cos 2\nu)(2ae\pi_a + (1-e^2)\pi_e)^2 + 4a^2(1 + \operatorname{ecos}\nu)^2\pi_a^2 + \right.$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}(1+2e^2-4e\cos E+\cos 2E)\pi_i^2+4a^2(1+e\cos\nu)^2\pi_a^2+ \\
& +4a(1-e^2)(1+e\cos\nu)(\cos E+\cos\nu)\pi_a\pi_e+(1-e^2)^2(\cos E+\cos\nu)^2\pi_e^2\}+ \\
& -\frac{a}{2(1-e^2)}\left[\sin 2\nu(2ae\pi_a+(1-e^2)\pi_e)^2-8a^2e(1+e\cos\nu)\sin\nu\pi_a^2- \right. \\
& -4a(1-e^2)(\cos E+\cos\nu)e\sin\nu\pi_a\pi_e-4a(1-e^2)(1+e\cos\nu)\sin\nu\pi_a\pi_e- \\
& \left.-2(1-e^2)^2(\cos E+\cos\nu)\sin\nu\pi_e^2\left(\frac{(2+e\cos\nu)\sin\nu}{(1-e^2)}\right)\right]+ \\
& -\frac{a}{2\mu(1-e^2)}\left[\frac{1}{2}(4e\sin E-2\sin 2E)\pi_i^2-4a(1-e^2)(1+e\cos\nu)\sin E\pi_a\pi_e- \right. \\
& \left.-2(1-e^2)^2(\cos E+\cos\nu)\sin E\pi_e^2\left[\frac{\sin\nu}{(1-e\cos E)}\right]\right] \\
& \frac{d\pi_\Omega}{dt}=0 \tag{D.1}
\end{aligned}$$

Com essas expressões torna-se possível fazer uma integração numérica utilizando o método de Runge-Kutta de quarta quinta ordem. Desta forma, os resultados numéricos são comparados com os resultados analíticos em primeira ordem obtidos pelo método de Hori. Estes resultados estão apresentados nas Figuras de D.1 a D.3, e mostram que os valores de semi-eixo maior, excentricidade e argumento do pericentro em função do tempo, estão próximos, isto significa que a solução analítica em primeira ordem é uma boa aproximação da solução do problema de transferências entre órbitas não-coplanares coaxiais diretas, para as condições iniciais apresentadas na Tabela D.1.

TABELA D.1 – Dados de entradas para a comparação dos resultados analítico e numérico para transferências entre órbitas não-coplanares coaxiais diretas.

Constantes	Valores Utilizados
t_0	0.0
t_f	500
a_0	1.0
e_0	0.3
ω_0	0.0
J_0	0.0
B	0.00005
C	0.00005
$\pi_\Omega = A$	0.0000008

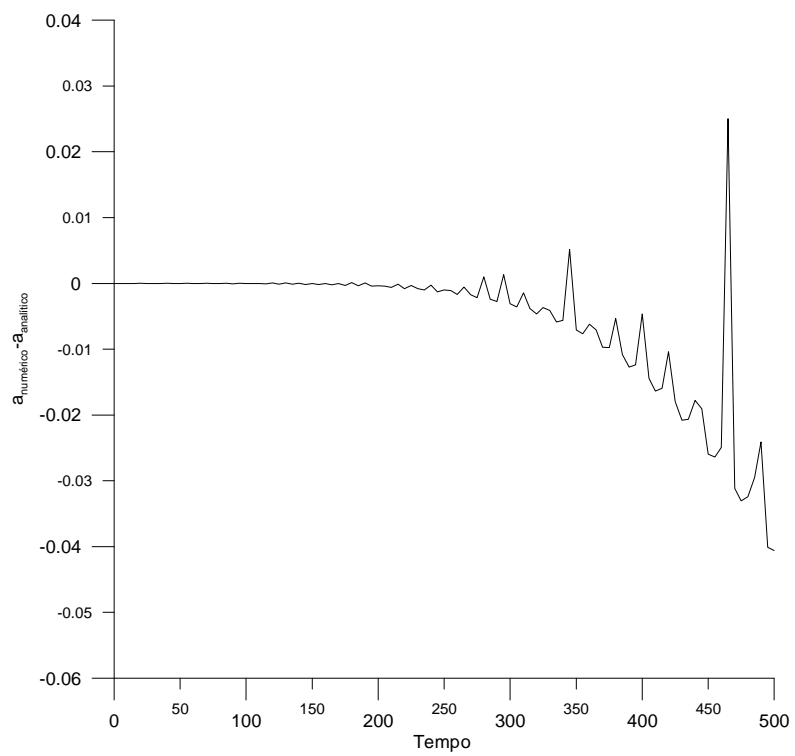
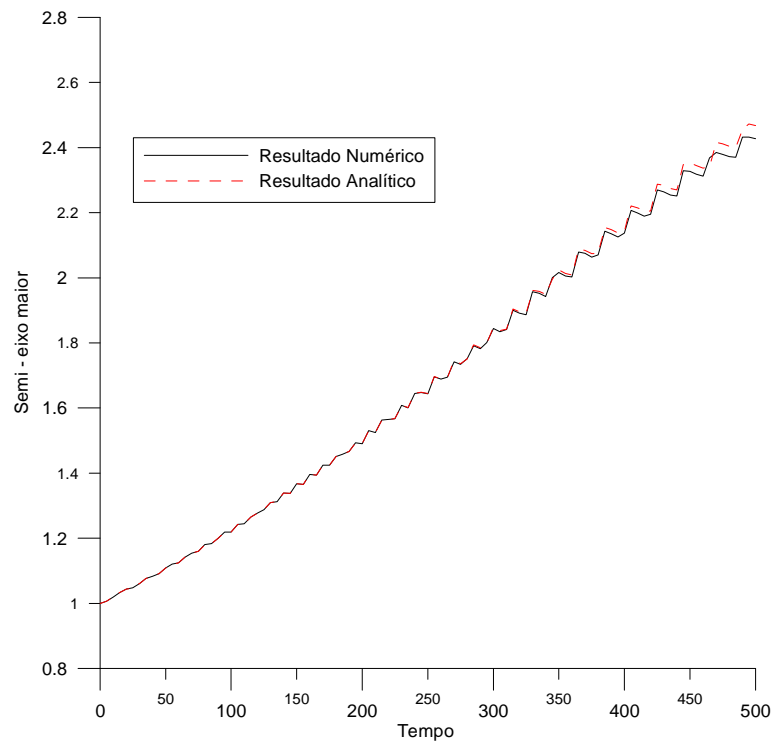


FIGURA D.1 - Semi-eixo maior em função do tempo.

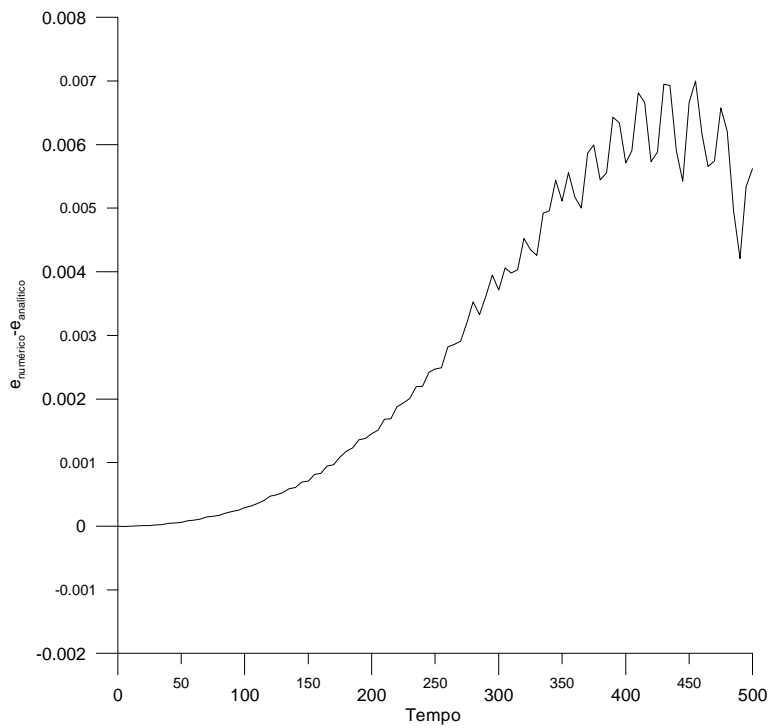
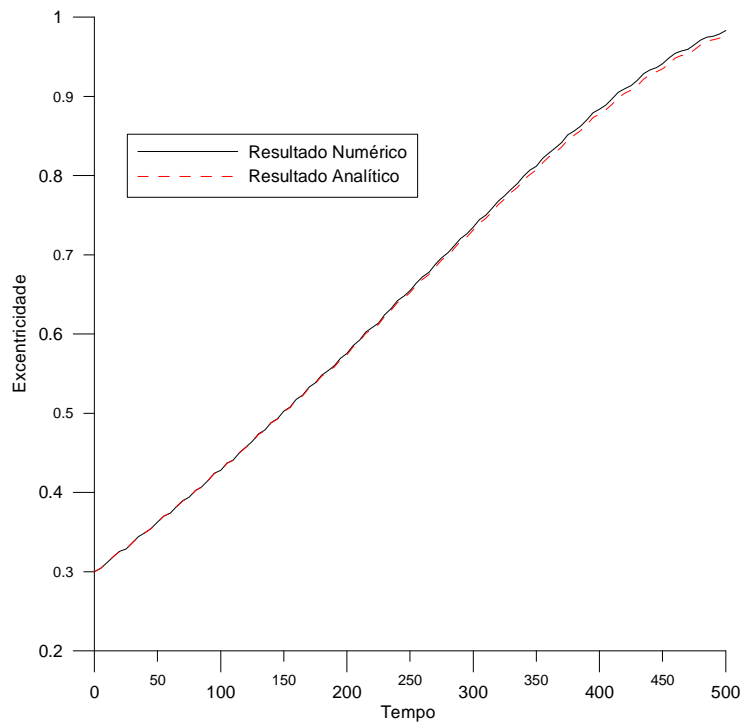


FIGURA D.2 - Excentricidade em função do tempo.

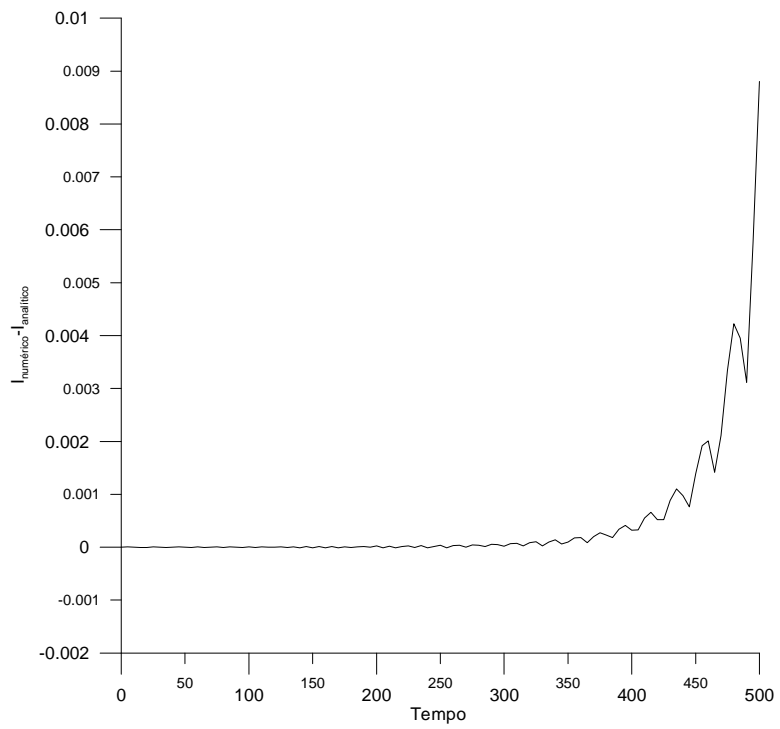
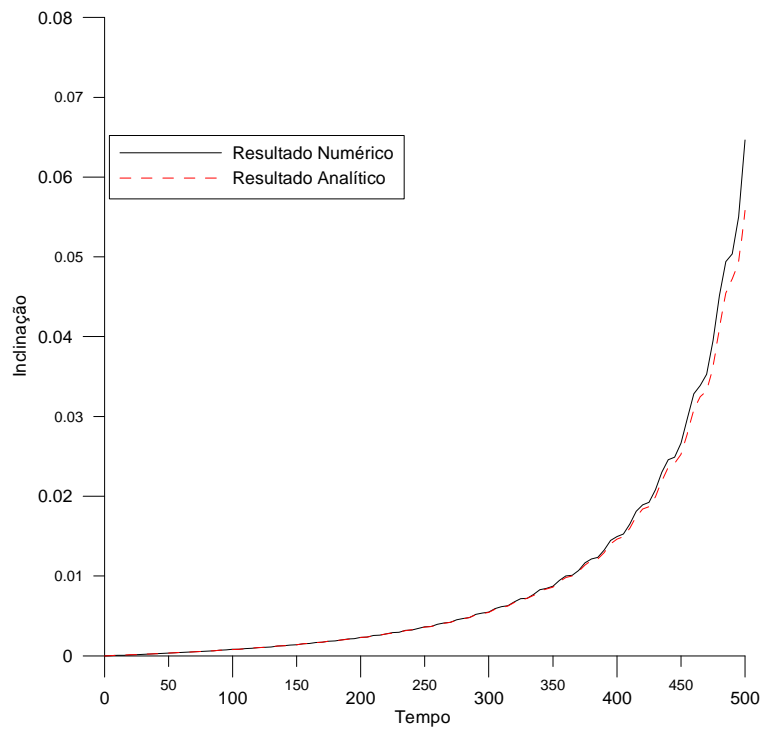


FIGURA D.3 - Inclinação em função do tempo.

D.3 – Comparação entre Resultados Médios e Osculadores

Para as transferências estudadas com condições iniciais apresentadas na Tabela D.2, tem-se que os valores médios do semi-eixo maior, excentricidade e longitude do nodo ascendente evoluem linearmente com o tempo. E, que a solução osculadora obtida em primeira ordem pelo método de Hori oscila em torno da solução média e o consumo varia linearmente no tempo. Estes resultados estão apresentados nas Figuras D.4 a D.7.

TABELA D.2 – Exemplos de transferências entre órbitas não-coplanares coaxiais diretas.

Descrição da Transferência	Excentricidade Inicial	Semi-eixo Maior Inicial	Duração da Transferência	Número de Revoluções
Elíptica	$e_0 = 0,3$	$a_0 = 1$	200	32

Nas Figuras D.4 – D.7 a linha contínua representa a solução osculadora, expressa pelas Equações (7.14) – (7.15), e a linha tracejada está representando a solução média, expressa pelas Equações (7.10) – (7.13), para as transferências entre órbitas não-coplanares coaxiais diretas.

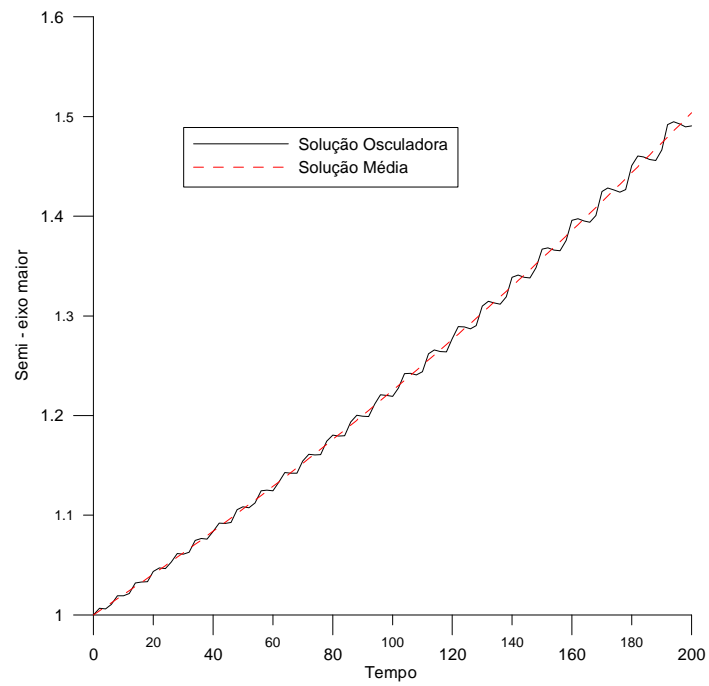


FIGURA D.4 - Comparação entre o valor médio e osculador do semi-eixo maior.

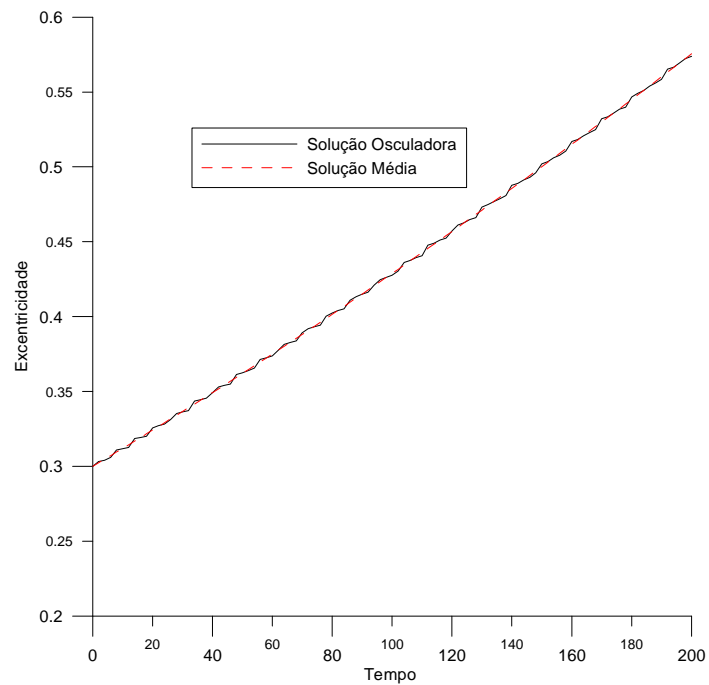


FIGURA D.5 - Comparação entre o valor médio e osculador da excentricidade.

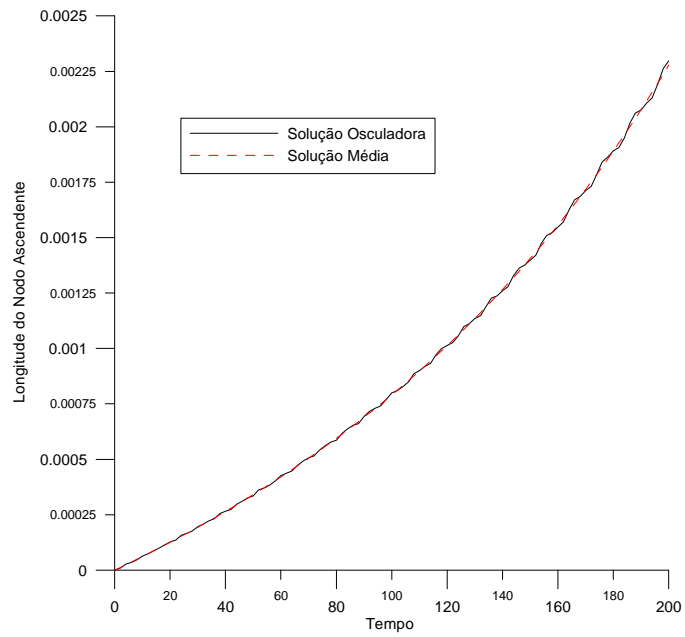


FIGURA D.6 - Comparação entre o valor médio e osculador da longitude do nodo ascendente.

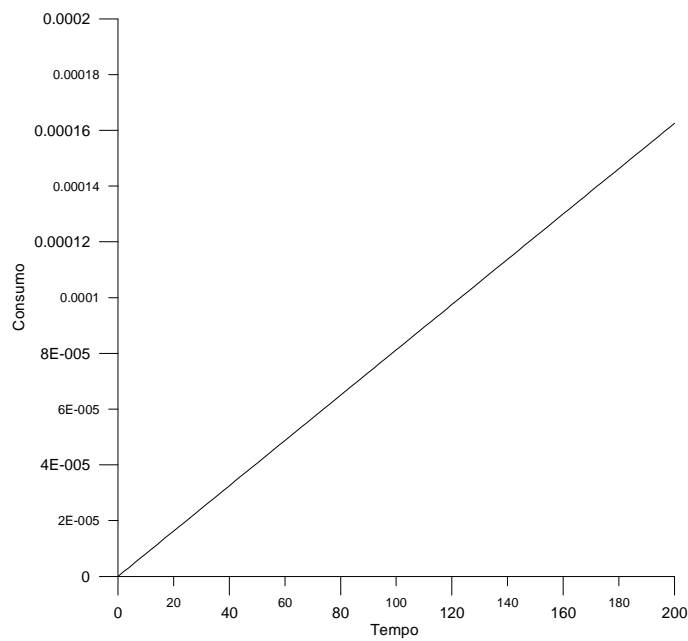


FIGURA D.7 – Evolução temporal do consumo.

D.4 – Conclusões Finais

É possível concluir dos estudos feitos nesse Apêndice que a solução analítica de primeira ordem obtida para o problema de transferências entre órbitas coplanares não-coaxiais diretas, quando comparada com a solução numérica, fornece uma excelente aproximação com desvios da ordem de 10^{-3} . Portanto, justifica-se a utilização desta solução para a construção da estrutura de um extremal, apresentadas no Capítulo 7.

Em relação aos resultados obtidos com a comparação entre os valores médios e osciladores, verifica-se que os valores osciladores oscilam em torno dos valores médios. A amplitude das oscilações torna-se suficientemente pequenas para as manobras que envolvem muitas revoluções em torno do corpo central, tal que, nestes casos os termos periódicos podem ser negligenciados.