



Ministério da  
Ciência e Tecnologia



INPE-15676-TDI/1450

## ANÁLISE ESPECTRAL DE PADRÕES-GRADIENTE DE SÉRIES TEMPORAIS CURTAS

Murilo da Silva Dantas

Dissertação de Mestrado do Curso de Pós-Graduação em Computação Aplicada,  
orientada pelo Dr. Reinaldo Roberto Rosa, aprovada em 15 de dezembro de 2008.

Registro do documento original:

<<http://urlib.net/sid.inpe.br/mtc-m18@80/2009/02.05.10.55>>

INPE  
São José dos Campos  
2009

## **PUBLICADO POR:**

Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE

Gabinete do Diretor (GB)

Serviço de Informação e Documentação (SID)

Caixa Postal 515 - CEP 12.245-970

São José dos Campos - SP - Brasil

Tel.:(012) 3945-6911/6923

Fax: (012) 3945-6919

E-mail: [pubtc@sid.inpe.br](mailto:pubtc@sid.inpe.br)

## **CONSELHO DE EDITORAÇÃO:**

### **Presidente:**

Dr. Gerald Jean Francis Banon - Coordenação Observação da Terra (OBT)

### **Membros:**

Dr<sup>a</sup> Maria do Carmo de Andrade Nono - Conselho de Pós-Graduação

Dr. Haroldo Fraga de Campos Velho - Centro de Tecnologias Especiais (CTE)

Dr<sup>a</sup> Inez Staciarini Batista - Coordenação Ciências Espaciais e Atmosféricas (CEA)

Marciana Leite Ribeiro - Serviço de Informação e Documentação (SID)

Dr. Ralf Gielow - Centro de Previsão de Tempo e Estudos Climáticos (CPT)

Dr. Wilson Yamaguti - Coordenação Engenharia e Tecnologia Espacial (ETE)

## **BIBLIOTECA DIGITAL:**

Dr. Gerald Jean Francis Banon - Coordenação de Observação da Terra (OBT)

Marciana Leite Ribeiro - Serviço de Informação e Documentação (SID)

Jefferson Andrade Ancelmo - Serviço de Informação e Documentação (SID)

Simone A. Del-Ducca Barbedo - Serviço de Informação e Documentação (SID)

## **REVISÃO E NORMALIZAÇÃO DOCUMENTÁRIA:**

Marciana Leite Ribeiro - Serviço de Informação e Documentação (SID)

Marilúcia Santos Melo Cid - Serviço de Informação e Documentação (SID)

Yolanda Ribeiro da Silva Souza - Serviço de Informação e Documentação (SID)

## **EDITORAÇÃO ELETRÔNICA:**

Viveca Sant´Ana Lemos - Serviço de Informação e Documentação (SID)



Ministério da  
Ciência e Tecnologia



INPE-15676-TDI/1450

## ANÁLISE ESPECTRAL DE PADRÕES-GRADIENTE DE SÉRIES TEMPORAIS CURTAS

Murilo da Silva Dantas

Dissertação de Mestrado do Curso de Pós-Graduação em Computação Aplicada,  
orientada pelo Dr. Reinaldo Roberto Rosa, aprovada em 15 de dezembro de 2008.

Registro do documento original:

<<http://urlib.net/sid.inpe.br/mtc-m18@80/2009/02.05.10.55>>

INPE  
São José dos Campos  
2009

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

---

Dantas, Murilo da Silva.

D235a      Análise espectral de padrões-gradiente de séries temporais curtas / Murilo da Silva Dantas. – São José dos Campos : INPE, 2009. 157p. ; (INPE-15676-TDI/1450)

Dissertação (Computação Aplicada) – Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 2008.

Orientador : Dr. Reinaldo Roberto Rosa.

1. Séries temporais curtas. 2. Análise de ondeletas. 3. Análise de padrões gradiente. 4. Análise de Fourier. 5. Processamento de sinais. I.Título.

CDU 551.524.4

---

Copyright © 2009 do MCT/INPE. Nenhuma parte desta publicação pode ser reproduzida, armazenada em um sistema de recuperação, ou transmitida sob qualquer forma ou por qualquer meio, eletrônico, mecânico, fotográfico, reprográfico, de microfilmagem ou outros, sem a permissão escrita do INPE, com exceção de qualquer material fornecido especificamente com o propósito de ser entrado e executado num sistema computacional, para o uso exclusivo do leitor da obra.

Copyright © 2009 by MCT/INPE. No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted in any form or by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording, microfilming, or otherwise, without written permission from INPE, with the exception of any material supplied specifically for the purpose of being entered and executed on a computer system, for exclusive use of the reader of the work.

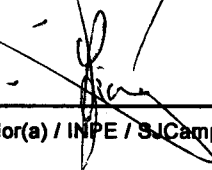
Aprovado (a) pela Banca Examinadora  
em cumprimento ao requisito exigido para  
obtenção do Título de Mestre em  
Computação Aplicada

Dr. José Demisio Simões da Silva



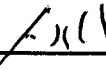
Presidente / INPE / SJC Campos - SP

Dr. Reinaldo Roberto Rosa



Orientador(a) / INPE / SJC Campos - SP

Dr. José Luiz Stech



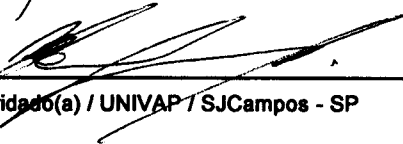
Membro da Banca / INPE / SJC Campos - SP

Dra. Débora Fernandes Calheiros



Convidado(a) / EMBRAPA / Pantanal - MS

Dr. Mauricio José Alves Bolzan



Convidado(a) / UNIVAP / SJC Campos - SP

Aluno (a): Murilo da Silva Dantas

São José dos Campos, 15 de dezembro de 2008

*“O mais difícil é não fazer nada.”*

*Provérbio judeu*



*A Kéo, Vadinho, Maro, Tuca e Teco.*





## **AGRADECIMENTOS**

Em primeiro lugar quero agradecer a Deus, meu grande amigo e razão de minha inspiração. Obrigado pela amizade diária tão boa. Desejo que todos a descubram!

Agradeço em especial à minha esposa, Kéola, pelo amor, amizade e compreensão de sempre. Se não fosse seu incentivo, teria sido muito mais difícil!

Expresso minha gratidão à minha família: meus pais, Lourival e Marli, por tanta dedicação; a meus irmãos, Arthur e Diêgo, pelo companheirismo e por tantos momentos felizes; meus sogros Cleones e Lucinéia, pelos conselhos; a meus parentes; e em especial a meu tio Valdir e sua linda família, por ter me acolhido com tanto carinho aqui nestas terras.

Agradeço também às seguintes pessoas:

Ao meu orientador Dr. Reinaldo Roberto Rosa, pelos ensinamentos, além da confiança em meu trabalho. Muitos momentos de trabalho se tornaram mais divertidos e produtivos graças ao seu talento! Valeu “meu rei”;

Aos professores: Dr. Maurício Bolzan, Dra. Margarete, Dra. Débora Calheiros, Dr. José Barroso, Dr. Vijaykumar, Dr. José Becceneri, Dr. José Demísio, Dr. Arcilan e Dr. Hauser, pelos dados e explicações;

Aos professores da CAP pelos ensinamentos e pelas conversas que geraram boas idéias;

Aos colegas da CAP, em especial a Mariana, Juliana (especial++), Laurita, Rudinei, Sóstenes, Plínio, Flávia, Thalita, Andriana e Júlio, pela amizade, conversas (im)produtivas e ajuda;

Às secretárias e assistentes da CAP e LAC, em especial, Neusa, Cláudia e Cristina.

Aos grandes amigos baianos e aos que fiz aqui: Harrison, D'ajuda, tia Amiracy, Lília Marta, Raimundo Simões, Yan, Jônatas, Fabinho e meu PG na PIB;

Aos amigos da FATEC-SJC, em especial a Wellington, Valter, Isa e Anna pelos incentivos constantes; e

À Banca Examinadora pelas sugestões e comentários relacionados a este trabalho.

## RESUMO

Com a modernização da tecnologia para coleta de dados, na forma de séries temporais, novos desafios metodológicos, para análise e interpretação dos padrões de variabilidade medidos, são crescentes. Em geral, desafios analíticos e interpretativos ocorrem devido aos diversos problemas de coleta de dados, quando sujeitos às variações extremas no meio ambiente, envio e recebimento de dados por satélite e problemas inerentemente instrumentais. Grande parte das séries temporais coletadas, a partir de experimentos em sistemas naturais, resulta em conjuntos de séries parciais curtas compostas por poucos pontos, comprometendo assim a qualidade das análises estatísticas convencionais. Neste contexto, este projeto de mestrado teve como principal objetivo desenvolver, testar e validar uma nova metodologia computacional para análise de séries temporais curtas, principalmente aquelas que apresentam comportamento não-linear nos domínios do tempo, da amplitude e da frequência. Esta nova metodologia, denominada Análise Espectral Gradiente (GSA, do inglês *Gradient Spectral Analysis*) conjuga duas técnicas matemáticas, conhecidas como Análise de Padrões-Gradiente (GPA, do inglês *Gradient Pattern Analysis*) e Análise Multiresolução por Wavelets (WMA, do inglês *Wavelet Multiresolution Analysis*). A GSA propõe, primeiramente, classificar diferentes regimes não-lineares a partir da análise de pequenas amostras de séries temporais geradas a partir de processos dinâmicos previamente conhecidos associados a modelos caóticos e estocásticos. Como estudos de caso, testamos o desempenho da GSA na classificação de séries temporais curtas oriundas do meio ambiente: (i) dados de reservatórios aquáticos fornecidos por Furnas Centrais Elétricas S.A.; e (ii) dados de inundação na região do Pantanal fornecidos pela NASA (EUA) a partir do Satélite Nimbus-7 pelo radiômetro SMMR e gentilmente cedidos por S. K. Hamilton (*Michigan State University/EUA*) – HAMILTON, 1996. Os resultados, em ambos os casos, indicam que a metodologia pode ser robusta em futuras aplicações de classificação e monitoramento das variáveis físicas e limnológicas medidas.



## **GRADIENT SPECTRAL ANALYSIS FOR SHORT TIME SERIES**

### **ABSTRACT**

With the modernization of data collecting technology, in the time series format, new methodological challenges, for analyzing and interpreting variability patterns, have been growing. In general, such challenges are due to several collecting data problems when they are under extreme environmental variations, data satellite transmission and other inherent instrumental problems. Most of the time series collected, from natural systems, result in partial data set having only few points, thus compromising the performance of usual statistical analysis. In this context, this project had as a main goal to develop, to test and to validate a new computational methodology for short time series analysis, mainly the ones showing non-linear behavior in the time, amplitude and frequency domains. This new methodology, called Gradient Spectral Analysis (GSA) conjugates two mathematical techniques, the so-called Gradient Pattern Analysis (GPA) and the Wavelet Multiresolution Analysis (WMA). The GSA proposes, then, the classification of different non-linear regimes taking into account short samples of time series generated from dynamical processes previously associated to chaotic and stochastic models. As case studies, we test the GSA performance on classification of short times series from the environment: (i) data of water reservoirs provided by Furnas Centrais Elétricas S.A., and (ii) data of flooding in the Pantanal provided by NASA (USA) from the Nimbus-7 Satellite by SMMR radiometer and kindly provided by S. K. Hamilton (Michigan State University / USA) – HAMILTON, 1996. The results, in both cases, indicate that the methodology can be robust in future applications for the classification and monitoring of physical and limnological measures.



## SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO .....	25
1.1	Problemas em dados ambientais .....	26
1.1.1	Tamanho da série.....	26
1.1.2	Processos não-estacionários.....	28
1.2	Métodos convencionais e alternativos na análise de séries temporais .....	32
1.2.1	Espectro de Potências.....	33
1.3	Objetivo .....	39
1.4	Organização da dissertação .....	39
2	DADOS ANALISADOS .....	41
2.1	Séries canônicas .....	41
2.1.1	Padrões caóticos .....	41
2.1.2	Padrões estocásticos.....	46
2.2	Séries ambientais .....	51
2.2.1	Monitoramento ambiental – Furnas .....	51
2.2.2	Padrões de inundação no Pantanal.....	55
3	ASPECTOS GERAIS DAS TÉCNICAS UTILIZADAS.....	61
3.1	Introdução às <i>Wavelets</i> .....	61
3.1.1	Breve contexto histórico e evolução .....	61
3.1.2	Propriedades .....	70
3.1.3	Análise <i>Wavelet</i> .....	72
3.1.4	Dilatação binária e translação diádica .....	75
3.1.5	Obtenção da Transformada de <i>Wavelet</i> de uma ST .....	76
3.1.6	Transformada Contínua de <i>Wavelet</i> .....	78
3.1.7	Transformada Discreta de <i>Wavelet</i> .....	79
3.2	Análise de Multirresolução por <i>Wavelets</i> (WMA).....	81
3.2.1	Decomposição multi-nível.....	86
3.2.2	Reconstrução multi-nível .....	90
3.3	Análise de Padrões-Gradiente (GPA) para ST .....	95
3.3.1	Coeficiente de Assimetria Gradiente .....	98
4	ANÁLISE ESPECTRAL GRADIENTE .....	103
4.1	Metodologia GSA .....	103
4.1.1	Escala Máxima de Coerência .....	103
4.1.2	Representação multirresolução da ST.....	106
4.1.3	Coeficiente de Assimetria .....	109
4.1.4	Espectro-Gradiente.....	111
4.2	Algoritmo GSA.....	115
4.3	Ambiente computacional .....	116



5	RESULTADOS E INTERPRETAÇÕES .....	117
5.1	Séries canônicas .....	117
5.2	Séries ambientais .....	131
5.2.1	Caracterização de reservatórios de Furnas.....	131
5.2.2	Análise de padrões de inundação no Pantanal .....	142
6	CONCLUSÃO.....	145
6.1	Trabalhos futuros.....	146
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	149

## LISTA DE FIGURAS

1.1 – Exemplo de série temporal com descontinuidades. ....	26
1.2 – Exemplo de série: (a) estacionária; e (b) não-estacionária. ....	28
1.3 – Esquema de uma ST com antipersistência. ....	31
1.4 – Esquema de uma ST com persistência. ....	31
1.5 – Exemplo de ST curta estocástica. ....	33
1.6 – Obtenção do Espectro de Potências de uma ST. ....	36
1.7 – Relação entre o tamanho da série e o valor de $\langle \alpha \rangle$ . ....	37
1.8 – Erros no cálculo de $\alpha$ . Para ST menores, $\alpha$ com maior variação. ....	38
1.9 – $P(\omega)$ : série com $N = 2^{17}$ pontos: $\alpha = -1,68$ . ....	38
1.10 – $P(\omega)$ : série com $N = 2^8$ pontos: $\alpha = -2,86$ . ....	39
2.1 – ST curta do Modelo de Lorenz: (a) 1024 pontos e (b) 150 pontos. ....	43
2.2 – ST curta do Mapa de Hénon: (a) 1024 pontos e (b) 150 pontos. ....	45
2.3 – ST curta do Mapa Logístico: (a) 1024 pontos e (b) 150 pontos. ....	46
2.4 – Exemplo de ST curta estocástica: $P(\omega) \sim \omega^{-3/2}$ . ....	48
2.5 – ST curta com padrão fBm $\omega^{-3/2}$ : (a) 1024 pontos e (b) 150 pontos. ....	50
2.6 – ST curta com padrão fBm $\omega^{-5/3}$ : (a) 1024 pontos e (b) 150 pontos. ....	50
2.7 – ST curta com padrão fBm $\omega^{-2}$ : (a) 1024 pontos e (b) 150 pontos. ....	51
2.8 – SIMA instalado no reservatório de Serra da Mesa. ....	52
2.9 – Localização dos sistemas aquáticos analisados pela GSA. ....	53
2.10 – Variação diária da pressão atmosférica média (hPa) no Lago Curuai. ....	54
2.11 – Área do Pantanal no Brasil e na América do Sul. ....	57
2.12 – Padrão de inundação na bacia da sub-região de Aquidauana. ....	58
2.13 – Média mensal de chuvas em Corumbá-MS (barras cheias) e média mensal do nível de água do rio Paraguai (barras abertas), na régua de Ladário-MS, evidenciando a defasagem entre o pico de cheias e o período de chuvas. ....	58
3.1 – Comparação entre espectros de Fourier de duas ST diferentes: (a) ST da Equação 3.2; (c) ST da Equação 3.3; (b) e (d) espectros de Fourier respectivos. ....	65
3.2 – Análise local no tempo com o uso das janelas. ....	66
3.3 – Análise espectral com Banco de Filtros: (a) Banda Passante Constante (STFT) e (b) Banda Passante Relativa Constante ( <i>wavelet</i> ). ....	67
3.4 – Esquema de um plano tempo x freqüência: (a) variações proporcionais dos intervalos de tempo e de freqüência; (b) dilatação de uma função <i>wavelet</i> nos respectivos intervalos. ....	71
3.5 – Resolução no plano tempo-freqüência pela análise: (a) Transformada de Gabor (STFT); e Transformada de <i>Wavelet</i> . ....	72
3.6 – Exemplo de compressão da <i>wavelet</i> de Haar: (a) $a=1$ ; (b) $a=1/2$ e (c) $a=1/4$ . ....	74

3.7 – Exemplo de translação da <i>wavelet</i> de Haar: (a) $b = 1/4$ e (b) $b = 1/2$ .	75
3.8 – Análise <i>wavelet</i> em uma seção de uma ST.	76
3.9 – Análise <i>wavelet</i> em outra seção de uma ST.	77
3.10 – Análise <i>wavelet</i> na seção inicial da ST, mas em outra escala.	77
3.11 – Subespaços $V$ (função escala) aninhados e subespaços $W$ (função <i>wavelet</i> ) disjuntos.	85
3.12 – Processo de filtragem, através do qual são escolhidas as frequências a serem filtradas.	86
3.13 – Processo de filtragem associado à decimação, onde os componentes de baixa ou alta frequência possuem metade do tamanho da série original.	87
3.14 – Processo de filtragem associado à decimação de uma ST.	88
3.15 – Exemplo da aplicação da DWT em uma ST real.	88
3.16 – Decomposição em sub-bandas.	89
3.17 – Esquema da árvore de decomposição <i>wavelet</i> multi-nível de uma ST.	90
3.18 – Esquema de reconstrução do sinal.	91
3.19 – Processo inverso ao do <i>downsampling</i> : <i>upsampling</i> , fator 2.	91
3.20 – Filtro de Quadratura Espelhado (QMF).	92
3.21 – Reconstrução do sinal $S$ através de seus coeficientes de aproximação e detalhes.	92
3.22 – Reconstrução do primeiro nível de resolução aproximado $A_1$ .	93
3.23 – Reconstrução do primeiro nível de resolução de detalhes $D_1$ .	94
3.24 – Componentes do sinal reconstruído.	94
3.25 – Três exemplos de perfis de amplitudes compostas de 100 pontos e seus respectivos padrões-gradientes.	96
3.26 – Metodologia para mapear a ST de tamanho $N$ numa matriz quadrada de ordem $\sqrt{N} \times \sqrt{N}$ . No exemplo temos uma ST de 1024 pontos distribuídos em uma matriz.	98
3.27 – Passos para calcular o coeficiente de assimetria gradiente.	99
3.28 – (a) Um exemplo arbitrário de uma triangulação local de Delaunay entre quatro vetores locais em sua grade gradiente correspondente; (b) Um exemplo da sensibilidade da triangulação para detectar mudanças na fase do padrão gradiente.	100
3.29 – Grades gradientes assimétricas e padrão de triangulação respectivos dos perfis de amplitude mostrados na Figura 3.25(b) e 3.25(c).	101
4.1 – Determinando a $\lambda_{mc}$ de uma ST.	105
4.2 – Componentes de aproximação de uma ST usando uma <i>wavelet</i> Daubechies de ordem dois (db2).	107
4.3 – Componentes de aproximação de uma ST usando uma <i>wavelet</i> Biortogonal com ordem de reconstrução igual a oito e ordem de decomposição igual a seis (bior6.8).	108

4.4 – Cálculo de $G_{A,n}$ para um fragmento de uma componente de aproximação: Passo 1: obtenção da janela de dados através de $\lambda_{mc}$ ; Passo 2: transformação da ST em uma matriz e geração da matriz gradiente; e Passo 3: campo de triangulação de Delaunay.....	110
4.5 – Espectro-Gradiente de uma ST.....	112
4.6 – Espectro-Gradiente interpolado de uma ST.....	113
5.1 – Teste de convergência dos momentos estatísticos da ST com padrão caótico de Lorenz: (a) média; (b) desvio padrão; (c) assimetria e (d) curtose. No detalhe, o teste em escala log-log.....	118
5.2 – Teste de convergência dos momentos estatísticos da ST com padrão caótico de Hénon: (a) média; (b) desvio padrão; (c) assimetria e (d) curtose. No detalhe, o teste em escala log-log.....	119
5.3 – Teste de convergência dos momentos estatísticos da ST com padrão caótico Logístico: (a) média; (b) desvio padrão; (c) assimetria e (d) curtose. No detalhe, o teste em escala log-log.....	120
5.4 – Teste de convergência dos momentos estatísticos da ST com padrão estocástico $\alpha = -\frac{3}{2}$ : (a) média; (b) desvio padrão; (c) assimetria e (d) curtose. No detalhe, o teste em escala log-log.....	121
5.5 – Teste de convergência dos momentos estatísticos da ST com padrão estocástico $\alpha = -\frac{5}{3}$ : (a) média; (b) desvio padrão; (c) assimetria e (d) curtose. No detalhe, o teste em escala log-log.....	122
5.6 – Teste de convergência dos momentos estatísticos da ST com padrão esto cástico $\alpha = -2$ : (a) média; (b) desvio padrão; (c) assimetria e (d) curtose. No detalhe, o teste em escala log-log.....	123
5.7 – Escalas máximas de coerência médias e seus respectivos desvios.....	125
5.8 – Espectro-Gradiente médio: Mapa Logístico.....	125
5.9 – Espectro-Gradiente médio: Mapa de Hénon.....	126
5.10 – Espectro-Gradiente médio: Modelo de Lorenz.....	126
5.11 – Espectro-Gradiente médio: $\alpha = -\frac{3}{2}$ .....	127
5.12 – Espectro-Gradiente médio: $\alpha = -\frac{5}{3}$ .....	127
5.13 – Espectro-Gradiente médio: $\alpha = -2$ .....	128
5.14 – Espectro-Gradiente médio das ST analisadas para cada categoria.....	129
5.15 – Relação entre as Medidas de Flutuação do Espectro-Gradiente das ST estudadas, com seus respectivos desvios.....	130
5.16 – Relação entre as Medidas de Flutuação do Espectro-Gradiente e a dimensão dos sinais estudados: valores médios com respectivos desvios em escala log.....	130
5.17 – Relação entre as Medidas de Flutuação do Espectro-Gradiente em escala log e a escala-janela normalizada pelo tamanho da série.....	131
5.18 – Pressão atmosférica média (hPa): (a) Lago Curuai; (b) Serra da Mesa; e (c) Tucuruí.....	132

5.19 – Temperatura média do ar (°C): (a) Curuai; (b) Serra da Mesa; e (c) Tucuruí.....	133
5.20 – Umidade relativa média do ar (%): (a) Curuai; (b) Serra da Mesa; e (c) Tucuruí.....	134
5.21 – Intensidade do vento (m/s): (a) Curuai; (b) Serra da Mesa; e (c) Tucuruí. ....	135
5.22 – Espectro-Gradiente da pressão atmosférica média nas respectivas regiões. ....	136
5.23 – Espectro-Gradiente da temperatura média do ar nas respectivas regiões.....	137
5.24 – Espectro-Gradiente da umidade relativa do ar nas respectivas regiões.....	137
5.25 – Espectro-Gradiente da velocidade média zonal do vento nas respectivas regiões. ....	138
5.26 – Relação entre as Medidas de Flutuação do Espectro-Gradiente das ST da pressão atmosférica, com seus respectivos desvios. Curuai: $\langle f_{eg} \rangle = 4,76 \times 10^{72}$ ; Tucuruí: $\langle f_{eg} \rangle = 4,59 \times 10^{72}$ ; Serra da Mesa: $\langle f_{eg} \rangle = 2,10 \times 10^{72}$ . ....	139
5.27 – Relação entre as Medidas de Flutuação do Espectro-Gradiente das ST da temperatura média do ar, com seus respectivos desvios. Curuai: $\langle f_{eg} \rangle = 1,02 \times 10^{73}$ ; Tucuruí: $\langle f_{eg} \rangle = 4,29 \times 10^{72}$ ; Serra da Mesa: $\langle f_{eg} \rangle = 2,34 \times 10^{73}$ . ....	139
5.28 – Relação entre as Medidas de Flutuação do Espectro-Gradiente das ST da umidade relativa do ar média, com seus respectivos desvios. Curuai: $\langle f_{eg} \rangle = 9,28 \times 10^{73}$ ; Tucuruí: $\langle f_{eg} \rangle = 1,15 \times 10^{74}$ ; Serra da Mesa: $\langle f_{eg} \rangle = 1,21 \times 10^{78}$ . ....	140
5.29 – Relação entre as Medidas de Flutuação do Espectro-Gradiente das ST da intensidade do vento médio, com seus respectivos desvios. Curuai: $\langle f_{eg} \rangle = 2,43 \times 10^{78}$ ; Tucuruí: $\langle f_{eg} \rangle = 1,33 \times 10^{73}$ ; Serra da Mesa: $\langle f_{eg} \rangle = 8,22 \times 10^{72}$ . ....	140
5.30 – Padrão de inundação nas sub-regiões pantaneiras analisadas. ....	142
5.31 – Classificação dos padrões de inundação para as regiões norte, central e sul do Pantanal Mato-grossense (HAMILTON et al., 1996), por meio da GSA. ....	144

## LISTA DE TABELAS

1.1	Valores de $\alpha$ relacionados com o tamanho da série.....	37
2.1	Médias anuais das variáveis estudadas para os sistemas aquáticos selecionados. ....	55
3.1	Correspondência entre escalas e frequências na análise <i>wavelet</i> .....	78
5.1	Escala máxima de coerência média para cada padrão.....	124
5.2	Medida de Flutuação do Espectro-Gradiente média para cada reservatório aquático analisado. ....	136
5.3	Classificação dos padrões de inundação em cada rio do Pantanal Matogrossense através da GSA. ....	143



## LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

INPE	Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais
ST	Série(s) temporal(is)
AR	Modelos auto-regressivos
MA	Médias móveis
ARMA	Modelo de médias móveis auto-regressivo
FFT	<i>Fast Fourier Transform</i> (Transformada Rápida de Fourier)
WMA	<i>Wavelet Multiresolution Analysis</i> (Análise de Multirresolução por <i>Wavelets</i> )
GPA	<i>Gradient Pattern Analysis</i> (Análise de Padrões-Gradiente)
GSA	<i>Gradient-Spectra Analysis</i> (Análise Espectral dos Gradientes)
EMBRAPA	Empresa Brasileira de Pesquisa Agropecuária
LAC	Laboratório Associado de Computação e Matemática Aplicada
PCD	Plataformas para Coleta de Dados
SIMA	Sistema Integrado de Monitoramento Ambiental
MS	Mato Grosso do Sul
CWT	<i>Continuous Wavelet Transform</i> (Transformada Contínua de Wavelet)
ICWT	<i>Inverse Continuous Wavelet Transform</i> (Transformada Inversa Contínua de Wavelet)
DWT	<i>Discrete Wavelet Transform</i> (Transformada Discreta de Wavelet)
IDWT	<i>Inverse Discrete Wavelet Transform</i> (Transformada Inversa Discreta de Wavelet)
QMF	<i>Quadrature Mirror Filters</i> (Filtros de Quadratura Espelhados)
DFA	<i>Detrended Fluctuation Analysis</i> (Análise da Flutuação Destendenciada)
PCHIP	<i>Piecewise Cubic Hermite Interpolating Polynomial</i>
STFT	<i>Short Time Fourier Transform</i> (Transformada de Fourier de Tempo Curto)
FBI	<i>Federal Bureau of Investigation</i>
NASA	<i>U.S. National Aeronautics and Space Administration</i>
MS	Mato Grosso do Sul
INMET	Instituto Nacional de Meteorologia





## 1 INTRODUÇÃO

Nas últimas décadas, devido ao avanço tecnológico para aplicações digitais, a observação e coleta de medidas no tempo tornaram-se procedimentos praticamente automáticos em muitas aplicações. Da mesma forma, a aplicação de ferramentas matemáticas, no âmbito computacional, possibilitou a automatização de procedimentos de análise. De um modo geral, há um uso crescente dos computadores no processamento, visualização e análise de dados envolvendo novos métodos para aprimoramento de estruturas e banco de dados, algoritmos e métodos matemáticos e estatísticos para análise. Porém, apesar de todos os avanços citados, existem problemas intrínsecos ao tipo de observação ou experimento que acabam limitando o tamanho do conjunto de medidas coletadas, também denominado de série temporal, no contexto deste trabalho.

Para efeitos de definição, segundo MORETTIN e TOLOI (2006), “uma série temporal é qualquer conjunto de observações ordenadas no tempo”, a qual a partir deste ponto será denominada de ST, tanto no singular, quanto no plural. No contexto desta dissertação, uma ST curta é um conjunto ordenado de medidas discretas de amplitude no tempo  $\{A(t)\}_N$  cujo número de medidas (“pontos da série”) é da ordem  $N \sim 10^3$ .

Com o intuito de oferecer uma melhor compreensão da contribuição deste trabalho, abordamos, a seguir, a motivação da análise de ST curtas explicitando alguns problemas em dados ambientais, além de destacar a necessidade de tratamento diferenciado na análise de séries com padrões de variabilidade não-lineares e/ou não-estacionários.

## 1.1 Problemas em dados ambientais

### 1.1.1 Tamanho da série

Dados ambientais podem ser coletados e organizados no formato de uma ST. Neste caso em que dispomos de ST reais, ou seja, obtidas através de medições *in situ*, é razoavelmente comum nos depararmos com sinais que apresentem descontinuidades significativas (ver Figura 1.1) causadas principalmente por falhas diversas nos equipamentos de coleta de dados. Essas falhas resultam em perda de informação sobre o padrão de variabilidade ao longo de um período de interesse, resultando num conjunto de amostras curtas que, na maioria das vezes, são descartadas da análise devido ao restrito número de pontos, que compromete a interpretação estatística.



Figura 1.1 – Exemplo de série temporal com descontinuidades.

Fonte: Adaptado de INPE (2008a).

Na Figura 1.1 são apresentados segmentos de uma série de medidas diárias da temperatura da água de um reservatório de Furnas (INPE, 2008(a)). Note que, de-

vido a problemas instrumentais ou de transmissão de dados, o conjunto de medidas destacado em vermelho possui apenas 75 medidas de um conjunto total de 384 (mesmo numa resolução horária teríamos 1800 medidas na região de destaque de um total de 9216).

Como sabemos, o tamanho da ST em termos de pontos de medida é crucial para que técnicas estatísticas possam ser aplicadas sem comprometer a correta interpretação dos momentos estatísticos usuais (média, variância, assimetria e curtose). Mesmo as técnicas mais sofisticadas como algoritmos para cálculo de Leis de Escalas e Leis de Potência, em geral baseadas na Transformada de Fourier do sinal, ficam seriamente comprometidas quando a ST é curta. Em geral, qualquer técnica que dependa de um número  $N$  mínimo de medidas seqüenciais para que o resultado da análise possa ser considerado robusto requer  $N \gg 10^3$  pontos (OSBORNE e PROVENZALE, 1989; SCHREIBER, 1998). Estudos clássicos sobre caracterização de processos dinâmicos a partir de ST, em geral, não mencionam essa limitação, pois os autores assumem a priori que as ST medidas ou simuladas são amostras com validade estatística. Nesses casos, ST curtas são completamente descartadas das análises mais sofisticadas onde se busca interpretar um padrão de variabilidade não-linear a partir de possíveis mecanismos físicos subjacentes.

Normalmente, ST curtas não servem para a aplicação de diversas metodologias que buscam, por exemplo, caracterizar intermitência e turbulência (FRISH, 1995), fenômenos de auto-organização fora do equilíbrio (BAK et al., 1988), difusões anômalas (SWINNEY e TSALLIS, 2004), caoticidade (PEITGEN et al., 1992), regimes reativo-difusivos (CROSS e HOHENBERG, 1993), entre outras.

Assim, a característica inerente à ST curta de ter o tamanho da ordem de até  $10^3$  pontos de medida descredencia a aplicação tanto de métodos convencionais como avançados, que exigem uma ST com número de pontos  $N \gg 10^3$ .

### 1.1.2 Processos não-estacionários

Segundo MORETTIN (1999), os principais métodos de análise de ST estão baseados geralmente nos conceitos de estacionariedade da ST e linearidade do processo dinâmico. Em geral, as metodologias baseadas em modelos autorregressivos (AR), de médias móveis (MA) e mistas (ARMA) são classificadas como “lineares”, pois são consideradas apropriadas apenas para processos lineares que geram ST aproximadamente estacionárias.

Uma ST é dita estacionária “quando ela se desenvolve no tempo aleatoriamente ao redor de uma média constante, refletindo alguma forma de flutuação estável” (MORETTIN e TOLOI, 2006). Para a maioria das ferramentas matemáticas e computacionais de análise, a ST deve refletir este comportamento, já que estes procedimentos supõem que as ST sejam estacionárias. A Figura 1.2 ilustra a diferença entre ST estacionárias e não-estacionárias.

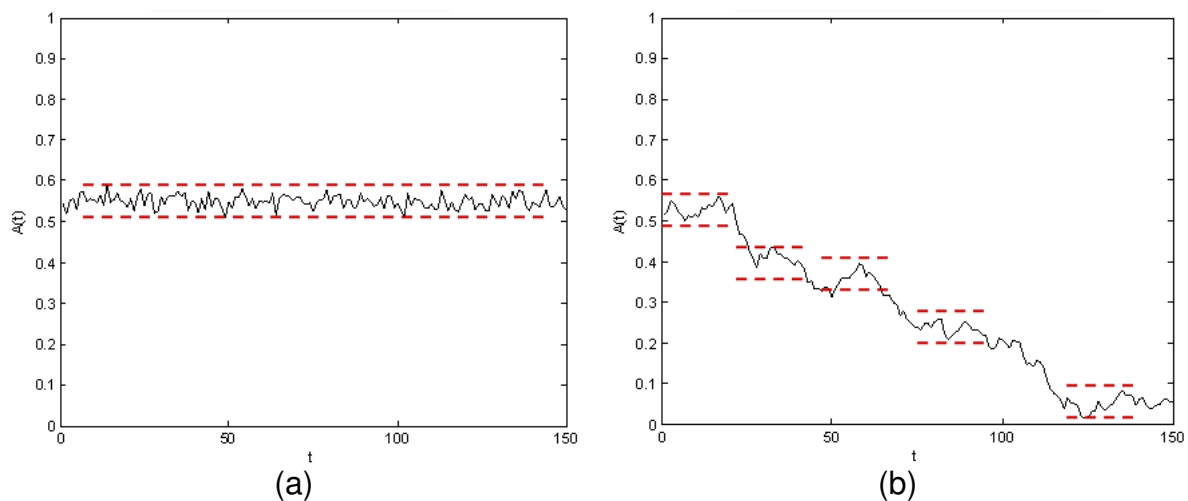


Figura 1.2 – Exemplo de série: (a) estacionária; e (b) não-estacionária.

É usual, na análise de ST não-estacionárias por métodos convencionais, transformar as mesmas em ST estacionárias, tomando as diferenças sucessivas da série original até que a faixa dinâmica da flutuação torne-se estável em torno de uma média.

A primeira diferença de  $A(t)$  é definida por

$$\Delta A(t) = A(t) - A(t-1), \quad (1.1)$$

onde  $A(t)$  é a ST de amplitudes.

A segunda diferença é

$$\Delta^2 A(t) = A(t) - 2A(t-1) + A(t-2); \quad (1.2)$$

e, de modo geral, a  $n$ -ésima diferença de  $A(t)$  é

$$\Delta^n A(t) = \Delta[\Delta^{n-1} A(t)]. \quad (1.3)$$

Apesar da comodidade da transformação acima ou de outras transformações similares, NELSON (1976) concluiu que transformações neste sentido não melhoram a qualidade da análise, tanto para previsões de valores futuros, como para caracterizações sobre o processo físico subjacente. Ao invés disso, a transformação de estacionariedade de uma série introduz um erro nas previsões decorrente da tal transformação, desqualificando o método. GRANGER e NEWBOLD (1976), estudando o tema de maneira mais teórica, concluíram que “previsões de antilogarimos em dados transformados estão contaminadas e deveriam, portanto, ser ajustadas, o que não é feito por grande parte dos programas computacionais”. No contexto da aplicação de modelos auto-regressivos, PLOSSER (1979) conclui que

“parece ser preferível fazer a previsão usando diretamente o modelo sazonal ao invés de ajustar a série e depois utilizar um modelo não-sazonal de análise”. Dessa forma, abordagens mais recentes seguem na linha de tratar formas especiais de não-estacionariedade no domínio da frequência, definindo o conceito de espectro dependente do tempo. Ou seja, para o caso estacionário, o espectro só depende das frequências, enquanto que para o caso não-estacionário, o espectro depende do tempo e da frequência.

Dados coletados de variáveis físicas ambientais (meteorológicas, hidrológicas, oceanográficas ou limnológicas) normalmente apresentam variabilidade complexa, que é interpretada por BARBOSA (2006) como “regimes de variação que compreendem antipersistência, persistência e intermitências no domínio temporal” de uma ST.

A característica da antipersistência é visualizada numa ST, quando para cada escala de iteração  $L_x = |(n+1) - n|$  o valor da amplitude tende a aumentar se estiver baixo ou a diminuir se estiver alto, o que resulta num padrão de variabilidade tal, que, apesar de complexo, está restrito a uma faixa dinâmica quase constante. Assim, podemos afirmar que a faixa dinâmica é aproximadamente estacionária. Ou seja, por maior que seja sua diversidade, os valores calculados ficam restritos ao domínio da escala  $L_y$ , flutuando em torno de uma média característica  $\langle A \rangle$  (ROSA et al., 2008). Veja esquema da Figura 1.3.

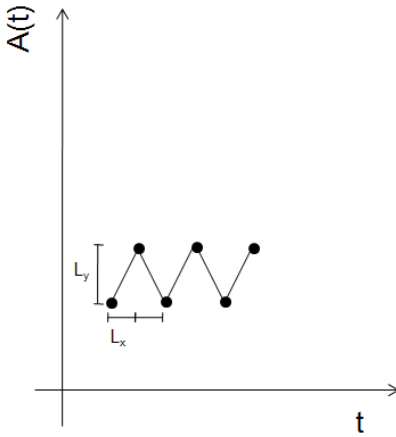


Figura 1.3 – Esquema de uma ST com antipersistência.

No caso da persistência, para cada escala de iteração  $L_x = |(n + 1) - n|$ , o valor da amplitude tende a aumentar se estiver alto ou a diminuir se estiver baixo, o que resulta num padrão de variabilidade com uma faixa dinâmica instável (ROSA et al., 2008). Veja o esquema da Figura 1.4 que ilustra o conceito de persistência.

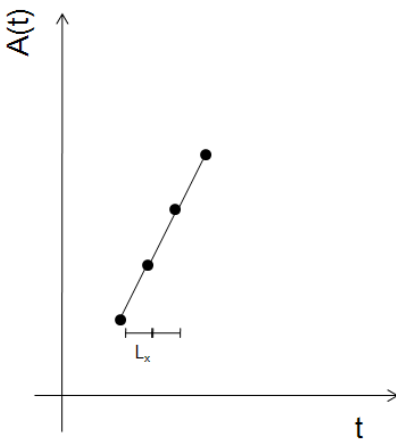


Figura 1.4 – Esquema de uma ST com persistência.



Além disso, em geral, um fenômeno geofísico natural envolve diversas variáveis correlacionadas entre si (e também autocorrelacionadas) por meio de leis estocásticas e/ou determinísticas e, portanto, podendo envolver processos não-lineares tanto de origem estocástica como determinística.

A utilização de novas técnicas estatísticas, continuamente investigadas e desenvolvidas recentemente, tem introduzido novos paradigmas à teoria da análise de ST com variabilidade complexa (TURCOTTE, 1997; SCHREIBER, 1998; EMERY e THOMSON, 2001; ASSIREU, et al., 2002), e essa variabilidade impõe fortes restrições à qualidade das previsões, que podem ser importantes, por exemplo, na caracterização e previsão de processos físicos, químicos e biológicos associados ao meio ambiente (EMERY e THOMSON, 2001; ASSIREU et al., 2002; RAMOS et al., 2004). Nesta dissertação, o termo “meio ambiente” será utilizado no contexto das ciências ambientais com destaque para variáveis físicas meteorológicas, limnológicas e oceanográficas que estejam em alguma escala associadas às mudanças das variáveis físicas, químicas e biológicas em uma área ou região geográfica específica.

## **1.2 Métodos convencionais e alternativos na análise de séries temporais**

O Espectro de Potências de uma ST pode ser considerado a metodologia convencional mais utilizada para classificar um processo estocástico de acordo com a Lei de Potência obtida a partir do seu espectro. Mostraremos a ineficiência das leis de potência na classificação de padrões de variabilidade de ST curtas não-estacionárias, desenvolvendo um teste de robustez da Lei de Potência em função do tamanho de um sinal experimental tipicamente estocástico. A Figura 1.5 mostra um exemplo de uma ST curta estocástica composta por 500 pontos.

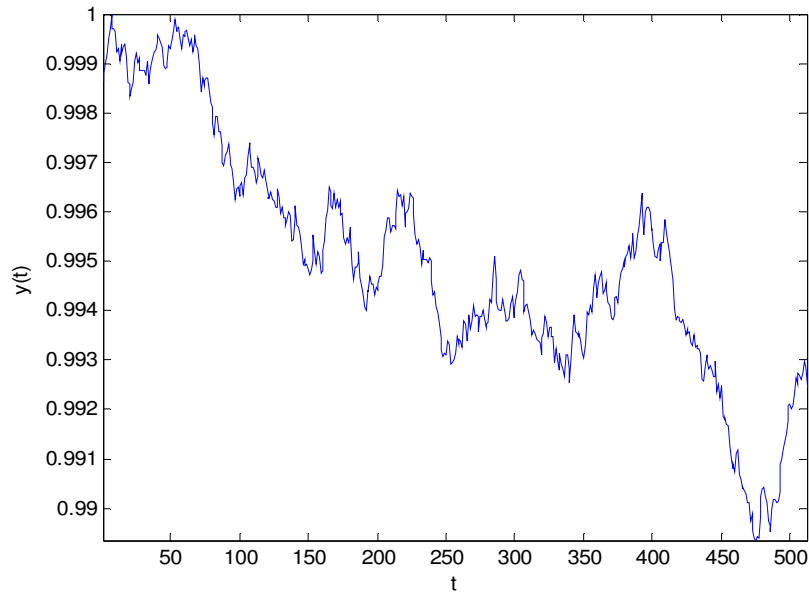


Figura 1.5 – Exemplo de ST curta estocástica.

### 1.2.1 Espectro de Potências

O Espectro de Potências  $P(\omega)$  é definido como o quadrado do módulo de  $A(\omega)$  (série no domínio da freqüência) e indica a influência da freqüência  $\omega$  na ST. O Espectro de Potência é obtido a partir da Transformada de Fourier, através da qual é possível transformar uma série no domínio do tempo em sua equivalente no domínio da freqüência.

De acordo com a teoria da análise harmônica, podemos considerar genericamente que uma ST qualquer é um somatório de sinais periódicos com diferentes escalas. Fazer a análise espectral desta ST é verificar a influência de cada escala presente na mesma em relação às demais. PAPOULIS (1962), afirma que, se a ST é periódica, o seu espectro pode ser representado como uma combinação linear (denominada como Série de Fourier) de oscilações cujas freqüências são múltiplos inteiros da freqüência básica,  $\omega$ . Afirma ainda que, quando a ST é não-periódica, o

espectro de freqüências varia continuamente e, portanto, para representar a ST em termos dessas freqüências, usa-se a Transformada de Fourier.

Para efeitos de definição, a Transformada de Fourier na forma contínua pode ser escrita como:

$$A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} A(t) dt, \quad (1.4)$$

onde  $A(t)$  é a ST na forma:

$$A(n) = A(t_n), \quad t_n = n\Delta t, \quad (1.5)$$

sendo que as medidas são realizadas em intervalos de tempo regulares,  $\Delta t$ .

No caso discreto, a chamada “Transformada Discreta de Fourier” de uma ST pode ser definida pela série abaixo:

$$A_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N x(n) \exp\left[i \frac{2\pi n k}{N}\right], \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (1.6)$$

A partir da Equação 1.4, o Espectro de Potências é definido como:

$$P(\omega) = |A(\omega)|^2. \quad (1.7)$$

Já para o caso discreto, o espectro de potências é definido por

$$P(\omega) = |A_k|^2, \quad (1.8)$$

sendo que a ST da Equação 1.5 está definida no domínio do tempo e a série da Equação 1.6, no domínio das freqüências. Do ponto de vista computacional, o cál-

culo desta transformada pode ser obtido com maior eficiência para sinais longos, usando o algoritmo FFT (*Fast Fourier Transform*) (COOLEY e TUKEY, 1965).

O Espectro de Potências em função de uma determinada frequência está relacionado com esta frequência através de uma Lei de Potência:

$$P(\omega_k) \sim \omega_k^{-\alpha}. \quad (1.9)$$

Através de diversas medidas experimentais, tem sido constatado que a potência  $\alpha$  está diretamente ligada às leis universais de escala, indicando que cada processo possui sua Lei de Potência ou “Classe de Universalidade” definida<sup>1</sup>. Alguns exemplos podem ser citados: turbulência 3D, 2D em processos geofísicos (LESLIE, 1973; ORSZAG, 1977; PANCHEV, 1971; SALMON, 1982), e oceanográficos (GARRET e MUNK, 1979).

Assim, cada valor de  $\alpha$  determina um tipo de ruído randômico e cada tipo de ruído randômico corresponde a um tipo de processo estocástico. Ou seja, diferentes séries que possuem  $\alpha$  aproximados, indicam pertencer ao mesmo processo estocástico, fazendo de  $\alpha$  um classificador natural de padrões de variabilidade temporal de ST estocásticas. A Figura 1.6 ilustra a obtenção do Espectro de Potências de uma ST com  $2^{17}$  medidas através da FFT.

---

<sup>1</sup> Por exemplo: a classe de universalidade para a turbulência plenamente desenvolvida é caracterizada pela lei  $\omega^{-5/3}$  em um espectro de energia contra o número de onda (FRISH, 1995).

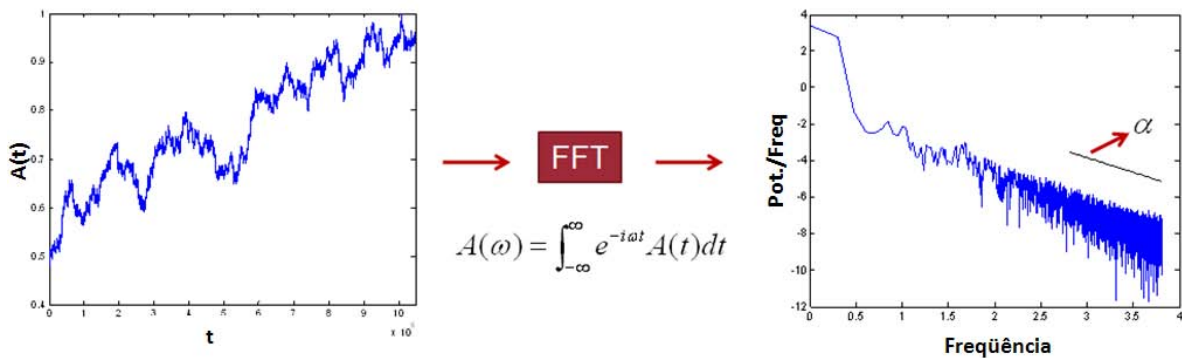


Figura 1.6 – Obtenção do Espectro de Potências de uma ST.

Entretanto, Bruce Malamud e Donald Turcotte, realizando estudos de persistência em ST (MALAMUD e TURCOTTE, 1999), concluíram que para sinais não-estacionários, a robustez das medidas estatísticas do sinal começa a ser comprometida com a diminuição do número de pontos de medida da amostra.

Para efeitos de demonstração desta perda de robustez da análise estatística e conseqüente ineficiência do espectro de potências em classificar ST curtas, geramos uma ST estocástica com  $2^{17}$  pontos (para visualização do padrão, veja Figura 1.5 que mostra os primeiros 512 pontos da série citada), com  $\alpha = -\frac{5}{3}$ , através do algoritmo de Bruce Malamud e Donald Turcotte (MALAMUD e TURCOTTE, 1999). Em seguida, calculamos iterativamente o valor de  $\alpha$  para a primeira metade da série anterior. O valor de  $\alpha$  foi calculado para um conjunto de mil ST do mesmo modelo físico ( $\alpha = -\frac{5}{3}$ ), a partir do qual calculamos o valor médio de  $\alpha$  e seu desvio padrão, conforme Tabela 1.1.

Como pode ser visto na Tabela 1.1 e nas Figuras 1.7, 1.8, 1.9 e 1.10, a confiabilidade do valor de  $\alpha$  está ligada diretamente com o tamanho do sinal, de tal forma que para ST curtas novas metodologias devem ser propostas.

Tabela 1.1 – Valores de  $\alpha$  relacionados com o tamanho da série.

Tamanho da série	$\langle \alpha \rangle$	Desvio padrão
131072	-1,68	0,007
65536	-1,68	0,014
32768	-1,68	0,028
16384	-1,68	0,061
8192	-1,76	0,109
4096	-1,79	0,230
2048	-1,75	0,451
1024	-1,86	0,904
512	-1,81	1,812
256	-2,86	2,213
128	-2,36	3,291

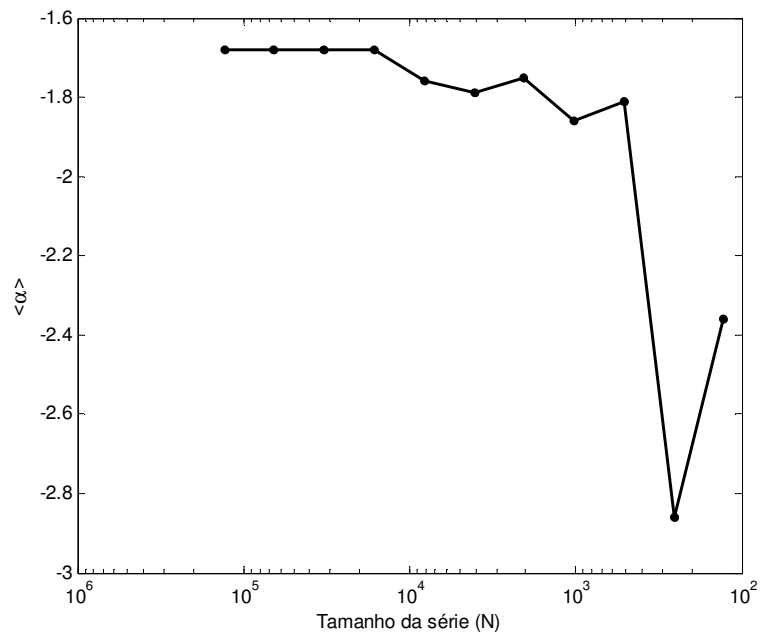


Figura 1.7 – Relação entre o tamanho da série e o valor de  $\langle \alpha \rangle$ .

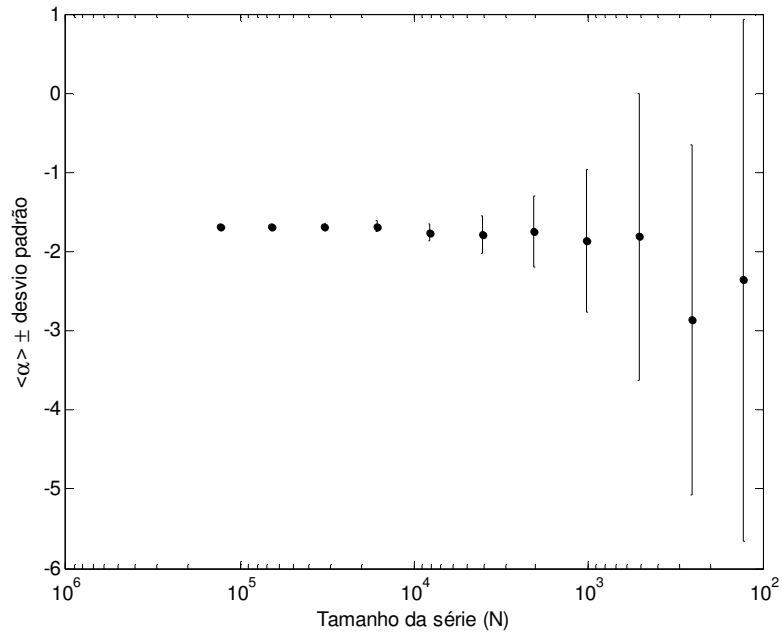


Figura 1.8 – Erros no cálculo de  $\alpha$ . Para ST menores,  $\alpha$  com maior variação.

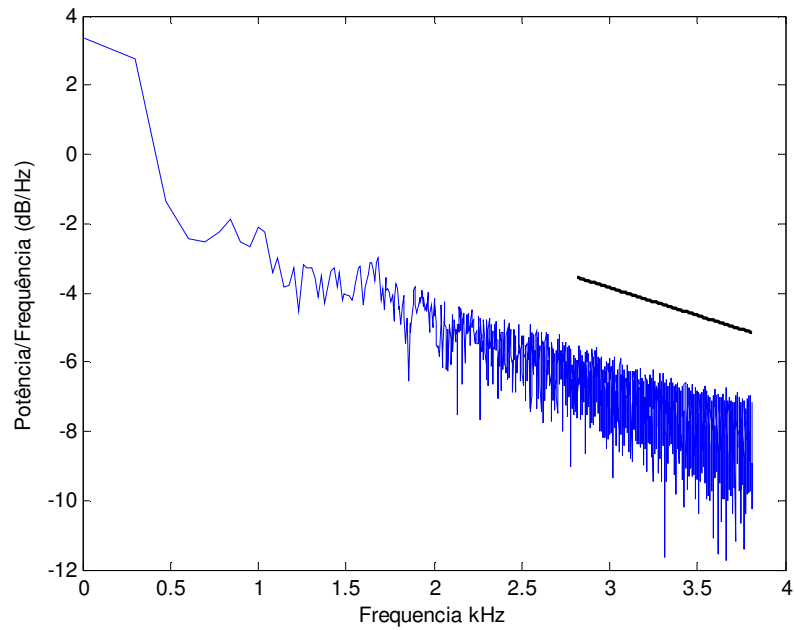


Figura 1.9 –  $P(\omega)$ : série com  $N = 2^{17}$  pontos:  $\alpha = -1,68$ .

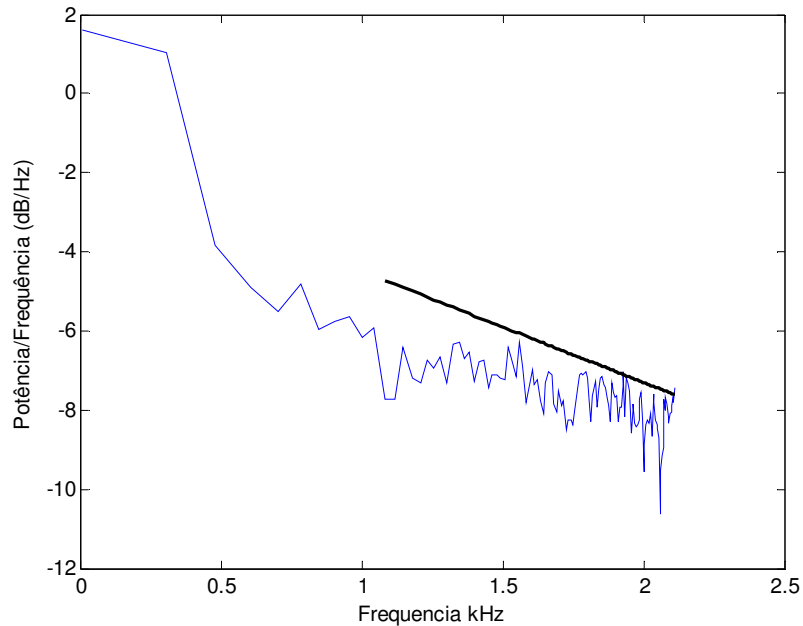


Figura 1.10 –  $P(\omega)$ : série com  $N = 2^8$  pontos:  $\alpha = -2,86$ .

### 1.3 Objetivo

Propor uma metodologia alternativa para análise de padrões de variabilidade de ST curtas estocásticas e determinísticas introduzindo um quantificador robusto para classificação desses padrões, com diferentes graus de autocorrelação, auto-afinidade, intermitência e persistência.

### 1.4 Organização da dissertação

Os demais capítulos desta dissertação estão organizados da seguinte maneira:

- Capítulo 2: descreve os dados (“canônicos” e “ambientais”) utilizados neste trabalho.



- Capítulo 3: traça um breve panorama dos aspectos gerais das principais ferramentas matemáticas utilizadas: a Análise de Multirresolução por *Wavelets*<sup>2</sup> como um desdobramento teórico das *wavelets*; e a Análise dos Padrões Gradientes adaptada para séries temporais.
- Capítulo 4: descreve detalhadamente a Análise Espectral de Padrões-Gradiente, juntamente com o ambiente computacional utilizado.
- Capítulo 5: apresenta a aplicação das ferramentas nos dados e discute os principais resultados deste trabalho.
- Capítulo 6: organiza as conclusões provenientes deste projeto de mestrado, enfatizando a contribuição científica das mesmas. Finalmente, são sugeridas perspectivas de pesquisas futuras.

---

<sup>2</sup> Uma vez que há controvérsias para o termo em português (ondeletas x ondaletas), convencionamos utilizar o termo em inglês.

## 2 DADOS ANALISADOS

Neste capítulo descrevemos os dados selecionados em função das análises previstas no projeto. Nosso estudo de ST curtas consiste em duas etapas distintas: (i) analisar ST denominadas como canônicas ou de referência, cujos processos não-lineares subjacentes são conhecidos e (ii) classificar ST curtas experimentais: dados de três reservatórios cedidos por Furnas Centrais Elétricas S.A., da qual o LAC-INPE é parceira, além de dados hidrológicos de inundação no Pantanal cedidos pela NASA (HAMILTON et al., 1996).

Todas as séries canônicas apresentadas neste trabalho foram obtidas por meio de simulação computacional obedecendo ao respectivo modelo do padrão escolhido. Já as séries ambientais foram obtidas através dos grupos de pesquisa parceiros. Com o intuito de nivelar o domínio dos dados, todas as séries selecionadas são constituídas por  $2^{10}$  medidas de amplitudes, normalizadas entre zero (0) e um (1).

### 2.1 Séries canônicas

#### 2.1.1 Padrões caóticos

Esse tipo de padrão é regido por leis determinísticas não-lineares e apresenta alta sensibilidade às variações de parâmetros do sistema dinâmico subjacente (suas condições iniciais). Geralmente são processos envolvendo um conjunto pequeno de variáveis com evolução temporal tipicamente antipersistente (principalmente no caso dos mapas caóticos). São denominados como processos de baixa dimensão<sup>3</sup> e, juntamente com os padrões estocásticos (discutidos na seção seguinte) se destacam na geração de padrões complexos. Os processos caóticos utilizados aqui são todos “dissipativos”, ou seja, aqueles que apresentam atratores estranhos nos seus respectivos espaços de fase.

---

<sup>3</sup> A dimensão do processo é aqui interpretada como o número de variáveis de estado ( $V(t)$ ) necessárias para constituir um sistema matemático capaz de gerar a série.

Nesta pesquisa escolhemos três modelos para representar os padrões caóticos: o Modelo de Lorenz (tridimensional), o Mapa de Hénon (bidimensional) e o Mapa Logístico (unidimensional). A seguir, apresentamos de forma introdutória esses modelos.

### (i) Modelo de Lorenz

O atrator de Lorenz foi introduzido por Edward Lorenz em 1963, que o derivou a partir das equações simplificadas de estruturas convectivas que ocorrem nas equações da atmosfera. É um sistema tridimensional de equações diferenciais ordinárias que mostra como o estado de um sistema dinâmico não-linear evolui no tempo num padrão complexo, não-repetitivo.

O sistema de equações de Lorenz consiste num modelo simplificado do comportamento da atmosfera, simulando o comportamento de um fluido em um plano retangular, cuja temperatura do lado inferior é maior que a do superior, gerando correntes de convecção (PEITGEN et al., 1992):

$$\begin{aligned}\frac{dX}{dt} &= \sigma(Y - X) \\ \frac{dY}{dt} &= X(\beta - Z) - Y, \\ \frac{dZ}{dt} &= XY - \gamma Z\end{aligned}\tag{2.1}$$

Na Equação 2.1, a variável  $X$  é proporcional à intensidade dos movimentos convectivos (representa os fluxos convectivos). Se  $X > 0$ , os movimentos ocorrem em sentido horário, caso contrário, os movimentos ocorrem em sentido anti-horário. A variável  $Y$  é proporcional à diferença de temperatura entre as correntes ascendentes e descendentes (distribuição de temperaturas na horizontal) e  $Z$  é proporcional ao gradiente no perfil de temperatura vertical (distribuição de temperaturas

na vertical). Os parâmetros  $\sigma$  e  $\beta$  representam os números de Prandtl<sup>4</sup> e Rayleigh<sup>5</sup>, respectivamente, e  $\gamma$  é um fator geométrico<sup>6</sup> (LORENZ, 1963).

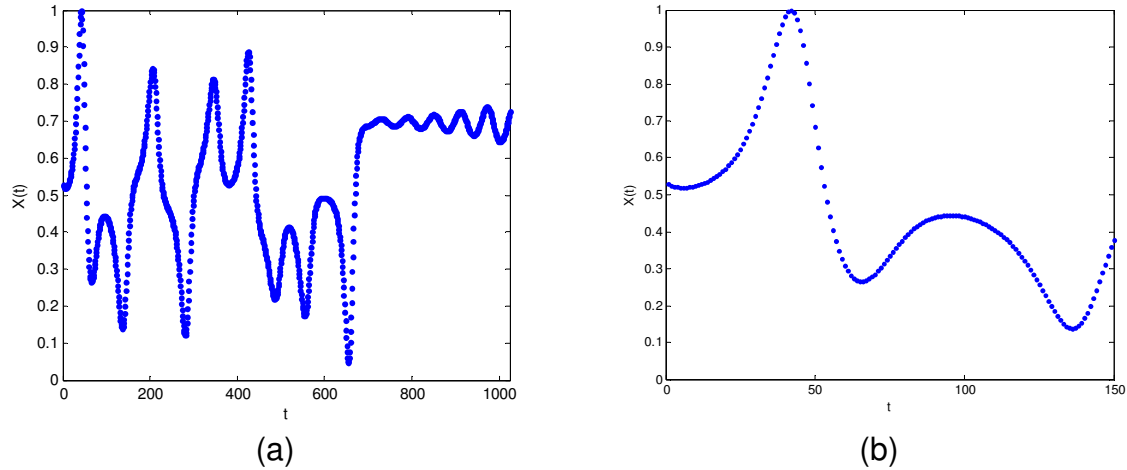


Figura 2.1 – ST curta do Modelo de Lorenz: (a) 1024 pontos e (b) 150 pontos.

Em nossa pesquisa utilizamos os seguintes valores usuais (PEITGEN et al., 1992):  $\sigma = 10$ ,  $\beta = 28$  e  $\gamma = 8/3$ . Para as condições iniciais de  $X_0$ ,  $Y_0$  e  $Z_0$ , utilizamos valores aleatórios entre 0 e 1 (ver exemplo de uma ST gerada, na Figura 2.1, com visualização de (a) 1024 e (b) 150 pontos).

<sup>4</sup> O número de Prandtl é um número adimensional definido como:  $\sigma = \nu/\alpha$ , onde  $\nu$  corresponde à velocidade de difusão do momento e  $\alpha$ , à velocidade de difusão térmica, ou seja, é a relação entre a viscosidade e a condutividade térmica. Quando  $\sigma$  é pequeno significa que o calor se difunde mais rapidamente do que o momento. Tem esse nome para homenagear Ludwig Prandtl (PEITGEN et al., 1992).

<sup>5</sup> O número de Rayleigh também é um número adimensional associado com a transferência de calor no interior de um fluido (no modelo simplificado do plano regular,  $\beta$  é proporcional à diferença de temperaturas entre a parte inferior e superior). Quando este número está abaixo de um valor crítico, a transferência de calor acontece principalmente por condução; quando está acima deste valor crítico, a transferência de calor se dá principalmente por convecção. Este nome é uma homenagem ao Lord Rayleigh (PEITGEN et al., 1992).

<sup>6</sup> Relação entre a altura e a largura do retângulo do modelo simplificado (PEITGEN et al., 1992).

## (ii) Mapa de Hénon

Segundo o próprio HÉNON (1976), este mapa não-linear, que leva seu nome, é uma simplificação de uma seção de Poincaré<sup>7</sup> do modelo de Lorenz. Devido ao comportamento caótico antipersistente, ele é um dos modelos mais estudados na área de sistemas dinâmicos. Sua representação matemática é composta por duas equações de recorrência que acopla as amplitudes  $X_t$  e  $Y_t$ :

$$\begin{aligned} X_{t+1} &= 1 - aX_t^2 + Y_t, \\ Y_{t+1} &= bX_t \end{aligned} \quad (2.2)$$

onde as variáveis  $X$  e  $Y$ , representam pontos do plano cartesiano e os parâmetros canônicos  $a = 1,4$  e  $b = 0,3$  fornecem um processo com comportamento caótico. Para diferentes valores de  $a$  e  $b$ , o mapa pode apresentar comportamento caótico, intermitente ou convergir para uma órbita periódica.

Na Figura 2.2 é possível visualizar um exemplo desse padrão, com os parâmetros canônicos e as condições iniciais para  $X_0$  e  $Y_0$  sendo valores aleatórios entre 0 e 1, com visualização de (a) 1024 e (b) 150 pontos. A partir deste ponto os gráficos serão visualizados com os pontos ligados.

---

<sup>7</sup> Qualquer corte transversal, com dimensão  $D - 1$ , contido no espaço de fases com dimensão  $D$ .

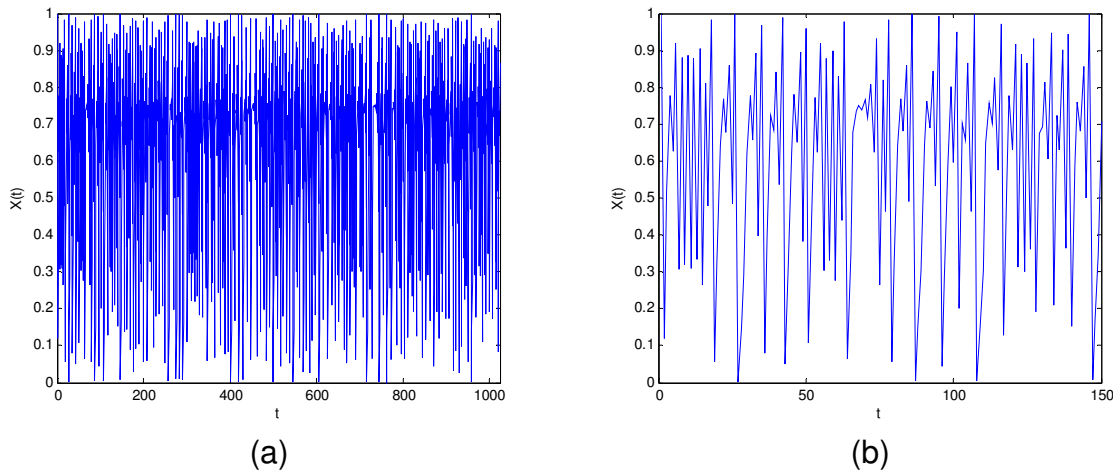


Figura 2.2 – ST curta do Mapa de Hénon: (a) 1024 pontos e (b) 150 pontos.

### (iii) Mapa Logístico

Esse padrão de variabilidade irregular é amplamente investigado na teoria dos sistemas dinâmicos caóticos (PEITGEN et al., 1992). Em 1845, o francês Pierre Verhulst propôs um modelo não-linear para prever o futuro de uma população animal. Esse modelo foi retomado por Robert May em 1976 que o escreveu em forma de mapa, onde cada valor é obtido a partir do valor anterior:

$$X_{t+1} = \rho X_t (1 - X_t), \quad (2.3)$$

onde  $X_t$  corresponde à fração populacional e  $\rho$  a uma constante positiva que depende das condições ecológicas (representa uma taxa combinada de reprodução e demanda por alimento). No modelo original assume-se que um limite máximo de população pode ser suportado pelo meio ambiente. Caso a população ultrapasse este limite, pode ocorrer um evento extremo como, por exemplo, a rápida diminuição de alimentos, resultando na eliminação das espécies. Em abordagens

mais recentes o mapa logístico é utilizado para simular mapas acoplados que descrevem a dinâmica de fluidos extensos e sistema de osciladores (KANEKO, 1990). Na condição  $\rho \geq 3,8$ , o processo encontra-se em regime caótico (PEITGEN et al., 1992).

Na Figura 2.3 é possível visualizar um exemplo desse padrão, com  $\rho = 4,0$  e a condição inicial para  $X_0$  sendo um valor aleatório entre 0 e 1.

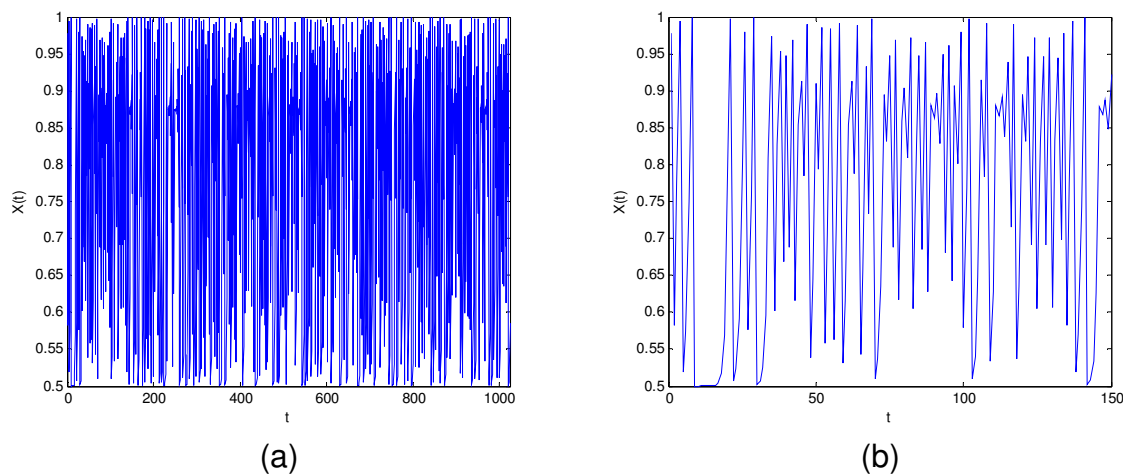


Figura 2.3 – ST curta do Mapa Logístico: (a) 1024 pontos e (b) 150 pontos.

Portanto, com base nos três modelos caóticos apresentados nesta seção, construiremos algoritmos computacionais (em MATLAB<sup>®</sup>) com os quais geramos várias ST (mil) com padrões de variabilidade caótica.

### 2.1.2 Padrões estocásticos

Os processos estocásticos estão associados ao comportamento de variáveis aleatórias cuja dinâmica é regida por uma grande quantidade de graus de liberdade e, portanto, são chamados de processos de alta dimensão.

O espectro de um processo estocástico pode ser representado por uma série discreta de freqüências e a sua função aleatória correspondente pode ser escrita como uma série discreta para tempos  $t_i = i\Delta t$  com  $i = 1, \dots, M$ , permitindo que a ST possa ser escrita como uma simples superposição de oscilações harmônicas, dada por (OSBORNE e PROVENZALE, 1989):

$$A(t_i) = \sum_{k=1}^{M/2} [P(\omega_k)\Delta\omega]^{1/2} \cos(\omega_k t_i + \phi_k), \quad i = 1, \dots, M, \quad (2.4)$$

onde  $\omega_k = k\Delta\omega$ , com  $k = 1, \dots, M/2$ ,  $\Delta\omega = 2\pi / Mt$ ,  $\phi_k$  sendo as fases escolhidas aleatoriamente e  $M$  sendo o número de pontos da ST.

A variabilidade em ST geradas por tais padrões complexos é do tipo persistente, como pode ser visto na Figura 2.4. Esse padrão foi gerado através da Equação 2.4, utilizando o algoritmo de MALAMUD e TURCOTE (1999) com  $\alpha = \frac{3}{2}$  (uma Lei de Potência típica de padrões estocásticos de alta dimensão). Note que, na Equação 2.4,  $P(\omega) = 1/\omega^\alpha$ .

Como discutido no capítulo anterior, o conceito de Lei de Potência, associado a um espectro de energias, permite caracterizar um padrão de variabilidade do tipo turbulento, isto é, cujas densidades espectrais são proporcionais a  $\frac{1}{\omega^\alpha}$  com  $\alpha$  assumindo diferentes valores a partir do tipo de turbulência considerado, num intervalo de algumas ordens de grandeza da freqüência. Sinais gerados por processos estocásticos do tipo  $\frac{1}{\omega^\alpha}$  são encontrados na física, meteorologia, biologia, engenharia, economia, etc.



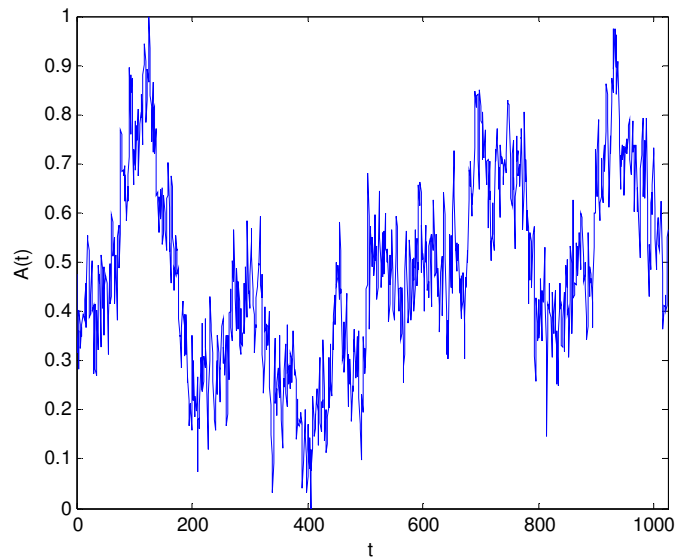


Figura 2.4 – Exemplo de ST curta estocástica:  $P(\omega) \sim \omega^{-3/2}$ .

De forma geral, o comportamento destes sinais está associado com correlações que decaem lentamente, e o interesse por estes processos tem sido recentemente renovado pelo desenvolvimento das fenomenologias caóticas e estocásticas, na qual um comportamento aparentemente estocástico pode de fato resultar de um mecanismo determinístico caótico com dependência característica de longo alcance. De outra perspectiva, a Lei de Potência dos espectros indica que um sinal existe em todas as escalas e, portanto, não tem uma escala característica, resultando num aspecto de auto-similaridade<sup>8</sup> no contexto estocástico (ABRY et al., 1995).

Um processo físico, muito comum, que pode ser simulado a partir da Equação 2.4 é o movimento fracionário Browniano (fBm). O fBm foi introduzido por MANDEL-

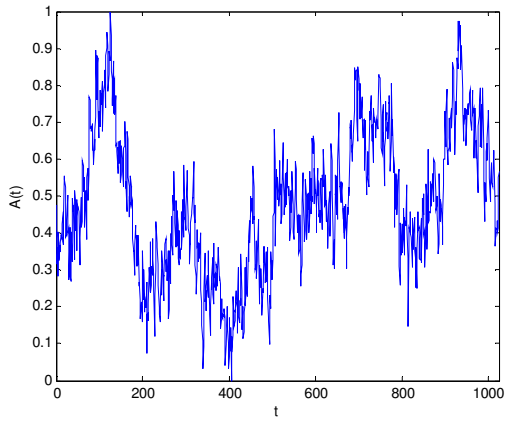
---

<sup>8</sup> A auto-similaridade indica que a ST permanece estatisticamente imutável quando os eixos do tempo e o da amplitude são simultaneamente multiplicados por um fator  $a$  (ABRY et al., 1995). Se a ST precisar de fatores de multiplicação diferentes em seus eixos para manter a imutabilidade estatística, denominamos essa ST como auto-afim.

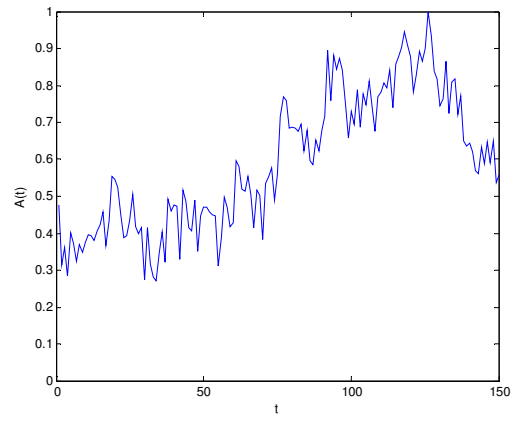
BROT e VAN NESS (1968) como um meio de representar processos estocásticos não estacionários que exibem dependência de longo alcance e/ou que têm propriedade de auto-similaridade.

Dois aspectos importantes devem ser levados em conta na análise do fBm: a sua não-estacionariedade, que necessita de alguma análise dependente do tempo, e a sua auto-similaridade, que necessita de alguma análise dependente da escala (FLANDRIN, 1992 e FLANDRIN, 1994). Logo, um estudo consistente do padrão fBm deve considerar técnicas de decomposição em tempo-escala. Nesse contexto, a análise por wavelets é particularmente adequada para analisar o fBm e caracterizar sua riqueza de escalas (FLANDRIN, 1992; TEWFICK e KIM, 1992 e FLANDRIN, 1994). No Capítulo 3 a Análise de Multirresolução será descrita em mais detalhes.

Neste trabalho, selecionamos três tipos de padrões para representar a variabilidade de fBm:  $\alpha = -\frac{3}{2}$ ,  $\alpha = -\frac{5}{3}$  e  $\alpha = -2$  (Figuras 2.5, 2.6 e 2.7, respectivamente). Esses sinais aparecem com frequência em processos regidos por fenômenos turbulentos. O fenômeno da turbulência está presente em diversos processos físicos relacionados ao meio ambiente quando observado em diversas escalas, desde escalas quânticas a escalas cosmológicas. Por exemplo, a turbulência plenamente desenvolvida apresenta  $P(\omega) \sim \omega^{-5/3}$  (Figura 2.6).

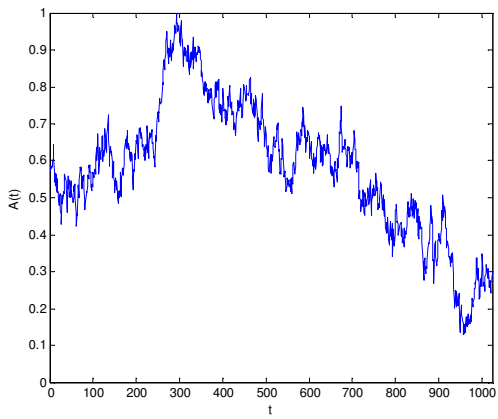


(a)

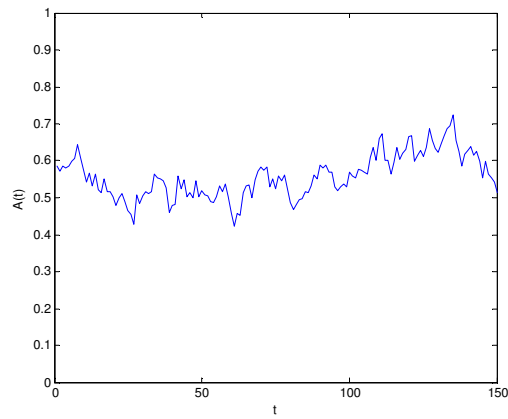


(b)

Figura 2.5 – ST curta com padrão fBm  $\omega^{-3/2}$  : (a) 1024 pontos e (b) 150 pontos.



(a)



(b)

Figura 2.6 – ST curta com padrão fBm  $\omega^{-5/3}$  : (a) 1024 pontos e (b) 150 pontos.

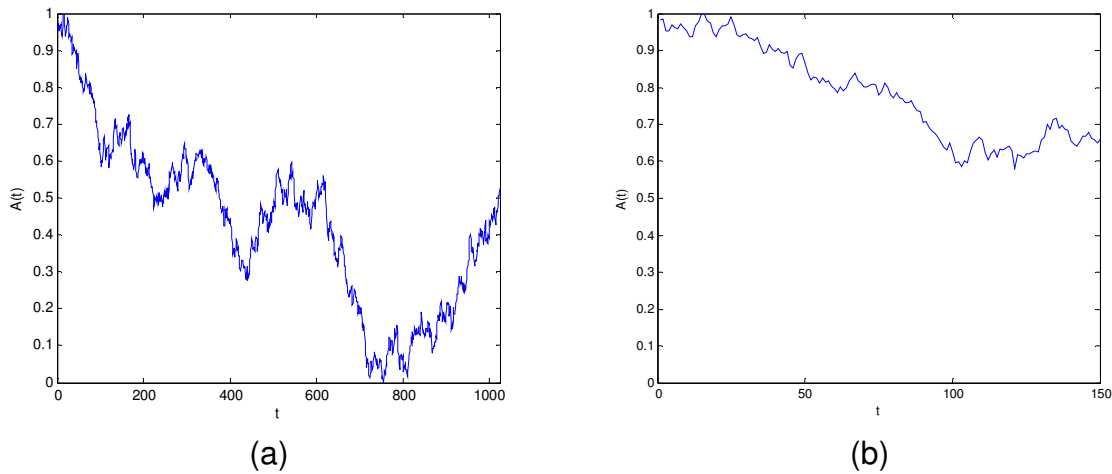


Figura 2.7 – ST curta com padrão fBm  $\omega^{-2}$ : (a) 1024 pontos e (b) 150 pontos.

Com o respectivo algoritmo da Equação 2.4 foram geradas mil séries para cada Lei de Potência apresentada. Dessa forma, juntamente com os dados caóticos descritos anteriormente, essas séries constituem o conjunto de dados “canônicos” para estudo das metodologias a serem aplicadas nas ST reais medidas em sistemas naturais.

Na próxima seção apresentamos as ST de dados reais obtidos a partir de medidas em dois sistemas naturais distintos: reservatórios aquáticos e regimes de inundações.

## 2.2 Séries ambientais

### 2.2.1 Monitoramento ambiental – Furnas

Os dados utilizados aqui foram cedidos por Furnas Centrais Elétricas S.A., que tem parceria com o INPE, dentre outras instituições. Mais informações acerca dos dados estão disponibilizadas em FURNAS (2008).

Neste projeto, as ST relacionadas às variáveis do sistema são obtidas através dos vários instrumentos que compõem o SIMA (Sistema Integrado de Monitoramento Ambiental), que é um conjunto de hardware e software confeccionado para coleta e monitoramento de dados hidrológicos (STEVENSON et al., 1993), desenvolvido em uma parceria entre o INPE e a Universidade do Vale do Paraíba (UNIVAP). Informações adicionais sobre o SIMA (Figura 2.8) estão disponíveis em STECH et al. (2006) e FURNAS (2008).



Figura 2.8 – SIMA instalado no reservatório de Serra da Mesa.

Fonte: STECH et al. (2006).

Diversas informações são passíveis de serem mensuradas através do SIMA. Além do fluxo e direção da água, outras medidas aquáticas mensuráveis são as seguintes: concentração de clorofila (mg/L), pH, turbidez (NTU), concentração de O<sub>2</sub> dissolvido (mg/L), condutividade elétrica (mS/cm), concentração de nitrato (mg/L), concentração de amônia (mg/L) e temperatura (°C). Outras propriedades medidas:

pressão atmosférica (hPa), umidade relativa do ar (%), temperatura do ar (°C), direção (oNV) e intensidade do vento (m/s) e radiação solar (W/m<sup>2</sup>).



Figura 2.9 – Localização dos sistemas aquáticos analisados pela GSA.

Na Figura 2.9, temos algumas áreas de estudo do SIMA, “que corresponde às regiões Norte e Centro-Oeste do Brasil. Há SIMAs instalados nos reservatórios de Tucuruí e Serra da Mesa, localizados na bacia Araguaia-Tocantins (região de floresta tropical e savana, respectivamente) (...). Essas estações servem como modelos de ambiente modificado pelo homem e são sujeitas a pressões para políticas públicas de desenvolvimento. Outro SIMA foi instalado no lago Curuai, localizado no baixo planalto Amazônico (região de floresta tropical) e representa uma área quase intocada pelo homem. Este lago possui dimensões compatíveis com os reservatórios e pode ser interpretado como uma referência para comparações com os demais sistemas” (STECH et al., 2006).

Nesse trabalho, o objetivo foi comparar a complexidade desses sistemas por meio da caracterização do padrão de variabilidade das respectivas variáveis ambientais medidas pelo SIMA. Dentro de um escopo parcial e preliminar, escolhemos o Lago Curuai e os reservatórios Serra da Mesa e Tucuruí. Com base na motivação analítica deste projeto – ST curtas –, quatro variáveis foram selecionadas: velocidade zonal do vento (m/s); temperatura média do ar (°C); umidade relativa do ar média (%); e pressão atmosférica (hPa). As ST curtas correspondem às variáveis medidas na mesma época contígua de coleta. As variáveis e os reservatórios selecionados acima foram aqueles que permitiram obter ST curtas equivalentes para aplicação robusta das metodologias propostas. Um exemplo de ST ambiental do Projeto FURNAS pode ser visualizado na Figura 2.10.

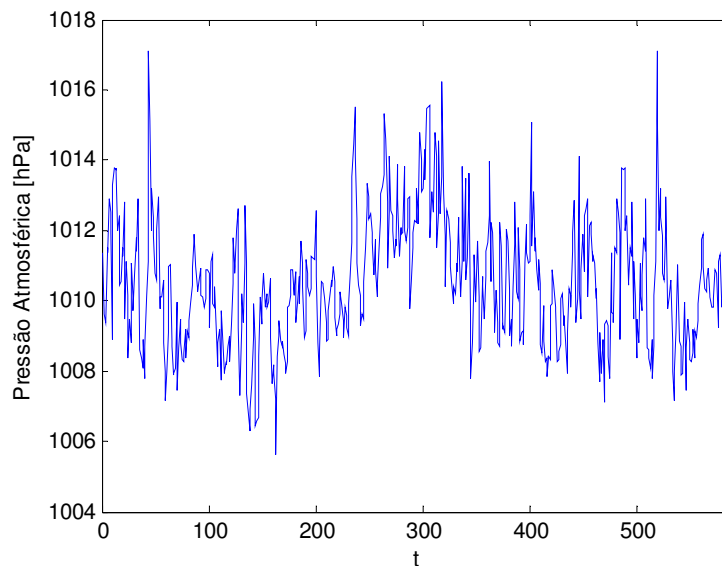


Figura 2.10 – Variação diária da pressão atmosférica média (hPa) no Lago Curuai.

Como uma análise prévia, realizamos uma classificação simples dos reservatórios selecionados, utilizando as médias anuais, das medidas com resolução diária, das variáveis escolhidas para a análise via GSA e outras relacionadas à água (Temperatura e Turbidez). Para o cálculo dessas médias, todas as medidas existentes no

intervalo de 1 ano, foram consideradas. Os resultados são mostrados na Tabela 2.1.

Tabela 2.1 – Médias anuais de variáveis escolhidas nos sistemas aquáticos analisados.

	Curuai	S. da Mesa	Tucuruí
Temperatura do ar (°C)	27,5±1,3*	26,0±1,8*	27,0±1,1*
Umidade relativa do ar (%)	77,5±6,8*	67,0±13,2*	76,5±6,3*
Intensidade do vento (m/s)	1,2±0,3*	0,1±0,9*	1,1±0,6*
Pressão atmosférica (hPa)	1010,4±6,3 <sup>†</sup>	962,0±2,0*	1002,9±1,2*
Temperatura da água (2m) (° C)	28,1±2,5 <sup>‡</sup>	28,1±1,2 <sup>↔</sup>	27,3±4,2 <sup>↔</sup>
Turbidez (NTU)	85,4±139,1 <sup>‡</sup>	195,3±178,4 <sup>¶</sup>	1,2±3,8 <sup>■</sup>

\* 18/07/2007 – 17/07/2008

<sup>†</sup> 01/04/2006 – 31/03/2007

<sup>‡</sup> 25/04/2004 – 24/04/2005

<sup>↔</sup> 05/09/2006 – 04/09/2007

<sup>¶</sup> 14/09/2006 – 13/09/2007

<sup>■</sup> 16/05/2004 – 15/05/2005

Note que, apenas com base nessas médias e seus respectivos desvios, concluímos que os 3 reservatórios são equivalentes, com exceção da média de Turbidez para Tucuruí, cuja amostra foi comprometida pela qualidade e quantidade das medidas. Dada a marcante diversidade entre sistemas aquáticos deste tipo, uma classificação como essa pode ser considerada precária e compromete por isso uma generalização dos diferentes sistemas.

Todas as séries selecionadas provenientes do SIMA são apresentadas no Capítulo 5.

### 2.2.2 Padrões de inundação no Pantanal

Para compreensão da hidrologia, biogeoquímica e ecologia de regiões tropicais sujeitas a inundações é necessário obter informações sobre os padrões de variabilidade entre áreas secas e inundadas sazonalmente (HAMILTON et al., 1996; RICHEY et al., 1991; BARTLETT e HARRISS, 1993; e JUNK, 1993). Tais informações são também fundamentais para previsão de viabilidade e impactos ambientais de projetos no sentido de regular essas inundações para um determinado fim



(HAMILTON et al., 1996; BUCHER et al., 1993). No contexto brasileiro, a região pantaneira é um típico sistema com dinâmica de inundações.

O Pantanal é uma savana tropical inundada localizada na América do Sul ocupando uma área de cerca de 137.000 km<sup>2</sup> (aproximadamente 450 por 300 km) em território brasileiro (HAMILTON et al., 1996). A maior parte da região está situada no Brasil, com pequenas áreas (cerca de 20% do total) na Bolívia e Paraguai (Figura 2.11).

A dinâmica da inundação pode ser estudada através de ST obtidas a partir da diferença de temperatura de brilho medidas em 37 GHz pelo radiômetro SMMR (Scanning Multichannel Microwave Radiometer) do satélite Nimbus-7. Utilizando técnicas de aproximação por métodos de mistura linear são geradas ST para a variável  $\Delta T_{obs}$ , que corresponde à diferença entre temperaturas de brilho para superfícies completamente inundadas e superfícies com vegetação (HAMILTON et al., 1996). A ST mostrada na Figura 2.12 cobre o período de 1979 a 1987, para a sub-região do rio Aquidauana. Os perfis das demais sub-regiões podem ser visualizados no Capítulo 5 e foram originalmente estudados por CHOUDHURY (1992) e HAMILTON et al. (1996). Os dados brutos foram gentilmente cedidos pelo Prof. Stephen K. Hamilton da Michigan State University (EUA), a partir de dados originalmente obtidos da NASA (EUA) provenientes de satélite de sensoriamento remoto por microondas passivas. Os algoritmos para o cálculo da fração de inundação compreendem modelos de mistura linear em unidades de grade medindo 0,25 x 0,25 metros. Os detalhes desses cálculos podem ser encontrados em SIPPEL (1994).

O clima da região é tropical com uma estação chuvosa bem característica (BRASIL, 1979). A precipitação pluviométrica anual está entre 1.000 a 1.700 mm, com chuvas mais concentradas entre novembro e março.

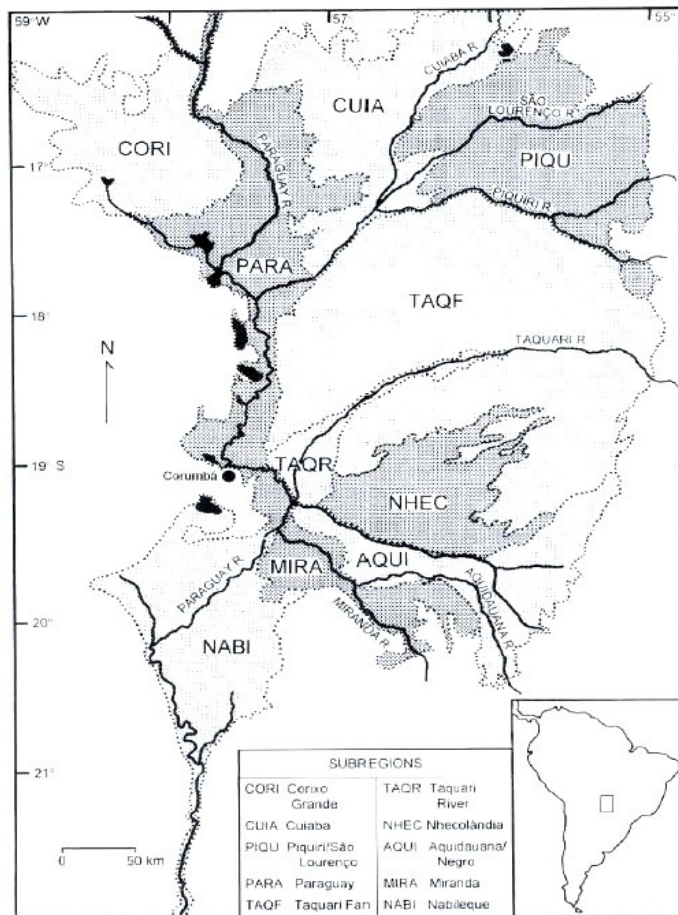


Figura 2.11 – Área do Pantanal no Brasil e na América do Sul.

Fonte: HAMILTON et al. (1996).

Na Figura 2.13, temos a média mensal de chuvas em Corumbá (MS) e a média mensal do nível da água do rio Paraguai, medida pela régua de Ladário (próximo a Corumbá). Os dados de chuva são de 1912-1971 e os dados do nível de água do rio são de 1979-1987 e foram cedidos originalmente pelo Instituto Nacional de Meteorologia (INMET) – Estação climatológica de Corumbá-MS. Os dados de nível diário do rio Paraguai em Ladário-MS foram cedidos originalmente pelo VI Distrito Naval – Serviço de Sinalização Náutica do Oeste, Marinha do Brasil.

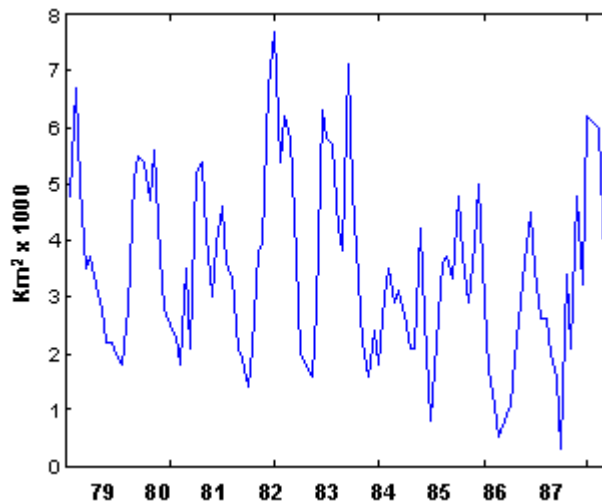


Figura 2.12 – Padrão de inundação na bacia da sub-região de Aquidauana.  
 Fonte: NASA citado por HAMILTON et al. (1996).

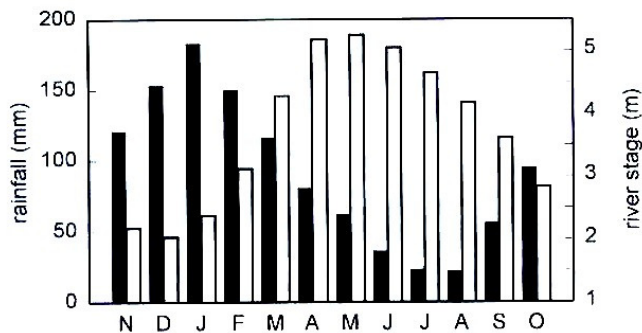


Figura 2.13 – Média mensal de chuvas em Corumbá-MS (barras cheias) e média mensal do nível de água do rio Paraguai (barras abertas), na régua de Ladário-MS, evidenciando a defasagem entre o pico de cheias e o período de chuvas.  
 Fonte: HAMILTON et al. (1996).

Embora os perfis de inundação sejam robustos a partir deste tipo de medida, as séries obtidas são compostas apenas por uma centena de pontos que corresponde a uma média mensal, inviabilizando assim o uso de técnicas estatísticas para a classificação dos padrões de variabilidade observados. Tentando contornar esta

limitação metodológica, aplicamos a GSA para essa análise com o objetivo de comparar os padrões de variabilidade de  $\Delta T_{obs}$  das seguintes sub-regiões do Pantanal, segundo HAMILTON et al. (1996): Corixo, Cuiabá, Miranda, Nabileque, Aquidauana, Nhecolândia, Paraguai, Piquiri, rio Taquari e leque do Taquari.

A análise desses dados constituiu um teste interessante de robustez da GSA em relação à quantidade de dados disponibilizados numa dada ST. Os resultados estão descritos no Capítulo 5.

No capítulo a seguir, introduzimos os aspectos gerais das metodologias utilizadas para o desenvolvimento da técnica GSA que, no contexto deste projeto, será utilizada para análise das ST relacionadas aos processos canônicos e ambientais descritos neste capítulo.



### 3 ASPECTOS GERAIS DAS TÉCNICAS UTILIZADAS

Neste capítulo abordamos, de forma geral, uma introdução às *wavelets*, juntamente com a motivação de seu desenvolvimento, aplicações e propriedades. Discutimos, também, as dilatações binárias e translações diádicas, delineando em seguida o procedimento para obtenção da Transformada de *Wavelet* de um sinal. Em continuação, descrevemos a Transformada Contínua de *Wavelet*, juntamente com a Transformada Discreta de *Wavelet*, que fornece os subsídios necessários para a Análise de Multirresolução com sua decomposição e reconstrução multi-nível. Finalmente, apresentamos as duas principais metodologias no âmbito da análise dos dados utilizadas neste trabalho: a Análise de Multirresolução por *Wavelets* (WMA) e a Análise de Padrões Gradientes em Séries Temporais (GPA). A Análise Espectral de Padrões-Gradiente é, em suma, uma junção de ambas as abordagens.

#### 3.1 Introdução às *Wavelets*

##### 3.1.1 Breve contexto histórico e evolução

As *wavelets* são “alternativas a outros sistemas de funções usados como bases para representação de funções pertencentes a certos espaços, como os senos e cossenos, polinômios ortogonais, funções Walsh, etc.”, segundo MORETTIN (1999). Elas constituem atualmente uma das ferramentas mais discutidas, avaliadas e utilizadas no processamento digital de sinais.

Estudar e processar sinais, tanto estocásticos quanto determinísticos, perpassa pelo uso de uma ferramenta tão clássica quanto poderosa: a análise espectral do sinal.

A Transformada de *Wavelet* constitui uma ferramenta moderna que permite a unificação de várias técnicas de análise e processamento. Dentre outras técnicas,

podemos citar: análise de imagens, codificação em sub-bandas, algoritmo piramidal de Laplace (BURT e ADELSON, 1983), Análise de Multirresolução para visão artificial em computadores e modelagem de sistemas variantes no espaço-tempo (RIOUL e VETTERLI, 1991), (BRUCE et al., 1996), (TORRÉSANI, 1999), (MALLAT, 2000). Para OLIVEIRA (2007), “ela inclui a Série de Fourier, a Transformada de Fourier, a Transformada de Gabor em Tempo Curto, espectrogramas, dentre outros, como casos particulares, permitindo a análise de sinais não-estacionários, incluindo sinais de banda larga.”.

As Transformadas de *Wavelet* foram introduzidas na França (Morlet, Grossman, Meyer, Battle, Lemarié, Cohen, Mallat, Coifman, Rioul, etc.), através de estudos de curta duração associados a pacotes de ondas acústicas sísmicas (HUBBARD, 1995).

Originalmente, foi cunhado o termo francês “ondelettes”, que denota o diminutivo de ondas, “ondinhas”, e o termo *wavelets* corresponde a uma versão inglesa desta expressão, que está associado a ondas localizadas em um período de tempo determinado. MACKENZIE (2007) traça em seu trabalho um panorama de aplicações que utilizam o conceito e ferramentas *wavelets*, como a indústria de animação com alguns filmes inovadores e famosos pela forma como é feito o tratamento de imagens (como por exemplo, *A Bug's Life* e *Toy Story* da Disney e Pixar). Outro exemplo citado é o uso de ferramentas *wavelets* pelo FBI norte-americano para codificar sua base de dados com mais de 30 milhões de impressões digitais. Ainda segundo MACKENZIE (2007), nossos olhos executam por natureza o processamento *wavelet*, já que, “nossos olhos podem ver em diferentes escalas de resolução: uma floresta pode ser vista como um sólido verde a partir de um jato, ou o espectador poderia apreciar com maior detalhe as árvores, galhos e folhas, caso ele estivesse num carro e mais próximo”.

Como já citado no Capítulo 2, o conceito de análise de Fourier afirma que qualquer forma de onda periódica pode se expressar como uma soma infinita de ondas senos e cossenos de diversas frequências. Em sua monografia de 1822, *La Théorie Analytique de La Chaleur*, Fourier define que as ondas senoidais são tidas como os elementos fundamentais de vibrações e ondas periódicas (BAEYR, 1999; GASQUET e WITOMSKI, 2000).

As idéias de Fourier se difundiram, pois muitos sinais irregulares puderam ser, a partir de então, analisados. Os sinais passaram a ser analisados no domínio da frequência. A decomposição evoluiu para a representação via Transformada de Fourier e a maior parte dos estudos envolvendo sinais incorporou essa ferramenta.

Porém, apesar dessa transformada resolver muitos problemas da física e engenharia, ela tem embutida em si, pelo menos, dois grandes inconvenientes:

1. A reprodução de sinais rápidos ou sinais com mudanças abruptas. Ou seja, essa técnica não pode ser usada para aproximar sinais não-estacionários. Essa falha inerente ao método é ilustrada pelo Princípio da Incerteza de Heisenberg, onde afirma que a posição e a velocidade de um objeto não podem ser medidas simultaneamente. Aplicando argumentos típicos da Mecânica Quântica, Dennis Gabor (GABOR, 1946) estabeleceu a seguinte relação de incerteza:

$$\Delta t \cdot \Delta f \geq \frac{1}{2}, \quad (3.1)$$

afirmando que  $t$  (tempo) e  $f$  (frequência) não podem ser simultaneamente definidos de forma exata. Esse é o chamado Princípio de Gabor-Heisenberg (GABOR, 1946 e OLIVEIRA, 2007).



2. O fornecimento do conteúdo espectral sem a indicação sobre a localização desses componentes no tempo. Suponha o sinal  $A(t)$  com 2048 pontos dado por:

$$A(t) = \begin{cases} 2 \cos(40\pi t), & 0 < t < 0,5 \\ \cos(60\pi t), & 0,5 < t < 1 \end{cases} \quad (3.2)$$

e outro sinal  $A(t)$  também com 2048 pontos, mas regida pela seguinte equação:

$$A(t) = \begin{cases} \cos(60\pi t), & 0 < t < 0,5 \\ 2 \cos(40\pi t), & 0,5 < t < 1 \end{cases} \quad (3.3)$$

Podemos visualizar na Figura 3.1 que o resultado obtido pela FFT da série em ambos os sinais cumpre seu objetivo, já que por meio dessa transformada podemos obter uma versão respectiva da ST dependente da frequência. Porém, ainda a Figura 3.1 mostra que, apesar das Equações 3.2 e 3.3 serem sinais diferentes, os espectros de Fourier de ambos os sinais são iguais.

Ambos os espectros de Fourier acima possuem os mesmos picos espectrais e destacam as frequências centrais nos valores 20Hz e 30Hz demonstrando a impossibilidade de localizar frequências no tempo através do método de Fourier.

No decorrer do século XX, os cientistas de diversas áreas tentaram superar as limitações encontradas no uso da série de Fourier, mas todos eles constataram que o problema estava na transformada.

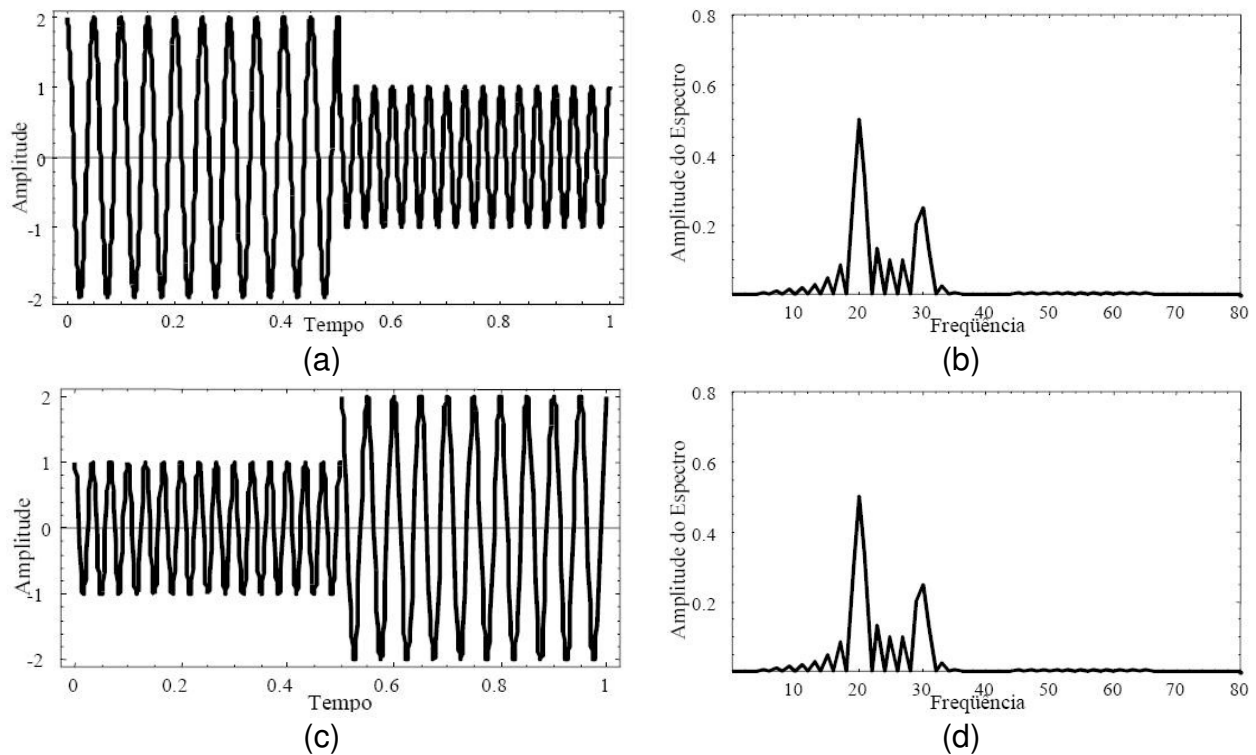


Figura 3.1 – Comparação entre espectros de Fourier de duas ST diferentes: (a) ST da Equação 3.2; (c) ST da Equação 3.3; (b) e (d) espectros de Fourier respectivos.

Fonte: (CHIERICE, 2003).

De acordo com GRAPS (1995) e SILVA & EYNG (2000), depois de 1807, os matemáticos analisando o sentido das funções, da convergência da série de Fourier e sistemas ortogonais, migraram da noção de análise de frequência para a noção de análise de escala. Isto é, a análise da  $A(t)$  criava estruturas matemáticas que variavam em escala. Esta análise mostrou-se menos sensível a ruídos porque ela mede a flutuação média do sinal em diferentes escalas. Além disso, em 1873 (HOMSKY et al., 2000), Paul Du Bois-Reymont apresentou uma função contínua e periódica de período  $2\pi$  cuja série de Fourier divergia num determinado ponto.

Posteriormente, outros exemplos surgiram como o exemplo de Fejér, em 1910, de uma função contínua cuja Série de Fourier divergia em todos os pontos.

Tendo em vista as limitações apresentadas pela análise de Fourier, três direções surgiram do trabalho de Du Bois-Reymont (HOMSKY et al., 2000):

1. Modificar a definição de função, de forma a encontrar uma que se adaptasse às Séries de Fourier;
2. Modificar a noção de convergência de forma a restabelecer a igualdade entre a função e a série;
3. Descobrir outros conjuntos de funções, que não  $\cos(nt)$  e  $\sin(nt)$ , com os quais se pudessem gerar séries que convergentes para a função.

Com o intuito de superar essa dificuldade, surgiram algumas alternativas no sentido de se ter uma análise no domínio do tempo e no da frequência, como a da Transformada de Fourier de Tempo Curto (STFT) também denominada como Transformada de Gabor ou Transformada de Fourier Janelada (GABOR, 1953a,b e MALLAT, 2000). A idéia dessa transformada é aplicar a Transformada de Fourier em janelas curtas de tempo, dentro das quais o sinal permaneça aproximadamente estacionário, introduzindo um parâmetro de frequência local no tempo.

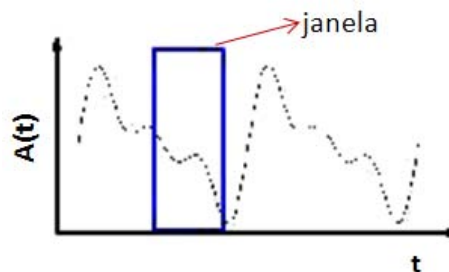


Figura 3.2 – Análise local no tempo com o uso das janelas.

Fonte: (OLIVEIRA, 2007). Adaptada.

Mesmo com essa evolução introduzida por Dennis Gabor, a análise ainda tinha uma limitação importante: uma vez fixada uma janela para a STFT, a resolução no tempo e na frequência permanece constante em todo o plano “tempo-freqüência”.

Surge então a idéia de analisar a ST através de “Filtros Idênticos” e de “Banda Passante Relativa Constante” (OLIVEIRA, 2007). Ou seja, especificando o formato de um filtro, todos os demais são versões escalonadas daquele filtro, sendo que o fator de escala depende da freqüência. Assim, emerge a noção de “*Mother-Wavelet*”<sup>9</sup> ou “Ondeleta-mãe”. É Morlet quem propõe que a análise seja baseada em filtros com escala logarítmica (GOUPILLAUD et, al, 1984). Para visualizar a diferença entre a Análise de Fourier de Tempo Curto (baseada em banda passante constante) e a Análise de Wavelets (baseada em Banda Passante Relativa Constante), veja a Figura 3.3, onde  $f_0$  é a freqüência base do sinal:

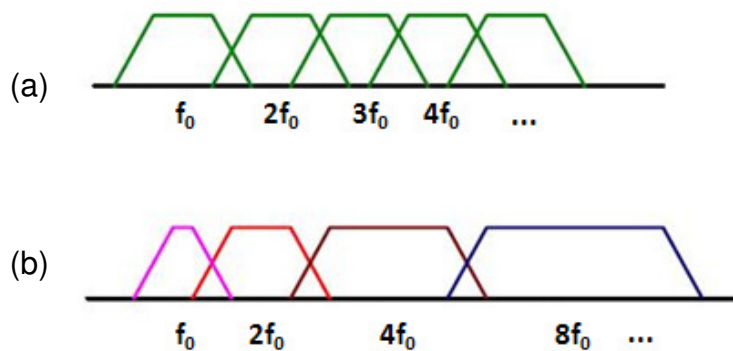


Figura 3.3 – Análise espectral com Banco de Filtros: (a) Banda Passante Constante (STFT) e (b) Banda Passante Relativa Constante (*wavelet*).

Fonte: Adaptada de OLIVEIRA (2007).

<sup>9</sup> Como adotamos utilizar neste trabalho o termo *wavelet*, em inglês, também usaremos a expressão *Mother-Wavelet* (denominada a partir daqui como MW) para a função base que servirá de analisadora para outros sinais, através de suas dilatações e translações.

De acordo com (OLIVEIRA, 2007; GRASP, 1995; e SILVA e EYNG, 2000), a primeira menção sobre *wavelets* aparece no apêndice da tese de doutorado de Alfred Haar em 1909, onde se fala de “análise escalonada”. Seu trabalho foi continuado por Schauder e Lusin nas décadas de 20 e 30.

Desde então, além da determinação de bases para os espaços em estudo, o desenvolvimento das *wavelets* começou a abranger metodologias de sua obtenção a partir das funções ditas originais através de algum processo de associação. HOMSKEY et al. (2000) ressaltam três pontos importantes nesse processo:

1. Esse processo deveria considerar além das compressões e dilatações comuns à Análise de Fourier, a idéia de translação para representar as funções, tanto no domínio do tempo, quanto no da frequência. Assim, em termos de representação matemática, funções não-originais passariam a ser representadas a partir das originais através do uso de dois índices, e não apenas de um como no caso da Transformada de Fourier;
2. Algumas condições deveriam ser impostas acerca de uma dada função para que a mesma não apresentasse um caráter análogo, por exemplo, ao oscilatório apresentado pelas funções originais relativas à análise de Fourier e não perder a localidade no tempo;
3. O termo *wavelets* foi convencionado para denominar as funções que atendessem às condições acima. Devido ao caráter de reversibilidade das operações de rotação e translação de funções, tal denominação torna-se extensiva a qualquer elemento do sistema obtido a partir da aplicação de tais operações às mesmas. Sendo assim, em um determinado sistema formado por *wavelets* para um determinado espaço, a determinação da função original torna-se uma questão de caráter arbitrário.

Essas considerações deram impulso ao desenvolvimento da teoria de *wavelets*, mas foi na década de 80 que a teoria sofreu um desenvolvimento mais intenso no que diz respeito à construção da descrição matemática. Em 1981, Jean Morlet tentava separar ondas sísmicas refletidas da Terra, identificando os materiais por onde as ondas tinham passado, com o intuito de desenvolver uma melhor maneira de procurar petróleo. A descoberta empírica de Morlet gerou uma inquietação em torno da coerência matemática ou não do novo método. O físico Alex Grossmann trabalhou com Morlet na direção de encontrar fundamento matemático para a nova transformada. De fato, eles descobriram que as ondas decompostas pelo método poderiam ser recompostas a partir das decomposições em *wavelets*. Além disso, a Transformada de *Wavelet* funcionou muito melhor que a de Fourier, pois era menos suscetível a erros de aproximação e truncamento do computador. A seguir, Yves Meyer foi o primeiro a se dar conta da conexão entre as *wavelets* de Morlet e as anteriores. Ele continuou o trabalho gerando *wavelets* com a propriedade de ortogonalidade que permite com que a Transformada de *Wavelet* resulte na Transformada de Fourier. Em 1986, Stéphane Mallat, juntamente com Meyer, demonstrou que as *wavelets* estavam explícitas em processos de Análise de Multirresolução. Graças a Mallat já se podia fazer a Análise de *Wavelets* sem a necessidade de conhecer a fórmula da MW. E, finalmente, a última grande revolução das *wavelets* surgiu com Ingrid Daubechies em 1988, que construiu em seu artigo "*Orthonormal Bases of compactly supported wavelets*" uma classe de *wavelets* que, além de ortogonais, tinha construção mediante a idéia de filtro digital. A essência das *wavelets* de Daubechies é a aplicação de translações diádicas e dilatações binárias às funções originais indexadas por números naturais formando um conjunto de bases ortonormais de suporte compacto para  $L^2(\mathfrak{R})$  no sentido de média quadrática, gerando, assim, um conjunto de MW ortonormais, que são, talvez, as mais elegantes e se tornaram um marco nas aplicações de *wavelets* (GRASP, 1995), (SILVA, 2000) e (HOMSKY et al., 2000).

Para uma perspectiva histórica mais detalhada, MEYER (1993) dá uma retrospectiva desde Fourier. MACKENZIE (2007) traz uma linha do tempo com informações sobre aplicações baseadas no conceito de *wavelet*. Veja também uma lista extensa de aplicações de *wavelets* e uma discussão introdutória sobre o conceito de estacionariedade sem formalismos, abordando a complementaridade da análise via Transformada de *Wavelet* em relação à análise via Transformada de Fourier em OLIVEIRA (2007).

### 3.1.2 Propriedades

Para que uma função *wavelet* seja denominada como tal, é preciso que algumas propriedades sejam satisfeitas:

1.  $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0$ . Essa é a propriedade da *admissibilidade*, que garante que a função *wavelet* tenha uma forma de onda.
2.  $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)|^2 dt = 1$ . Essa é a propriedade da *energia unitária*, que permite que a *wavelet* possua suporte compacto, ou com a amplitude decaindo rapidamente, garantindo a localização espacial.
3. Localização tempo-freqüência das funções *wavelets*. A Transformada de *Wavelet* foi desenvolvida como uma alternativa à STFT, visando solucionar o problema da resolução. As *wavelets* são funções matemáticas que separam dados em suas diferentes componentes no domínio da freqüência e extraem cada componente com uma resolução adequada à sua escala. Essa flexibilidade lhe dá amplas vantagens em relação à Análise de Fourier (GOMES et al., 1987) e (CHUI, 1992).

Além das propriedades destacadas acima, podemos citar algumas vantagens de uso das *wavelets*: a grande quantidade de MW, o que facilita a sua utilização em vários tipos de sinais com uma melhor separação das características da ST; e efi-

ciência computacional, já que muitas Transformadas de *Wavelets* (conjunto de coeficientes) podem ser calculadas eficazmente com  $O(n)$  operações. Segundo CHIERICE (2003), “transformações *wavelets* mais gerais requerem  $O(n\log(n))$ , o mesmo que a FFT”.

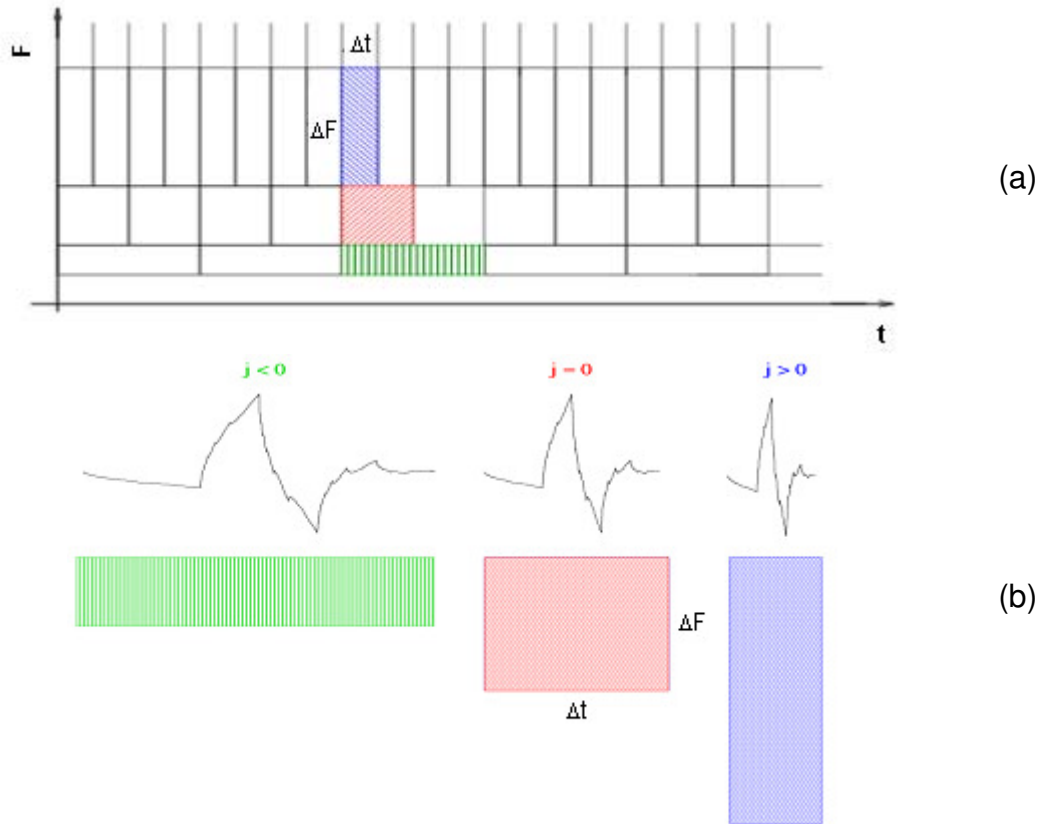


Figura 3.4 – Esquema de um plano tempo x freqüência: (a) variações proporcionais dos intervalos de tempo e de freqüência; (b) dilatação de uma função *wavelet* nos respectivos intervalos.

Fonte: Adaptada de DOMINGUES et al. (2003).

Na Figura 3.4, DOMINGUES et al. (2003), explica com mais detalhes a resolução no plano tempo-freqüência pela análise *wavelet*: “a localização temporal ocorre por ser a função *wavelet* localizada em um intervalo finito. Dessa forma, à medida que a escala aumenta, as funções *wavelets* dessas escalas ficam localizadas em



intervalos de comprimento cada vez menores. Em cada nível de escala, todas as funções *wavelets* possuem a mesma forma, só mudando seus pontos de localização, isto é, transladando. A localização em frequência deve-se à Transformada de Fourier da função *wavelet* poder ser interpretada como um filtro passa-banda. Devido à propriedade de dupla localização das funções *wavelets*, a Transformada de *Wavelet* é dita do tipo local em tempo-freqüência, com resolução temporal e em freqüência inversamente proporcionais”.

Para uma comparação entre a resolução da STFT e a da Transformada de *Wavelet*, veja Figura 3.5:

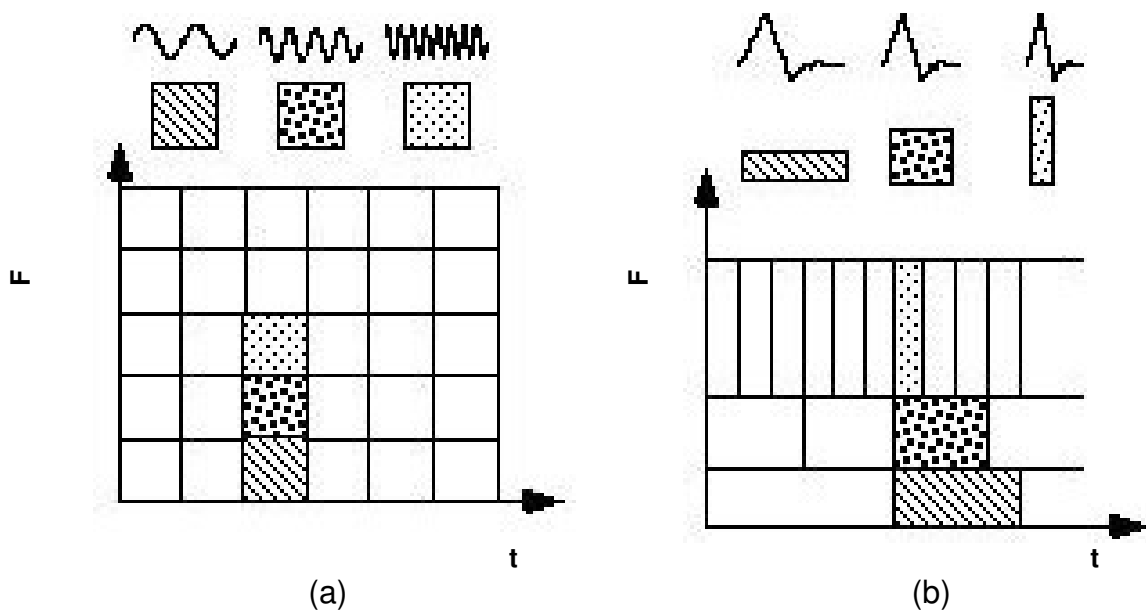


Figura 3.5 – Resolução no plano tempo-freqüência pela análise: (a) Transformada de Gabor (STFT); e (b) Transformada de *Wavelet*.

Fonte: (OLIVEIRA, 2007).

### 3.1.3 Análise *Wavelet*

Enquanto que a análise via Transformada de Fourier não apresenta um caráter local, já que as funções trigonométricas levam em consideração todo o sinal desde

o início ( $-\infty$ ) até o final ( $\infty$ ), as *wavelets* são localizadas no tempo (ou espaço). Segundo MORETTIN (1999), “esse comportamento torna-as ideais para analisar sinais não-estacionários, contendo transitoriedades e estruturas tipo fractais”.

A Transformada de Fourier analisa a contribuição de cada componente harmônica como um todo, o que impossibilita a detecção de efeitos de variações locais no sinal.

Bases de Fourier “são localizadas em freqüência, mas não no tempo: pequenas mudanças em algumas das observações podem provocar mudanças em todas as componentes de uma expansão de Fourier, o que não acontece com uma expansão em séries de ondaletas.” (MORETTIN, 1999).

A idéia na Análise *Wavelet* consiste em aproximar uma função por uma combinação linear de funções básicas (*wavelets*), obtendo assim uma boa representação da função original tanto no domínio temporal quanto no domínio das freqüências. Portanto, enquanto a Análise de Fourier decompõe um sinal em senos e cossenos de várias freqüências, a Análise *Wavelet* é a decomposição de um sinal por meio de escalas (dilatação e compressão) e translação da *wavelet* original (MW), dada por:

$$\psi_{a,b}(t) = |a|^{-1/2} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right), a, b \in \mathfrak{R}, a \neq 0. \quad (3.4)$$

Essas dilatações (ou compressões) e translações de  $\psi$ , geram o espaço  $L^2(\mathfrak{R})$ , cobrindo todo o  $\mathfrak{R}$ . A informação de escala corresponde ao parâmetro  $a$ , onde, para  $a > 1$ , ocorre o efeito de dilatação da função MW e, para  $a < 1$ , ocorre o efeito da compressão da função MW, permitindo a análise tanto dos aspectos locais, quanto globais da ST. Já o conceito de translação de uma função *wavelet* indica o ponto de início dessa função na ST. Esse deslocamento de  $\psi(t)$  é representado

pelo parâmetro  $b$  da seguinte maneira:  $\psi(t-b)$ . À medida que  $b$  varia, a função é analisada pela *wavelet* localmente em torno de  $b$ .

Uma das funções *wavelets* mais conhecidas e estudadas trata-se da *wavelet* de Haar. Sua forma consiste em considerar um sinal constante por partes. A Equação 3.5 descreve uma MW de Haar:

$$\psi^{(H)}(t) = \begin{cases} +1, & 0 \leq t < 1/2 \\ -1, & 1/2 \leq t < 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.4)$$

A Figura 3.6 exemplifica a propriedade da compressão da *wavelet* de Haar, com diferentes valores para  $a$ . Já a Figura 3.7 exemplifica a propriedade de translação da mesma *wavelet*, com diferentes valores para  $b$ .

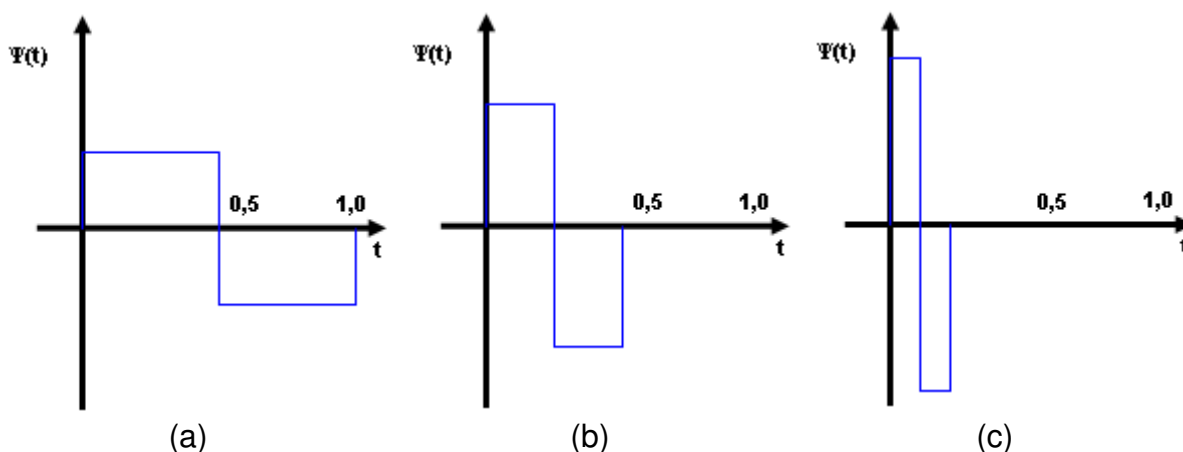


Figura 3.6 – Exemplo de compressão da *wavelet* de Haar: (a)  $a = 1$ ; (b)  $a = 1/2$  e (c)  $a = 1/4$ .

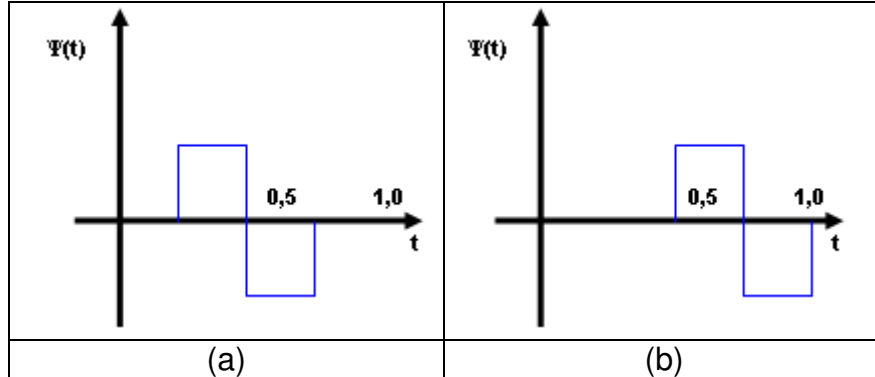


Figura 3.7 – Exemplo de translação da *wavelet* de Haar: (a)  $b = 1/4$  e (b)  $b = 1/2$ .

### 3.1.4 Dilatação binária e translação diádica

Para (HOMSKY et al., 2000), o procedimento de dilatações binárias e translações diádicas consiste em representar tais operações aplicadas à função original  $\psi(t)$  de acordo com a seguinte forma:

$$\psi_{m,k}(t) = \psi(2^m t - k), \quad m, k \in Z. \quad (3.5)$$

A idéia aqui é formar um sistema através de funções cujas freqüências associadas ao índice  $m$  relacionem-se com as demais de acordo com potenciações inteiras na base dois. Esta definição está intimamente ligada à idéia da análise baseada em filtros com escala logarítmica proposta por Morlet e citada na Seção 3.1.1.

É importante ressaltar que, tendo em vista a propriedade de representação em tempo-freqüência, variações no índice  $m$  relacionam-se às medidas dos intervalos nos quais as *wavelets* concentram maior parte de sua oscilação, de forma a se referir a tal índice como sendo relativo ao nível de resolução associado às *wavelets* em estudo. Ou seja, na Equação 3.5, valores menores desse índice referem-se às *wavelets* de alta resolução, adequados à caracterização de fenômenos transitórios associados a uma ST  $A(t)$ .

Considerando na análise MW que representem suporte compacto e que o sistema em questão consista numa base para o espaço  $(L^2(\mathfrak{R}))$ , então, para qualquer ST  $A(t)$  pertencente a tal espaço, existirá  $\{b_{m,k}\}_{m,k \in \mathbb{Z}}$  tal que a soma

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_{m,k} \psi_{m,k}(t) \quad (3.6)$$

convergirá em média quadrática para  $A(t)$ . Denomina-se os coeficientes  $b_{m,k}$  como coeficientes de *wavelets* da  $A(t)$ , em analogia aos coeficientes  $c_n$  relativos à análise de Fourier.

### 3.1.5 Obtenção da Transformada de *Wavelet* de uma ST

1. Escolher uma MW e compará-la com uma seção no começo do sinal original;
2. Calcular o coeficiente *wavelet* a partir da transformada *wavelet*. Quanto menor a amplitude desse coeficiente, melhor é a aproximação entre a *wavelet* e o sinal na seção tomada;

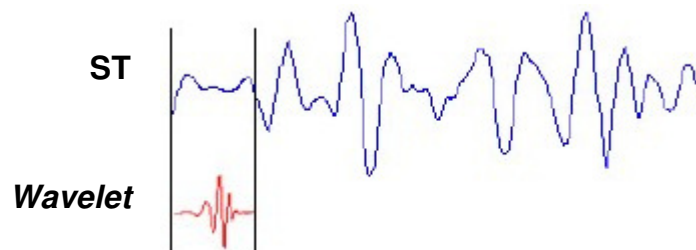


Figura 3.8 – Análise *wavelet* em uma seção de uma ST.

Fonte: (CHIERICE, 2003). Adaptada.

3. Tomar a próxima seção do sinal e novamente repetir os passos 1 e 2 até cobrir, de seção em seção, todo o sinal;

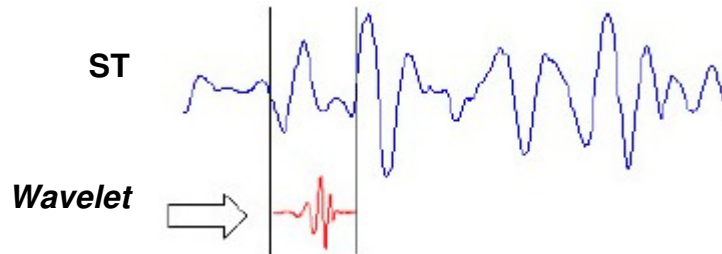


Figura 3.9 – Análise *wavelet* em outra seção de uma ST.  
 Fonte: (CHIERICE, 2003). Adaptada.

4. Ajustar uma nova escala para a *wavelet* (dilatatar ou comprimir) e repetir os passos de 1 a 3;

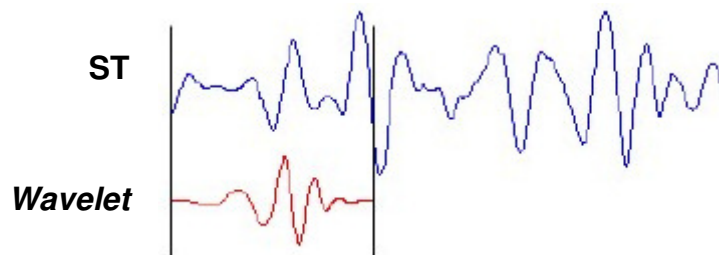


Figura 3.10 – Análise *wavelet* na seção inicial da ST, mas em outra escala.  
 Fonte: (CHIERICE, 2003). Adaptada.

5. Repetir os passos de 1 a 4 para todas as escalas da *wavelet* (tantas vezes quanto for possível ou desejado).

Assim, teremos produzido coeficientes *wavelet* em diferentes escalas e seções do sinal. Os coeficientes *wavelets* das escalas maiores estão associados às *wavelets* mais dilatadas e, escalas menores a *wavelets* mais comprimidas. Quanto mais dilatada for a *wavelet*, maior será a seção do sinal com o qual ela estará sendo comparada e, logo, as características mais visíveis estão sendo medidas pelos coeficientes *wavelets*.

Portanto, é possível fazer uma correspondência entre as escalas *wavelet* e a frequência revelada pela análise *wavelet*, conforme a Tabela 3.1.

Tabela 3.1 – Correspondência entre escalas e frequências na análise *wavelet*.

Pequenas escalas	Grandes escalas
<i>Wavelets</i> mais comprimidas	<i>Wavelets</i> mais dilatadas
Detalhes rapidamente variáveis	Características mais visíveis mudando lentamente
Alta frequência no sinal	Baixa frequência no sinal

### 3.1.6 Transformada Contínua de Wavelet

Matematicamente, a Transformada Contínua de *Wavelet* (CWT, do inglês *Continuous Wavelet Transform*) é definida em termos de uma integral de convolução entre a ST analisada  $A(t)$  e a MW, na seguinte forma:

$$CWT_{A(a,b)} = \langle A(t), \psi_{a,b}(t) \rangle = \int A(t) \cdot \psi_{a,b}(t) \cdot dt, \quad (3.7)$$

onde  $\psi_{a,b}(t)$  é a Equação 3.4.

A CWT mede similaridade entre a ST e a MW  $\psi_{a,b}(t)$  de maneira contínua, variando-se apropriadamente os parâmetros de escala e translação.

Através da Transformada Contínua Inversa de *Wavelet* (ICWT, do inglês *Inverse Continuous Wavelet Transform*) é possível obter, a partir dos coeficientes *wavelets*, a ST novamente. A ICWT é obtida pela Equação 3.8:

$$A(t) = \frac{1}{c_h} \iint CWT(a,b) \psi_{a,b}(t) \frac{da \cdot db}{a^2}, \quad (3.8)$$

onde  $c_h$  é uma constante que depende de  $\psi(t)$ .

As *wavelets* podem assumir diversas formas. A escolha da MW é um fator importante. Para DOMINGUES (2003), “não existe receita única para esse procedimento”, porém neste trabalho citado são indicadas algumas recomendações.

### 3.1.7 Transformada Discreta de Wavelet

O cálculo dos coeficientes de todas as possíveis escalas requer um enorme esforço computacional e gera informação redundante, uma vez que os dados no computador são discretos e resolve-se a integral por métodos numéricos. A CWT de um sinal de uma dimensão gera uma representação de duas dimensões no espaço tempo-escala.

Uma alternativa à CWT é a utilização de parâmetros de escalonamento e translação discretos. A esta análise dá-se o nome de Transformada Discreta de *Wavelet* (DWT, do inglês *Discrete Wavelet Transform*).

A DWT de uma ST  $A(t)$  é definida como:

$$DWT(m, k) = d_{m,k} = \int_{-\infty}^{\infty} A(t) \cdot \psi_{m,k} dt, \quad (3.9)$$

onde  $\psi_{m,k}$  forma uma base de funções *wavelets* criadas a partir da função MW  $\psi_{a,b}(t)$ , mediante parâmetros de dilatação e translação discretos ( $m$  e  $k$ , respectivamente).

Como exemplo, uma *wavelet* de Daubechies possui a seguinte forma:

$$\psi_{m,k} = \frac{1}{\sqrt{a_0^m}} \psi\left(\frac{t}{a_0^m} - kb_0\right) = \frac{1}{\sqrt{a_0^m}} \psi\left(\frac{t - ka_0^m b_0}{a_0^m}\right), \quad (3.10)$$



onde  $a_0$  e  $b_0$  são constantes e pertencem ao conjunto dos inteiros. Os parâmetros de dilatação e translação são  $m$  e  $k$ , respectivamente. E as constantes  $a_0$  e  $b_0$  dão a variação e o passo da translação, respectivamente.

Uma escolha feita para as constantes  $a_0$  e  $b_0$  são  $a_0 = 2$  e  $b_0 = 1$ . Desta forma, temos a *wavelet* diádica, amostrada a uma taxa  $2^m$ . Também se escolhe que as componentes  $\psi_{m,k}$  do conjunto de funções *wavelets* sejam funções ortogonais e reais. A função  $\psi_{m,k}$  será ortogonal se, e somente se:

$$\langle \psi_{m,k}, \psi_{m,p} \rangle = \delta(k - p) = \begin{cases} 1, & k = p \\ 0, & k \neq p \end{cases}. \quad (3.11)$$

Assim, temos:

$$\psi_{m,k} = \frac{1}{\sqrt{2^m}} \psi\left(\frac{t - 2^m k}{2^m}\right), \quad (3.12)$$

com  $m, k \in I$  e tem-se uma escala de dilatação como potência de dois ( $a_m = 2^m$ ), com passos de translação de uma amostra da escala de dilatação ( $b_k = 2^m k$ ).

A reconstrução da ST  $A(t)$  através dos coeficientes *wavelets* exige uma escolha muito especial de  $\psi(t)$ . DAUBECHIES (1990) provou que a condição necessária e suficiente para a reconstrução do sinal dos coeficientes *wavelets* é que a energia, somatório do módulo ao quadrado da  $DWT(m, k)$ , deve estar entre dois limites positivos:

$$P\|A\|^2 \leq \sum_{m,k} \left| \langle A, \psi_{m,k} \rangle \right|^2 \leq Q\|A\|^2, \quad (3.13)$$

onde  $\|A\|^2$  é a energia de  $A(t)$ ,  $P > 0$  e  $Q < \infty$ .

Se a condição da Equação 3.13 é satisfeita,  $\psi_{m,k}(t)$  é um frame, e  $P$  e  $Q$  são os limites deste frame (SHENG, 1996). Se  $P = Q$ , a energia da Transformada de *Wavelet* é proporcional à energia da ST e as *wavelets* se comportam como bases ortogonais, com a reconstrução da ST dada pela equação abaixo (DAUBECHIES, 1990):

$$A(t) = \frac{2}{P+Q} \sum_m \sum_k c_{m,k} \psi_{m,k}(t) \quad (3.14)$$

### 3.2 Análise de Multirresolução por Wavelets (WMA)

Uma maneira eficiente de aplicar a DWT é através de filtros – técnica desenvolvida por MALLAT (1989b) – onde se tem a decomposição da *wavelet* implementando a WMA. Esta técnica permite analisar ST em múltiplas bandas de freqüências (SHENG, 1996).

Para muitas ST, é mais importante analisar as componentes de baixa freqüência, pois elas são as que contêm mais informação. Já as altas freqüências possuem alguns detalhes importantes, comunicando as nuances do sinal. Se considerarmos, por exemplo, a voz humana, ao remover os componentes de alta freqüência, a voz será alterada, mas ainda assim, poderemos reconhecer o que está sendo dito; já se removermos as componentes de baixa freqüência, se ouvirá um ruído agudo.

O princípio fundamental da WMA consiste em analisar a ST sinal através da combinação de uma função de escala<sup>10</sup>  $\phi(t)$  e *wavelets*  $\psi(t)$ . A função *wavelet* está relacionada a um filtro passa-alta, a qual produz os coeficientes de detalhes da decomposição *wavelet*; já a função de escala ou escalonamento está associada com os coeficientes de aproximação da decomposição da *wavelet*. Essa idéia é essencial na codificação em sub-bandas e na Análise de Multirresolução (MALLAT, 2000). A representação multiescala é um ingrediente essencial na extração eficiente de informações a partir de uma observação (OLIVEIRA, 2007).

Uma WMA em  $L^2(\mathfrak{R})$  consiste numa seqüência de subespaços fechados  $V_m \subset L^2(\mathfrak{R})$ ,  $m \in Z$ , satisfazendo as seguintes relações:

$$1. \dots V_{m+2} \subset V_{m+1} \subset V_m \dots$$

Considere que a função de escalonamento  $\phi(t)$  é contínua e geralmente real. Esta função não satisfaz a condição de admissibilidade, ou seja:

$$\int \phi(t) dt = 1. \quad (3.15)$$

A função de escalonamento  $\phi(t)$  é dilatada pelo fator de escala diádica:

$$\phi_{m,p} = 2^{-m/2} \phi(2^{-m} t - p). \quad (3.16)$$

Os coeficientes de aproximação  $c_{m,p}$ , de uma função  $A(t)$  são dados por:

$$c_{m,p} = \langle A, \phi_{m,p} \rangle, \quad (3.17)$$

---

<sup>10</sup> A função de escala foi introduzida por MALLAT (1989b). Através dessa função é possível calcular um filtro passa-baixa.

onde  $m$  indica o nível de dilatação e  $p$  a translação.

A projeção de um sinal  $A(t)$  na base ortogonal  $\phi(t)$  forma um subespaço  $V_0$  que é uma aproximação “borrada” de  $A(t)$  (SHENG, 1996). A função dilatada  $\phi(t/2)$  gera um subespaço  $V_1$  de dilatação  $m=1$ , sendo que  $V_1 \subset V_0$ . A base deste subespaço é  $\phi_{1,p}(t)$ .

Este processo pode ser repetido sucessivamente, formando subespaços para diferentes níveis de dilatação  $m$ . A dilatação dos espaços é  $2^m$  e o facto que  $V_{m+1} \subset V_m$  significa que ao passar do nível de decomposição  $m$  para o nível de resolução  $(m+1)$ , perdemos informação (ou retiramos “detalhes”). À medida que o nível de decomposição diminui, a função aproximada converge para a função original e obtemos a relação (ii), a seguir.

$$2. L^2(\mathfrak{R}) = \overline{\bigcup_m V_m}$$

Quando aproximamos  $A$  a níveis de decomposição cada vez maiores, perdemos informação, ou seja, a aproximação de  $A$  converge para a função nula e temos a relação (iii).

$$3. \bigcap_m V_m = \{0\}$$

$$4. A(t) \in V_m \Leftrightarrow A(t/2) \in V_{m+1} \quad \forall m$$

Existe uma função  $\phi \in L_2(\mathfrak{R})$  (a função escala) (MALLAT, 1989a,b), tal que

$\{\phi_{m,k}(t), k \in \mathbb{Z}\}$  é uma base ortonormal de  $V_m$ .

Assim, a informação que é perdida, ao irmos de  $V_m$  para  $V_{m+1}$ , pode ser representada pelo espaço  $W_{m+1}$ , complemento ortogonal de  $V_{m+1}$  em  $V_m$ . Veja a relação (v) a seguir.

$$5. V_m = V_{m+1} \oplus W_{m+1}, \quad W_{m+1} \perp V_{m+1}$$

A operação  $\oplus$  representa soma direta. Ao contrário dos subespaços de escala  $V_m$  que são aninhados,  $V_m \cap V_{m'} = V_{\text{MAX}\{m,m'\}}$ , os subespaços *wavelets* são essencialmente disjuntos, isto é,  $W_m \cap W_{m'} = \{0\}$ ,  $m \neq m'$ .

Assim, lembrando que  $\dots V_{m+2} \subset V_{m+1} \subset V_m \dots$  e partindo iterativamente da definição do espaço  $W_m$ , temos:

$$\begin{aligned} V_m &= V_{m+1} \oplus W_{m+1} \\ V_m &= V_{m+2} \oplus W_{m+2} \oplus W_{m+1} \\ V_m &= V_{m+3} \oplus W_{m+3} \oplus W_{m+2} \oplus W_{m+1} \\ &\dots \end{aligned} \tag{3.18}$$

Ou seja, uma dada resolução é atingida pela soma ou subtração dos detalhes. Dada uma ST  $A$  de  $L^2(\mathfrak{X})$ , existe um  $m$  tal que  $A_m \in V_m$  aproxima  $A$ . Se  $A'_i \in W_i$  e  $A_i \in V_i$ , através da relação (v) e da Equação 3.18 acima, temos:

$$A \cong A_m = A'_{m+1} + A'_{m+2} + \dots + A'_{m+n} + A_{m+n}, \tag{3.19}$$

onde  $n$  é o nível máximo da decomposição. Veja a Figura 3.11 para visualizar um esquema dos subespaços  $V$  e  $W$  numa WMA em três níveis.

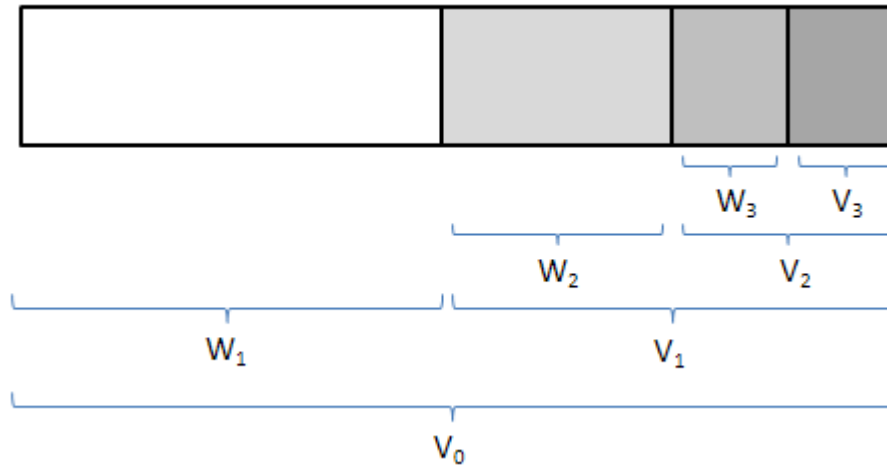


Figura 3.11 – Subespaços  $V$  (função escala) aninhados e subespaços  $W$  (função wavelet) disjuntos.

A WMA está intimamente relacionada com o algoritmo piramidal de Laplace usado na decomposição e reconstrução de *wavelets* (BURT e ADELSON, 1983).

Pela Equação 3.19 e decompondo-se as ST  $A'$  e  $A$  nas diversas escalas em termos das bases dos sinais dos subespaços  $V$  e  $W$ , temos:

$$A_m(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{m,k} \phi(2^m t - k) \text{ e } A'_m(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{m,k} \psi(2^m t - k). \quad (3.20)$$

Tem-se, portanto,

$$\begin{aligned} c_{m,k} &= 2^{-m} \langle A_m(t), \phi(2^m t - k) \rangle \\ d_{m,k} &= 2^{-m} \langle A'_m(t), \psi(2^m t - k) \rangle. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Denota-se por  $c_m = \{c_{m,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$  e  $d_m = \{d_{m,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ , sendo que os coeficientes  $\{c_{m,k}\}$  captam as oscilações de baixa frequência, enquanto que  $\{d_{m,k}\}$  captam as oscilações de alta frequência.

### 3.2.1 Decomposição multi-nível

O processo de filtragem, em seu nível mais básico, pode ser ilustrado na Figura 3.12, onde a ST original  $S$  passa por dois filtros complementares que resulta em dois novos sinais. Mallat, em um de seus artigos (MALLAT, 1989b), analisou a decomposição multidimensional de imagens utilizando os filtros passa-baixa e passa-alta. Através dos coeficientes do filtro passa-baixa, ele obteve uma aproximação das imagens originais analisadas; através do filtro passa-alta, obteve os coeficientes da *wavelet* para cada detalhe das imagens, como as bordas, por exemplo.

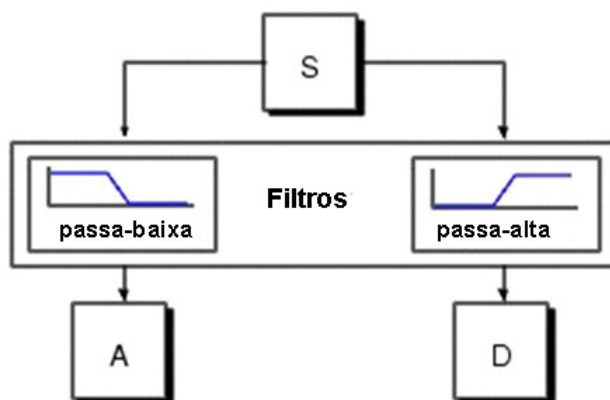


Figura 3.12 – Processo de filtragem, através do qual são escolhidas as frequências a serem filtradas.

Executando essa operação em uma ST temos no final duas vezes mais dados do que antes da aplicação dos filtros. Porém, existe uma maneira sutil de executar

essa decomposição usando *wavelets*: analisando cuidadosamente a computação, podemos excluir um a cada dois pontos de cada uma das amostras e mesmo assim obter informações bem completas da ST de entrada. Essa é a noção de decimação ou *downsampling*. De acordo com OPPENHEIN et al. (1989), “a decimação é uma operação que diminui a taxa de amostragem do sinal. Em outras palavras, significa eliminar dados ou pontos intercalados”. Decimar um sinal pelo fator dois, significa que a cada dois pontos, um é eliminado (sub-amostrado por um fator de dois), obtendo-se metade do sinal original. No processo de decimação, aumenta-se o tamanho do período de amostragem do sinal, e conseqüentemente, diminui-se a taxa de amostragem (PARRAGA, 2002).

Os filtros digitais utilizados na WMA têm como característica filtrar e decimar o sinal, respectivamente. O processo de filtragem associado à decimação está representado na Figura 3.13. Tem-se no primeiro bloco a ST original com 1000 pontos. A ST passa pelos filtros passa-baixa e passa-alta, sofrendo decimação e dando origem aos coeficientes *wavelets* – cA (coeficientes de aproximação) e cD (coeficientes de detalhes) – cada um com metade da dimensão da ST original. A Figura 3.14 demonstra um exemplo da obtenção de três níveis dos coeficientes de uma ST estocástica de 1024 pontos.

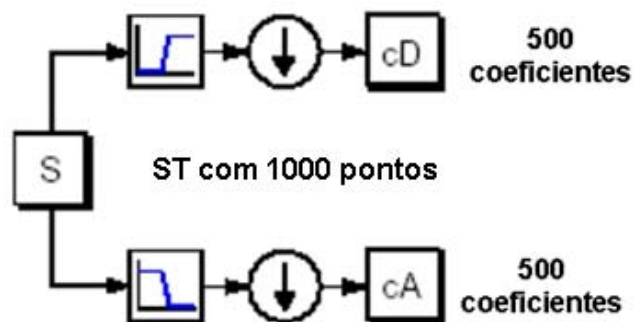


Figura 3.13 – Processo de filtragem associado à decimação, onde os componentes de baixa ou alta frequência possuem metade do tamanho da série original.



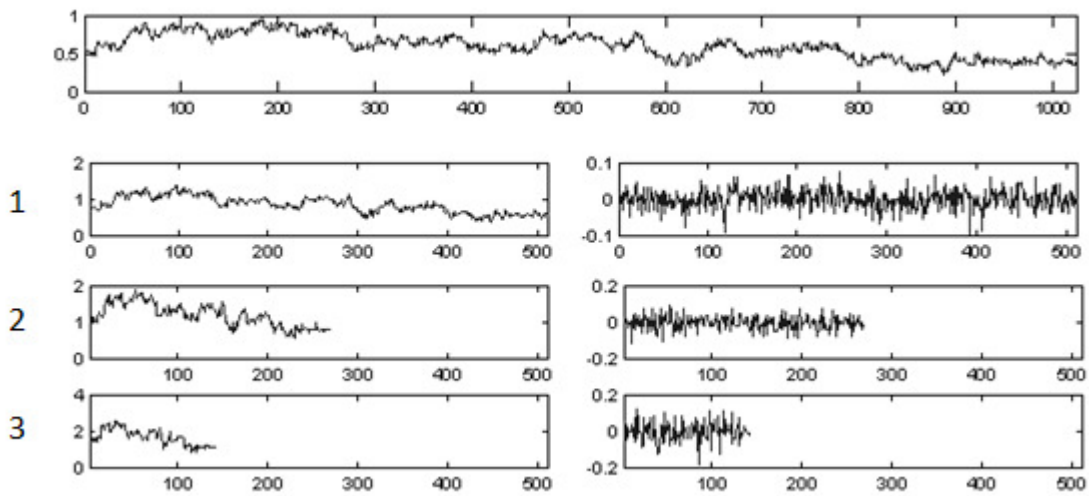


Figura 3.14 – Processo de filtragem associado à decimação de uma ST.

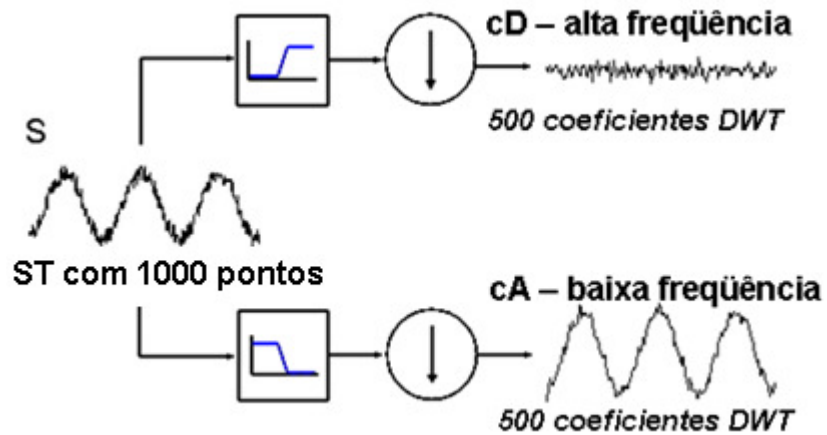


Figura 3.15 – Exemplo da aplicação da DWT em uma ST real.

A Figura 3.15 acima exemplifica também a aplicação da DWT, pois demonstra o resultado da aplicação da DWT em uma ST real composta por uma senóide com ruídos de alta frequência adicionados a ela.

A implementação da DWT pode ser introduzida como uma decomposição em sub-bandas, ou seja, o processo de decomposição é iterativo com sucessivas decomposições nos coeficientes de aproximação, permitindo a visualização da ST em resoluções cada vez menores. Desta forma, obtém-se a árvore de decomposição *wavelet* multi-nível. Esta decomposição em sub-bandas pode ser vista como uma estrutura de banco de filtros e esta pode ser implementada como mostra a Figura 3.16:

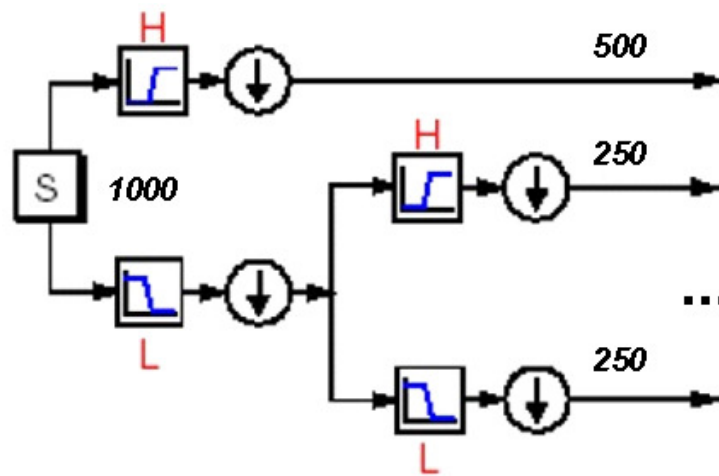


Figura 3.16 – Decomposição em sub-bandas.

Para a visualização esquemática da árvore de decomposição *wavelet* multi-nível, veja a Figura 3.17, abaixo.

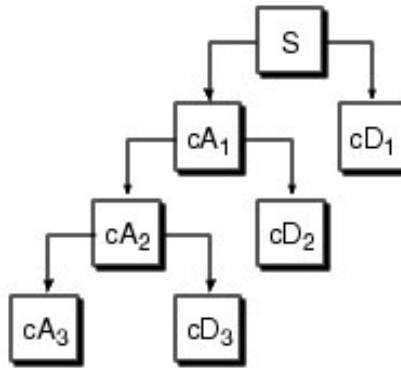


Figura 3.17 – Esquema da árvore de decomposição *wavelet* multi-nível de uma ST.

A decomposição é executada iterativamente até que o detalhe consista de uma única amostra, determinando a quantidade de níveis de decomposição. Por outro lado, essa quantidade de níveis de decomposição é determinada de forma mais apropriada de acordo com a natureza do sinal, ou no critério de entropia do sinal (para maior aprofundamento, ver COIFMAN e WICKERHAUSER (1992)).

### 3.2.2 Reconstrução multi-nível

Também é possível através dos componentes da decomposição, reconstruir a ST sem perda de informação. Esse é o processo de *reconstrução* ou *síntese*. Essa manipulação matemática é a chamada Transformada Discreta Inversa de *Wavelet* (IDWT – *Inverse Discrete Wavelet Transform*), que permite a reconstrução da ST a partir dos coeficientes obtidos na análise.

Enquanto que a análise *wavelet* envolve filtrar e fazer o *downsampling*, a reconstrução *wavelet* executa o *upsampling* e filtragem, conforme Figura 3.18. *Upsampling* é o processo de aumentar o segmento do sinal inserindo zeros entre as amostras (veja exemplo na Figura 3.19).

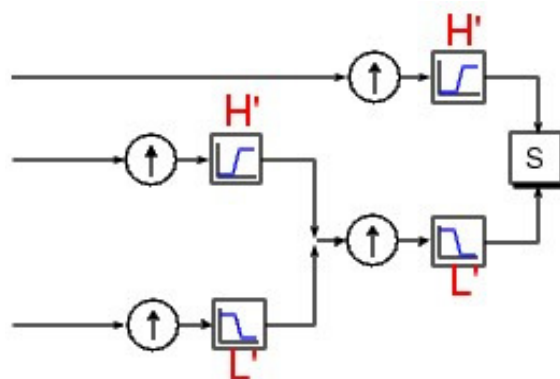


Figura 3.18 – Esquema de reconstrução do sinal.

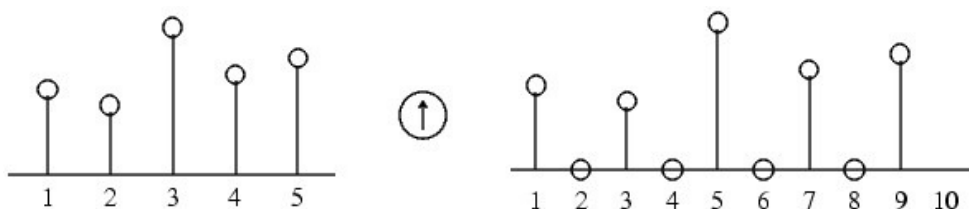


Figura 3.19 – Processo inverso ao do *downsampling*: *upsampling*, fator 2.

A parte de filtragem na reconstrução também gera algumas discussões porque é a escolha do filtro que é crucial para a reconstrução perfeita do sinal. O *downsampling* executado durante a fase de decomposição introduz uma distorção que é contornada se os filtros de decomposição e reconstrução escolhidos forem relacionados entre si (mas não necessariamente, idênticos), de tal forma que esse problema é contornado. Para mais informações sobre como são implementados esses filtros, veja (STRANG e NGUYEN, 1996).

Os filtros de decomposição passa-baixa ( $L$ ) e passa-alta ( $H$ ), juntamente com seus respectivos filtros de reconstrução ( $L'$  e  $H'$ ), formam um sistema que é cha-

mado Filtro de Quadratura Espelhado<sup>11</sup> (QMF, do inglês *Quadrature Mirror Filters*).  
 Veja esquema na Figura 3.20.

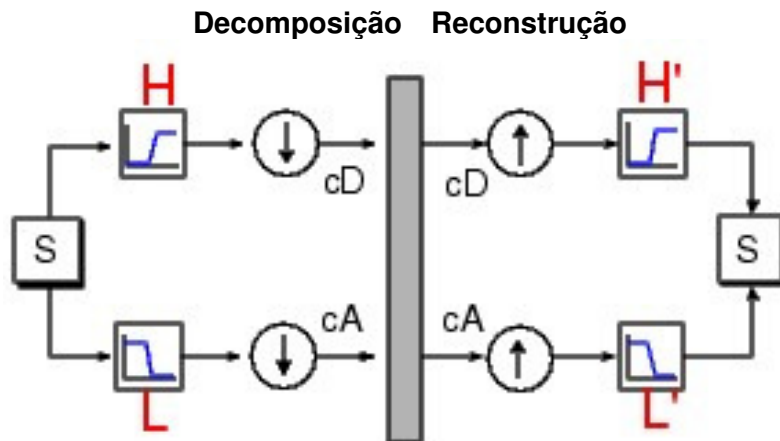


Figura 3.20 – Filtro de Quadratura Espelhado (QMF).

Como pode ser visto na Figura 3.21, podemos então reconstruir o sinal através dos coeficientes de aproximação e de detalhes.

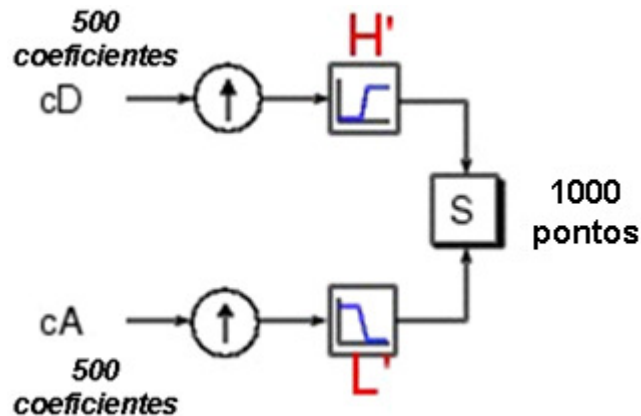


Figura 3.21 – Reconstrução do sinal  $S$  através de seus coeficientes de aproximação e detalhes.

<sup>11</sup> O filtro de quadratura espelhado é um filtro muito utilizado para reconstruir um sinal a partir de seus coeficientes *wavelets* (MALLAT, 1989b).

Além disso, podemos reconstruir também a aproximação e os detalhes com seus respectivos coeficientes. Como exemplo, vamos demonstrar a reconstrução do primeiro nível de aproximação  $A_1$  através do conjunto de coeficientes  $cA_1$ . Esses coeficientes passam pelo mesmo processo de reconstrução do sinal. Entretanto, ao invés de combiná-los com os coeficientes de detalhes do primeiro nível, colocamos um conjunto de zeros no lugar dos coeficientes de detalhes. Veja a Figura 3.22.

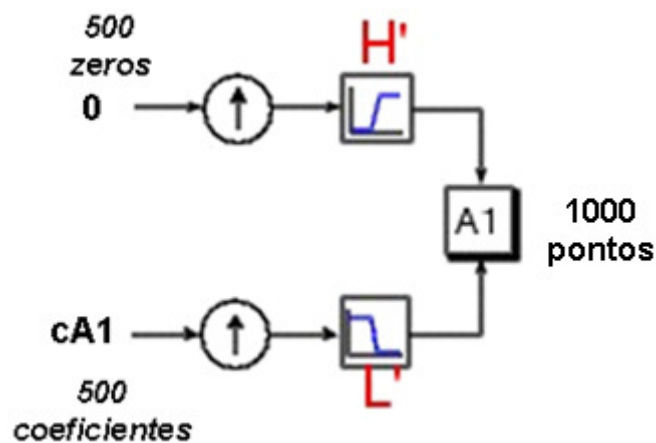


Figura 3.22 – Reconstrução do primeiro nível de resolução aproximado  $A_1$ .

O processo produz uma aproximação reconstruída  $A_1$ , que tem o mesmo tamanho do sinal original  $S$  e que é uma aproximação real do mesmo. Através de um processo análogo, podemos fazer a reconstrução do primeiro nível de detalhes. Veja Figura 3.23.

Os componentes de detalhes e os de aproximações reconstruídos são os verdadeiros constituintes do sinal original. De fato,  $A_1 + D_1 = S$ .

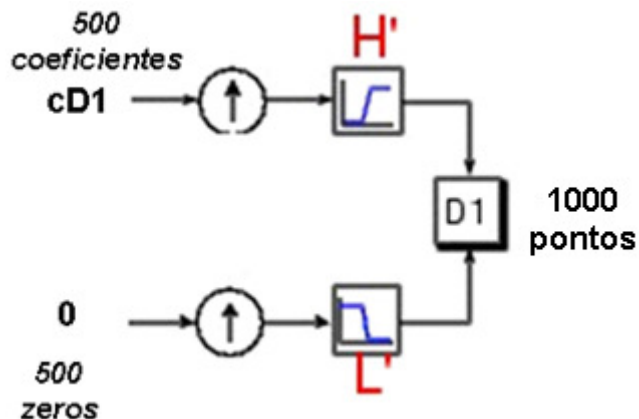


Figura 3.23 – Reconstrução do primeiro nível de resolução de detalhes  $D_1$ .

Observe que os coeficientes  $cA_1$  e  $cD_1$ , não podem ser combinados diretamente para recompor o sinal, porque eles foram produzidos pelo *downsampling* e possuem somente metade do tamanho do sinal original. Antes de combiná-los é necessário reconstruir os componentes de detalhes e os de aproximações. Finalmente, podemos estender esse raciocínio para uma análise multi-nível. Veja Figura 3.24.

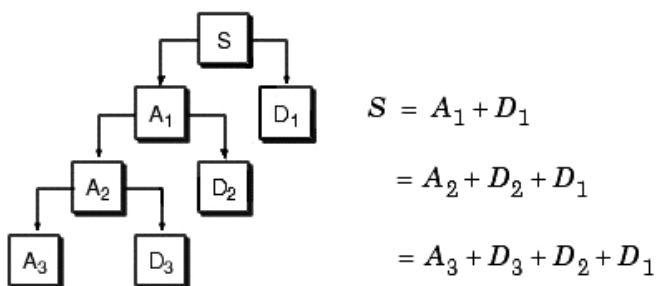


Figura 3.24 – Componentes do sinal reconstruído.

Neste trabalho estamos interessados em classificar assimetrias em ST, sendo algumas não-estacionárias. Portanto, é conveniente fazer a análise multi-nível em

componentes de aproximação. Mais detalhes serão tratados no Capítulo 4. Na próxima seção é abordada a Análise de Padrões-Gradiente em ST.

### 3.3 Análise de Padrões-Gradiente (GPA) para ST

O principal objetivo da GPA é quantificar assimetrias em escalas locais e globais de um dado perfil temporal, espacial ou espaço-temporal, por meio de uma operação computacional que caracteriza padrões – através das medidas de pequenas e grandes amplitudes em tais padrões – como grades gradientes (ou uma seqüência de matrizes) (ROSA et al., 1999; ROSA et al., 2000; ASSIREU et al., 2002; ROSA et al., 2003; BARONI et al., 2006b; ROSA et al., 2007). Essa grade gradiente é representada por uma matriz denominada, matriz das amplitudes:

$$M_A = M_A(1,1), \dots, M_A(i, j), \dots, M_A(\sqrt{N}, \sqrt{N}) \mid i, j \in I \text{ e } M_A \in \mathfrak{R}, \quad (3.22)$$

onde  $N$  é o tamanho da série temporal. A matriz quadrada  $M_A$ , possui dimensões espaciais  $(x, y)$ , discretizadas em  $\sqrt{N} \times \sqrt{N}$  pontos, com  $1 \leq i \leq \sqrt{N}$  e  $1 \leq j \leq \sqrt{N}$ .

Usualmente, cada intensidade da amplitude  $M_A(i, j)$ , na matriz de amplitudes, representa uma medida local de energia espacialmente distribuída (por exemplo: velocidade relativa, taxa de concentração, intensidade de emissão, temperatura, etc.). A flutuação espacial do padrão global  $M_A(i, j)$ , para um dado instante  $t$ , pode ser caracterizada através do campo vetorial gradiente  $G_t = \nabla[M_A(x, y)]_t$ . Uma flutuação espacial local, entre um par instantâneo de intensidades e pertencentes ao padrão global, é caracterizada por seu vetor gradiente, definido entre cada par de pontos da grade bi-dimensional. Nesta representação, os valores relativos entre as amplitudes (que determinam a norma e a orientação de cada vetor) são mais relevantes do que os seus valores absolutos.



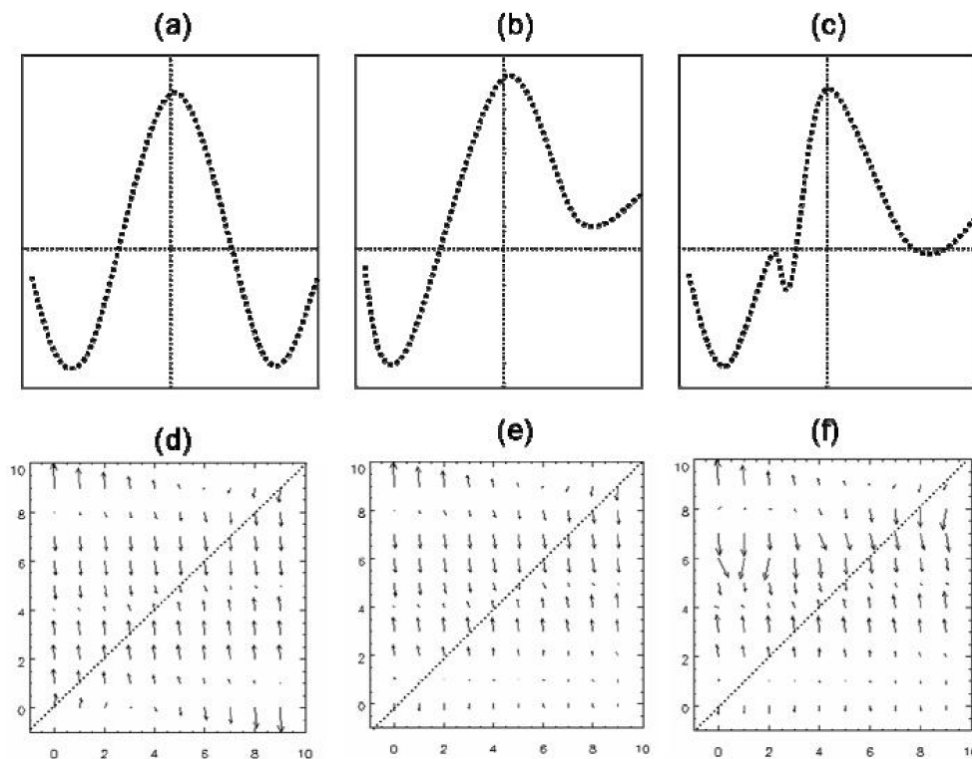


Figura 3.25 – Três exemplos de perfis de amplitudes compostas de 100 pontos e seus respectivos padrões-gradientes.

Nesse trabalho usamos o conceito de simetria para análise em ST, conforme ASSIREU et al., (2002). O conceito de simetria gradiente é ilustrado na Figura 3.25. A Figura 3.25(a) mostra um perfil totalmente simétrico em relação ao eixo vertical.

O perfil simétrico da Figura 3.25(a) é composto por 100 pontos de modo que a sua matriz quadrada tem a forma  $10 \times 10$  (veja a Figura 3.27, onde é mostrado como é feito o mapeamento dos valores da ST para o formato de matriz). O padrão gradiente correspondente a esse perfil é mostrado na Figura 3.25(d). Levando em consideração um eixo diagonal nesse campo gradiente, podemos observar que para cada vetor local  $\underline{v}$  da grade vai existir um vetor correspondente  $-\underline{v}$  com o mesmo módulo, mas com fase oposta – denominados vetores simétricos. Assim, se removermos os pares simétricos para quantificar assimetria, ao final da operação, não

haverá vetores remanescentes no padrão gradiente. As Figuras 3.25(b), 3.25(c) são exemplos de perfis assimétricos e seus padrões-gradientes podem ser visualizados nas Figuras 3.25(e), 3.25(f), respectivamente.

A Figura 3.26 demonstra como é feito o mapeamento da ST para a matriz correspondente e o seu respectivo padrão-gradiente. Como exemplo, uma ST contendo 100 pontos corresponde a uma matriz de tamanho  $10 \times 10$ , onde cada linha da matriz é um grupo de 10 pontos seqüenciais da ST, tomados da esquerda para a direita. Como mostrado em (ASSIREU et al., 2002), os valores de  $G_A$  calculados a partir dessas matrizes não dependem da direção da ST como são tomados (da direita para a esquerda ou vice-versa).

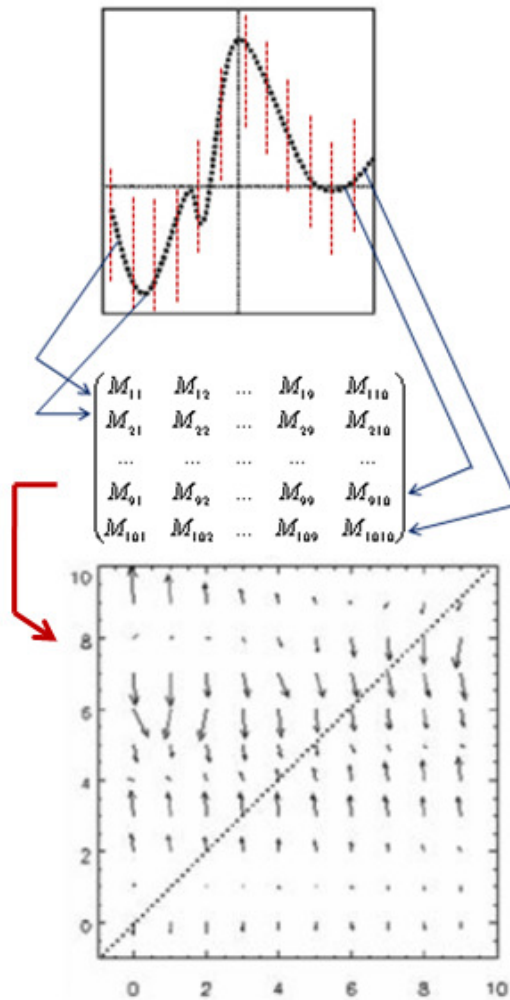


Figura 3.26 – Metodologia para mapear a ST de tamanho  $N$  numa matriz quadrada de ordem  $\sqrt{N} \times \sqrt{N}$ . No exemplo temos uma ST de 1024 pontos distribuídos em uma matriz.

### 3.3.1 Coeficiente de Assimetria Gradiente

A medida do gradiente global de vetores assimétricos, denominada aqui de *Coeficiente de Assimetria Gradiente*<sup>12</sup>  $G_A$ , é dado por:

<sup>12</sup> Esse é um dos quatro momentos gradientes apresentados por (ROSA et al., 2003). É importante ressaltar que esses momentos possuem a propriedade de serem invariantes globalmente em relação à rotação da grade e modulação da amplitude.

$$G_A = \frac{N_C - N_V}{N_V}, \quad (3.23)$$

onde  $N_C > N_V$ .  $N_V$  é o número total de vetores assimétricos remanescentes após a remoção dos pares simétricos e  $N_C$  é o número de conexões entre esses vetores (gradientes locais). Como o perfil mostrado na Figura 3.25(a) é totalmente simétrico, o gradiente assimétrico não existe e seu coeficiente de assimetria gradiente é nulo ( $G_A \equiv 0$ ). Esse operador computacional mede a quebra de simetria de uma dada grade de flutuação e tem sido usado em várias aplicações (ROSA et al., 1999; ROSA et al., 2000; ASSIREU et al., 2002; ROSA et al., 2003; BARONI et al., 2006a,b; ROSA et al., 2007). A Figura 3.27 mostra um diagrama que ilustra a seqüência de passos para o cálculo do coeficiente de assimetria para uma ST.

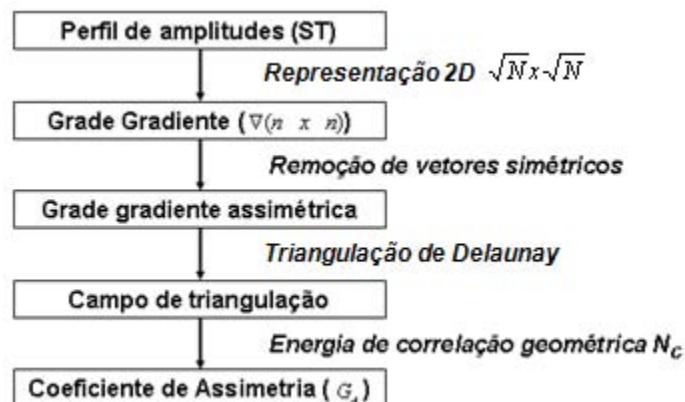


Figura 3.27 – Passos para calcular o coeficiente de assimetria gradiente.

Cada gradiente local é obtido pela computação de

$$\frac{d(M_A(i, j))}{di} \text{ e } \frac{d(M_A(i, j))}{dj} \quad (3.24)$$

da matriz, que representam as diferenças de amplitudes do perfil nas direções  $i$  (linha) e  $j$  (coluna), respectivamente. O espaçamento entre os pontos em cada direção é assumido como um. Uma rotina protótipo desse tipo de gradiente e a rotina clássica do campo de triangulação de Delaunay podem ser encontradas em (ASSIREU et al., 2002) e (BARBER, 1996), respectivamente.

A conexão geométrica entre os vetores é gerada pela triangulação de Delaunay, tomando o ponto final de cada vetor assimétrico como vértice. Devido às possíveis mudanças nas fases de cada gradiente local (um vetor na grade gradiente), a quantidade  $N_C$  é muito sensível para detectar flutuações assimétricas locais na grade (ROSA et al., 1999) e, conseqüentemente, no perfil original. Essa triangulação e sua sensibilidade podem ser observadas na Figura 3.28.

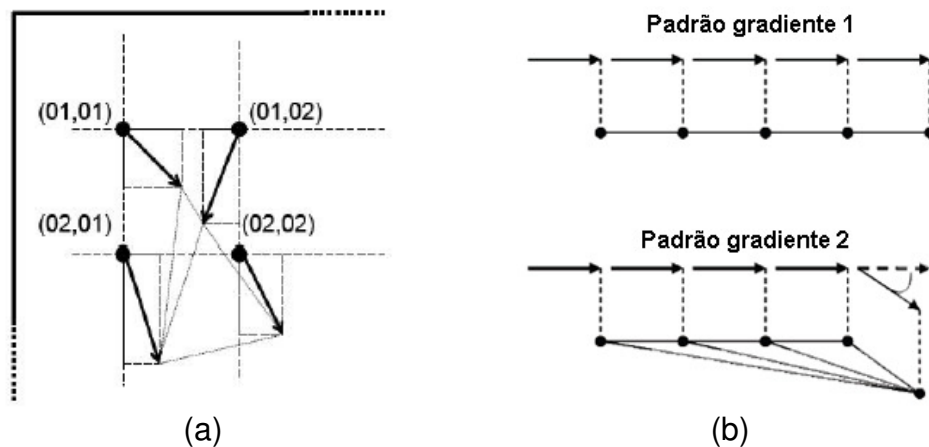


Figura 3.28 – (a) Um exemplo arbitrário de uma triangulação local de Delaunay entre quatro vetores locais em sua grade gradiente correspondente; (b) Um exemplo da sensibilidade da triangulação para detectar mudanças na fase do padrão gradiente.

Vários testes em padrões randômicos têm mostrado que o coeficiente  $G_A$  quantifica de maneira eficiente o nível de assimetria do perfil. Além disso,  $G_A$  é muito mais sensível e preciso para caracterizar estruturas complexas e irregulares do que medidas de correlação (ROSA et al., 1999). Quando não há flutuação assimétrica num padrão gradiente, o número total de vetores assimétricos é zero, e por definição  $G_A$  é nulo. Para um padrão gradiente randômico e totalmente desordenado,  $G_A$  tem o valor mais alto e seu valor cresce assintoticamente até 2 (ROSA et al., 1999), ou seja  $G_A$  é máximo quando todas as fases e normas são diferentes na grade gradiente. Para um padrão complexo composto de flutuações assimétricas locais,  $G_A$  é não nulo e define classes de flutuação complexa.

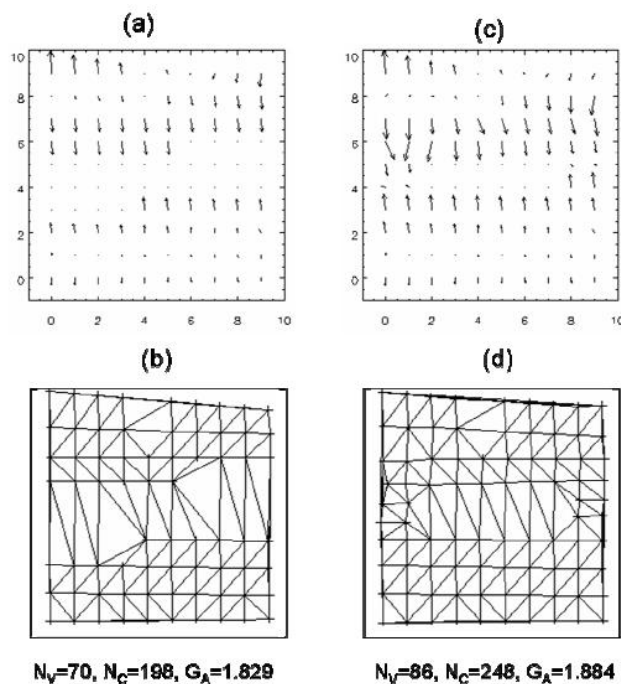


Figura 3.29 – Grades gradientes assimétricas e padrão de triangulação respectivos dos perfis de amplitude mostrados na Figura 3.25(b) e 3.25(c).

A Figura 3.29 mostra a sensibilidade da triangulação em detectar qualquer incremento da assimetria local em grades gradientes. A Figura 3.29(a) e 3.29(c) são as grades gradientes assimétricas obtidas depois de remover todos os pares simétricos dos padrões mostrados nas Figuras 3.25(e) e 3.25(f), respectivamente. Os respectivos padrões da triangulação são mostrados nas Figuras 3.29(b) e 3.29(d).

## 4 ANÁLISE ESPECTRAL GRADIENTE

Este capítulo tem por objetivo descrever uma nova metodologia para análise de ST curtas e seu algoritmo, bem como apresentar o ambiente computacional utilizado. Considerando uma ST curta genérica, do ponto de vista metodológico, propomos compensar a falta de informação contida ao longo do tempo pela informação contida no domínio da frequência (ou escalas). Para esse estudo, conjugamos as duas técnicas matemáticas apresentadas no capítulo anterior: a WMA (MALLAT, 1989a) e a GPA adaptada para ST (ASSIREU et al., (2002)). Dessa forma, o padrão de variabilidade de uma ST pode ser analisado dentro de um novo contexto denominado Análise Espectral Gradiente (GSA, do inglês *Gradient Spectra Analysis*).

### 4.1 Metodologia GSA

A GSA consiste em uma seqüência ordenada de quatro operações (implementadas computacionalmente) sobre uma dada ST: (i) determinação da Escala Máxima de Coerência da ST; (ii) representação multirresolução da ST; (iii) cálculo da Potência do Coeficiente de Assimetria Gradiente e (iv) obtenção do Espectro-Gradiente e da Medida de Flutuação do Espectro-Gradiente. A seguir, explicamos cada uma dessas operações.

#### 4.1.1 Escala Máxima de Coerência

Em trabalhos anteriores como o de BARBOSA (2006) o cálculo do  $G_A$  local de uma ST era obtido por meio de uma janela de tamanho determinado pelo usuário do método de modo arbitrário e fixa para os diversos sinais analisados. Essa metodologia se mostrou robusta para sinais bem diferentes entre si, ao passo que para ST muito semelhantes, o método se mostrou pouco eficiente.



GAO e LI (1993) propuseram uma metodologia para determinar as escalas de tempo associadas às estruturas coerentes da ST. Essas escalas são obtidas através do ponto de inflexão (derivada nula) em um gráfico  $Var(CWT_{A(a,b)}) \times a$ . Trata-se da variância de uma  $CWT_{A(a,b)}$  como função das possíveis escalas de dilatação,  $a$ , associadas a uma MW  $\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$ .

O diagrama tempo-escala é obtido a partir da CWT definida por DAUBECHIES (1992) expressa na Equação 3.7. Para cada escala que define o diagrama tempo-escala, determina-se a variância da energia ao longo do tempo (HAGELBERG e GAMAGE, 1994):

$$Var(CWT_{A(a,b)}) = \int_{-\infty}^{+\infty} |CWT_{A(a,b)}|^2 db. \quad (4.1)$$

As escalas de tempo associadas às estruturas coerentes da ST ocorrem quando a derivada da variância em relação à escala é nula:

$$\frac{\partial Var(CWT_{A(a,b)})}{\partial a} = 0. \quad (4.2)$$

Uma análise estatística global pode oferecer informação sobre a escala na qual existem o maior número de eventos coerentes de amplitudes significativas, já que os parâmetros  $a$  e  $b$  da *wavelet* contêm informação sobre a coerência entre a ST e a *wavelet*, tanto em escala ( $a$ ), quanto em translação ( $b$ ). Essa informação é dada, segundo HAGELBERG e GAMAGE (1994), pela máxima variância dos coeficientes da Transformada de *Wavelet* aplicada. A escala associada a essa máxima variância é denominada neste trabalho de Escala Máxima de Coerência ( $\lambda_{mc}$ ). Em geral, a escala  $\lambda_{mc}$ , além de expressar a existência de estruturas coerentes

associadas aos processos dinâmicos inerentes ao sistema, também está associada ao processo dinâmico responsável pelas amplitudes medidas próximas à escala integral do sistema real.

Conforme indicação do trabalho de GAO e LI (1993), utilizamos a *wavelet* “Chapéu Mexicano” para a análise, pois a mesma é simétrica, o que a credencia como adequada para detectar as regiões de máxima curvatura do sinal (HAGELBERG e GAMAGE, 1994):

$$\psi(t) = (1 - t^2)e^{(-t^2/2)}. \quad (4.3)$$

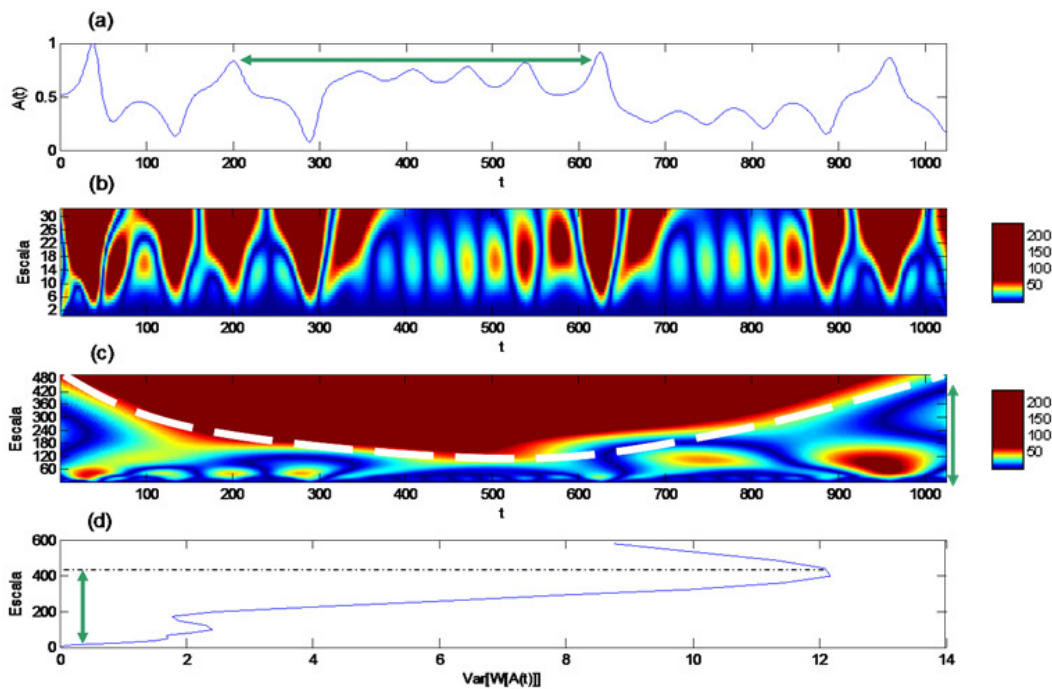


Figura 4.1 – Determinando a  $\lambda_{mc}$  de uma ST.

Na Figura 4.1 acima temos uma demonstração da determinação da  $\lambda_{mc}$  de uma ST. A Figura 4.1(a) representa a máxima coerência encontrada em um perfil de

Lorenz; a Figura 4.1(b) mostra as principais estruturas para outras escalas de coerência (pequenas escalas); a Figura 4.1(c) corresponde à impressão dos coeficientes absolutos da CWT da *wavelet Chapéu Mexicano* da ST para a  $\lambda_{mc}$ ; e a Figura 4.1(d) mostra a variância em cada escala, com a variância máxima no detalhe. Neste caso, a máxima variância ocorre na escala de 440 pontos. É esta informação que nossa metodologia usa como  $\lambda_{mc}$  da ST.

#### 4.1.2 Representação multirresolução da ST

A representação multirresolução da ST é realizada através da sua decomposição e reconstrução por meio de uma *wavelet* que mantenha as características estruturais do sinal em todas as suas componentes  $\omega_j$ , ou seja, usamos a técnica da WMA, para obtermos as componentes de aproximação da ST e uma *wavelet* simétrica.

Escolhemos a análise por aproximação e não por detalhes, porque estamos investigando a variabilidade da ST, o que inclui suas tendências. Estas componentes são geradas através da decomposição e reconstrução multi-nível, conforme explicado no capítulo anterior. Essa decomposição e reconstrução nos fornecem, a cada nível, uma versão aproximada do sinal relacionada com a escala da *wavelet* aplicada, que também está intimamente relacionada com uma frequência-componente do sinal, conforme a Tabela 3.1. Usamos a DWT, pois esta mapeia a ST com menos redundância com uma descrição mais eficiente.

A princípio, nosso interesse em *wavelets* simétricas, deve-se ao fato de estarmos gerando uma medida característica do tipo do sinal através de suas assimetrias. É desejável, portanto, que a *wavelet* influencie o mínimo possível essa medida: alguns testes preliminares mostraram o quanto uma *wavelet* ortonormal pode influenciar na análise. Veja na Figura 4.2 a distorção das componentes de aproximação, gerados pela *wavelet* Daubechies (ou ortogonal) de ordem dois (db2). Para

maiores detalhes de construção dessas *wavelets*, DAUBECHIES (1992) e COHEN et al. (1992) explicam com bastante precisão.

Na Figura 4.2 podemos visualizar as componentes de aproximação de uma ST. A ST original está em preto e os demais sinais (em azul) são suas oito componentes de aproximação com informação relevante.

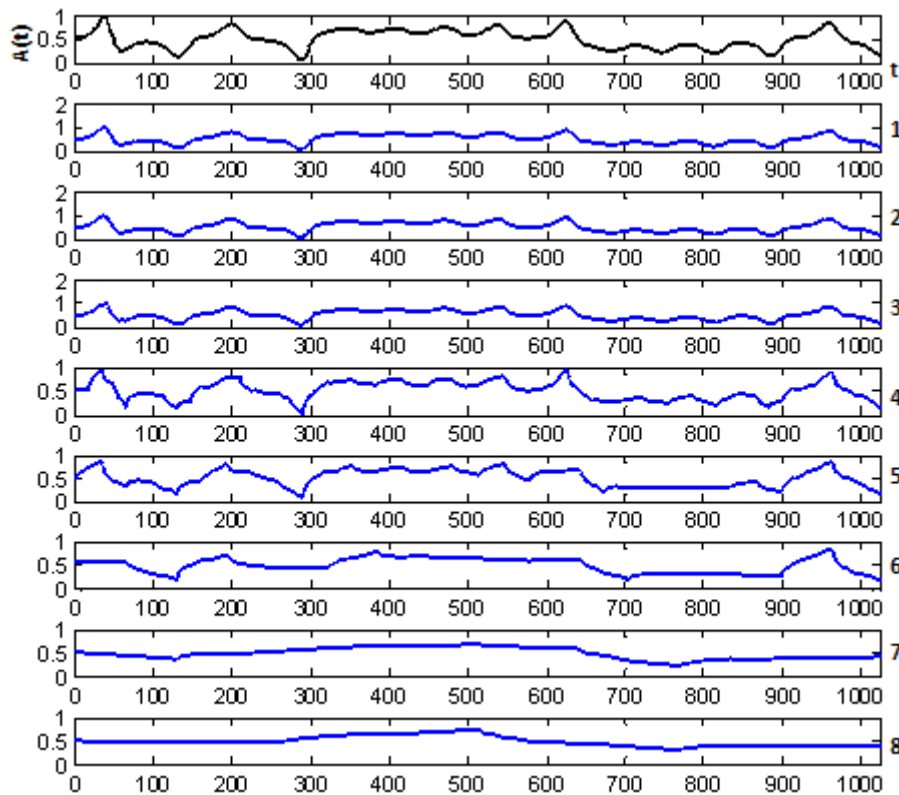


Figura 4.2 – Componentes de aproximação de uma ST usando uma *wavelet* Daubechies de ordem dois (db2).

Em nossa pesquisa, para gerar essas componentes de aproximação com o mínimo de distorção possível, utilizamos a *wavelet* biortogonal com ordem de reconstrução igual a seis e ordem de decomposição igual a oito (bior6.8). Essa função possui suporte compacto. Além disso, a vantagem em usar *wavelets* desse tipo

em relação às ortonormais é que tanto os filtros de decomposição, quanto os de reconstrução, podem ser simétricos, ao contrário das *wavelets* ortogonais que não possuem simetria e reconstrução exata (DAUBECHIES, 1992). Veja a Figura 4.3 para observar como as componentes de aproximação, usando a *wavelet* simétrica citada acima na mesma ST da Figura 4.2, preservam as tendências da ST.

Outro aspecto importante é a quantidade de níveis. Essa quantidade é obtida dinamicamente através de uma rotina do ambiente computacional MATLAB® que prevê baseada no tamanho da ST e na *wavelet* escolhida segundo o método proposto em MISITI et al. (2003) de acordo com o critério de entropia da ST (COIFMAN e WICKERHAUSER, 1992).

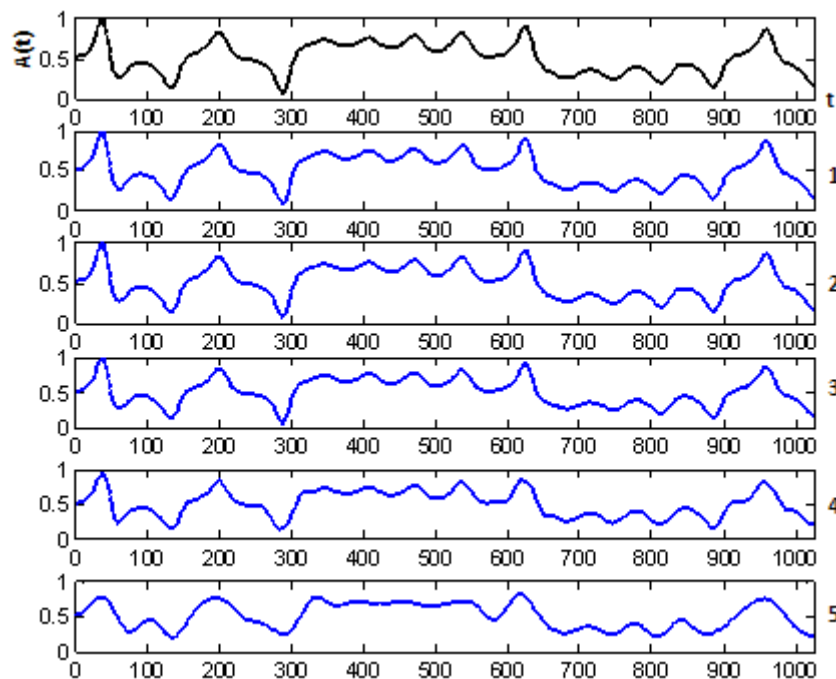


Figura 4.3 – Componentes de aproximação de uma ST usando uma *wavelet* Biortogonal com ordem de reconstrução igual a oito e ordem de decomposição igual a seis (bior6.8).

### 4.1.3 Coeficiente de Assimetria

Para cada componente de aproximação, calculamos o valor de  $G_A$  janelado médio. Essa medida é denominada de  $\langle G_{A,n} \rangle$ , onde  $n$  indica o nível da componente de aproximação, de forma que para cada nível do sinal temos o coeficiente de assimetria como uma função das escalas (ou frequências) características. É importante ressaltar que a escala utilizada para o cálculo de  $\langle G_{A,n} \rangle$  corresponde ao valor mais próximo da  $\lambda_{mc}$  da ST, tal que este valor permita construir uma matriz quadrada, que é uma das exigências do cálculo do  $G_A$ . Por exemplo: se a escala-janela do sinal calculada for de 445.1, a escala usada do  $G_A$  será de 441 (=21 x 21) – existem estudos em andamento para a criação de um operador de  $G_A$  que permita utilizar matrizes não-quadradas. A  $\lambda_{mc}$  do sinal é usada, portanto, para aproximar o valor da escala quadrada utilizada no cálculo do  $G_A$  janelado.

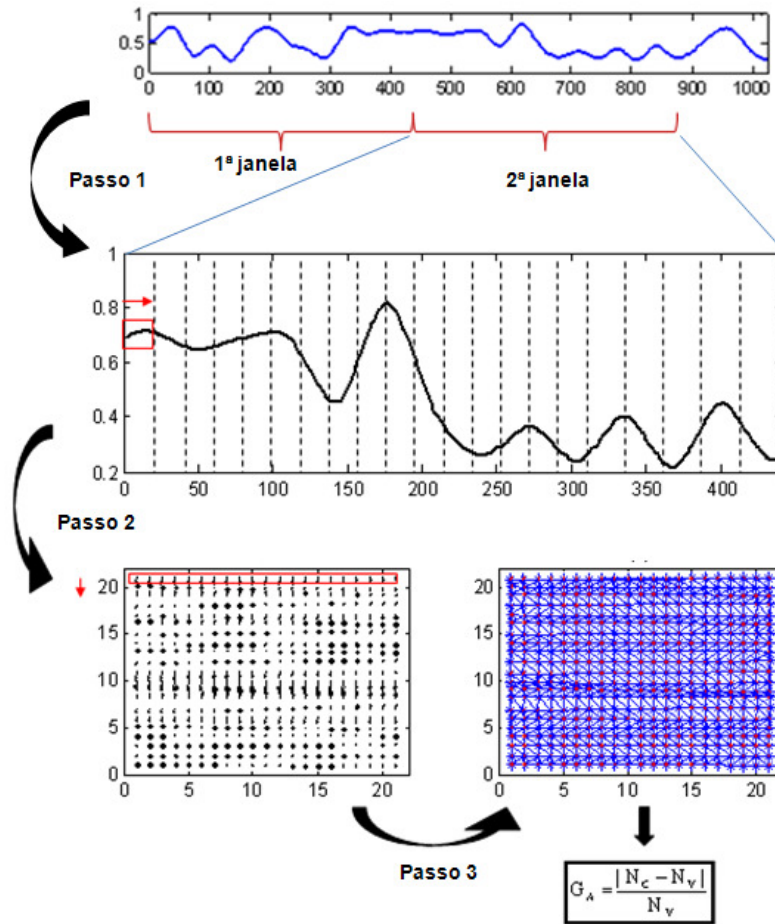


Figura 4.4 – Cálculo de  $G_{A,n}$  para um fragmento de uma componente de aproximação:

Passo 1: obtenção da janela de dados através de  $\lambda_{mc}$ ; Passo 2: transformação da ST em uma matriz e geração da matriz gradiente; e Passo 3: campo de triangulação de Delaunay.

A Figura 4.4 mostra a componente de aproximação escolhida da Figura 4.3 e a etapa do cálculo do  $G_{A,n}$  de uma janela que integra essa última componente de aproximação do sinal exemplificado. É possível visualizar essa parte do sinal analisado, seu valor de  $G_{A,n}$ , sua triangulação de Delaunay e seu campo gradiente excluindo os vetores simétricos.

Com o valor de  $G_A$  médio para cada nível de aproximação, calculamos o que chamamos de Potência do Coeficiente de Assimetria Gradiente,  $G_{POT}$ , para cada nível, conforme equação abaixo:

$$G_{POT} = \langle G_{A,n} \rangle^{\lambda_{mc}}. \quad (4.5)$$

Ou seja, o cálculo da  $\lambda_{mc}$  do sinal é fundamental em nossa técnica, pois essa escala é usada para aproximar a janela usada no cálculo do  $G_A$  e também é usada para calcularmos a  $G_{POT}$ . Usar  $\lambda_{mc}$  como potência foi decisivo em nossa metodologia, pois os valores de  $G_A$  são muito sensíveis (a diferença de uma casa decimal entre duas medidas de  $G_A$  pode significar ST oriundas de modelos bem diferentes) e a potência serve para separar de maneira suficiente esses valores.

Dessa forma, o espectro gradiente, obtido a partir de uma ST com N medidas, consiste de  $l$  valores de  $G_{POT} : \{G_{POT}(\omega_1), \dots, G_{POT}(\omega_l)\}$ , na qual  $l$  é a quantidade de componentes de aproximação obtidas a partir da série original.

#### 4.1.4 Espectro-Gradiente

O Espectro-Gradiente é a relação entre os valores de  $G_{POT}$  e o nível da aproximação que, como citado anteriormente, tem relação com a escala (frequência) característica  $\omega$  do sinal. Para uma visualização, veja Figura 4.5.



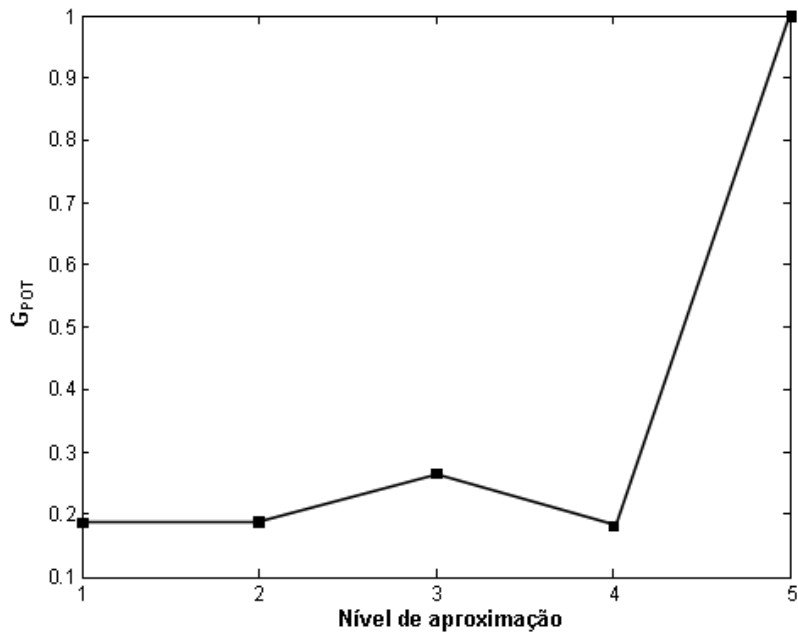


Figura 4.5 – Espectro-Gradiente de uma ST.

Podemos calcular uma medida única que caracteriza o sinal desse espectro da Figura 4.4. Baseado no método DFA (*Detrended Fluctuation Analysis*) (PENG et al., 1995), criamos a Medida de Flutuação do Espectro-Gradiente, que nos fornece um número característico (uma espécie de assinatura) da ST baseado em sua assimetria. Chamamos essa medida de  $f_{eg}$  e ela é calculada da seguinte maneira:

$$f_{eg} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (G_{POT} - \langle G_{POT} \rangle)^2}, \quad (4.4)$$

onde fazemos a comparação de cada  $G_{POT}$  com o  $\langle G_{POT} \rangle$ , de forma análoga ao cálculo da variância.

Fizemos testes preliminares de convergência e o  $f_{eg}$  converge para um valor específico a partir de cem medidas de  $G_{POT}$ . Portanto, para obtermos um valor de  $f_{eg}$  mais robusto (mais medidas), concluímos ser adequado interpolarmos o Espectro-Gradiente embutindo mil pontos (por segurança) entre os valores de  $G_{POT}$ . Sua versão final ficou com a seguinte forma:

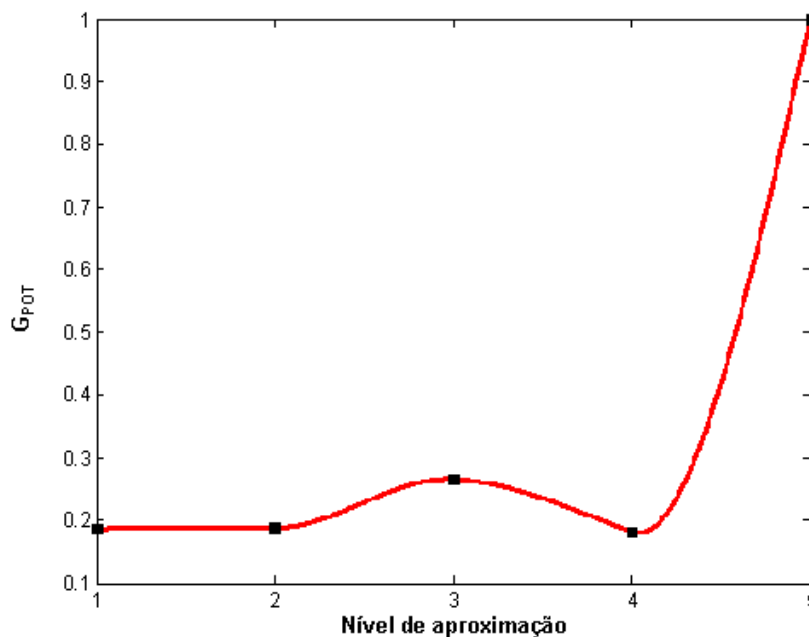


Figura 4.6 – Espectro-Gradiente interpolado de uma ST.

Em nossa análise percebemos que as interpolações cúbicas PCHIP (Piecewise<sup>13</sup> Cubic Hermite Interpolating Polynomial) (FRITSCH, 1980 e KAHANER et al., 1989) gerou resultados mais robustos.

---

<sup>13</sup> Este termo ainda não tem uma tradução direta para o português. Em matemática, uma função “piecewise-defined”  $f(x)$  de uma variável real  $x$  é uma função cuja definição é dada diferentemente em subconjuntos disjuntos de seu domínio. Exemplos comuns são as funções: módulo, Heaviside, dentre outras que possuem descontinuidades. A palavra “piecewise” é também usada para descre-

Essa interpolação acontece através de uma função interpoladora subjacente  $P(x)$  em pontos intermediários, tais que:

1. Em cada subintervalo  $x_k \leq x \leq x_{k+1}$ ,  $P(x)$  é a interpoladora cúbica de Hermite para os valores dados e determinadas inclinações nas extremidades;
2.  $P(x)$  interpola  $y$ , ou seja,  $P(x_j) = y_j$ , e sua primeira derivada  $P'(x)$  é contínua.  $P''(x)$  pode ser descontínua; pode haver alguns saltos em  $x_j$ ;
3. As inclinações em  $x_j$  são escolhidas de tal maneira que  $P(x)$  preserva a forma dos dados e a respectiva “monotonicidade”.

Inicialmente fizemos alguns testes preliminares com outras funções interpoladoras, como, por exemplo, a SPLINE. Porém, o que nos fez optar pela PCHIP, foram as seguintes diferenças:

1. A SPLINE produz uma curva mais “macia”, ou seja,  $S''(x)$  é contínua;
2. A SPLINE produz um resultado mais preciso se os dados consistem de valores de uma função suave;
3. A PCHIP erra menos e gera menos oscilação se os dados não são suaves;
4. A PCHIP é menos dispendiosa computacionalmente para fitar a curva.

Como nossos dados de análise (o Espectro-Gradiente), a princípio não correspondem a uma função suave, a PCHIP se mostrou mais robusta do ponto de vista da análise.

---

ver alguma propriedade de uma função que influencia cada pedaço, mas não pode influenciar o domínio inteiro da função.

## 4.2 Algoritmo GSA

O algoritmo da GSA é constituído pelas quatro operações computacionais explicadas acima. Abaixo, demonstramos essas operações em forma de esquema.

**Primeira operação:** escolher a  $\lambda_{mc}$  da ST.

1. Ler a ST de um arquivo;
2. Calcular o diagrama tempo-escala da ST;
3. Calcular a variância de cada escala;
4. Retornar a escala de maior variância.

**Segunda operação:** fazer a Análise de Multirresolução da ST.

1. Decompor a ST discretamente (multi-nível por aproximação);
2. Reconstruir a ST discretamente (multi-nível por aproximação).

**Terceira operação:** calcular  $\langle G_A \rangle$  e  $G_{POT}$ .

1. Calcular o  $G_A$  janelado por  $\lambda_{mc}$  da ST em cada resolução;
2. Calcular a  $G_{POT}$  para cada resolução;
3. Retornar os valores de  $G_{POT}$ .

**Quarta operação:** gerar o Espectro-Gradiente e sua  $f_{eg}$ .

1. Imprimir na tela em forma de gráfico os valores retornados do script de  $G_{POT}$ ;

2. Calcular flutuação: comparar a medida de  $G_{POT}$  com o  $\langle G_{POT} \rangle$  do próprio sinal;
3. Salvar os valores das flutuações, do desvio padrão e da variância.

### 4.3 Ambiente computacional

Tanto as etapas do algoritmo, quanto a geração de dados simulados, foram implementados em ambiente de programação MATLAB<sup>®</sup> versão 7.3.0.267 (R2006b). Essa suíte de aplicativos é um produto da empresa de software *The Mathworks*, que tem catorze anos de mercado no segmento de simulação e programação (acesse o site da empresa para mais informações: <http://www.mathworks.com/>).

Utilizamos o ambiente de programação sobre o sistema operacional MS Windows XP Professional<sup>™</sup> em máquina AMD Athlon<sup>®</sup> padrão IBM PC.

No próximo capítulo expomos os resultados que obtivemos com a aplicação da técnica GSA descrita aqui.

## 5 RESULTADOS E INTERPRETAÇÕES

Este capítulo aborda os resultados obtidos com a aplicação da GSA descrita no capítulo anterior nas ST canônicas e ambientais para respectiva classificação.

### 5.1 Séries canônicas

ST oriundas de um mesmo processo físico e evoluídas a partir de condições iniciais diferentes, por exemplo, não terão necessariamente o mesmo formato. Ou seja, cada ST possui peculiaridades com relação à sua forma, o que a distingue de outras ST oriundas do mesmo processo físico. Além disso, muitos métodos de análise de padrões em ST são sensíveis a pequenas variações no formato da ST, inclusive a GSA.

Assim, mesmo que uma ST obedeça a um determinado modelo que caracterize sua variabilidade, ela é única e, em muitos casos, não é possível assegurar, qual processo físico está envolvido em sua formação, dificultando a classificação.

Com o intuito de contornar esse obstáculo, decidimos mensurar uma quantidade de ST de um mesmo modelo que fosse suficiente para representá-lo. O critério escolhido foi o de observar a relação entre a convergência dos quatro primeiros momentos estatísticos (média, desvio padrão, assimetria e curtose) e a quantidade de séries que geraram aquela medida de momento médio. Esse procedimento foi efetuado para cada tipo de ST canônica apresentada no Capítulo 2 (caóticas e estocásticas) e os resultados estão apresentados nas Figuras 5.1 a 5.6.

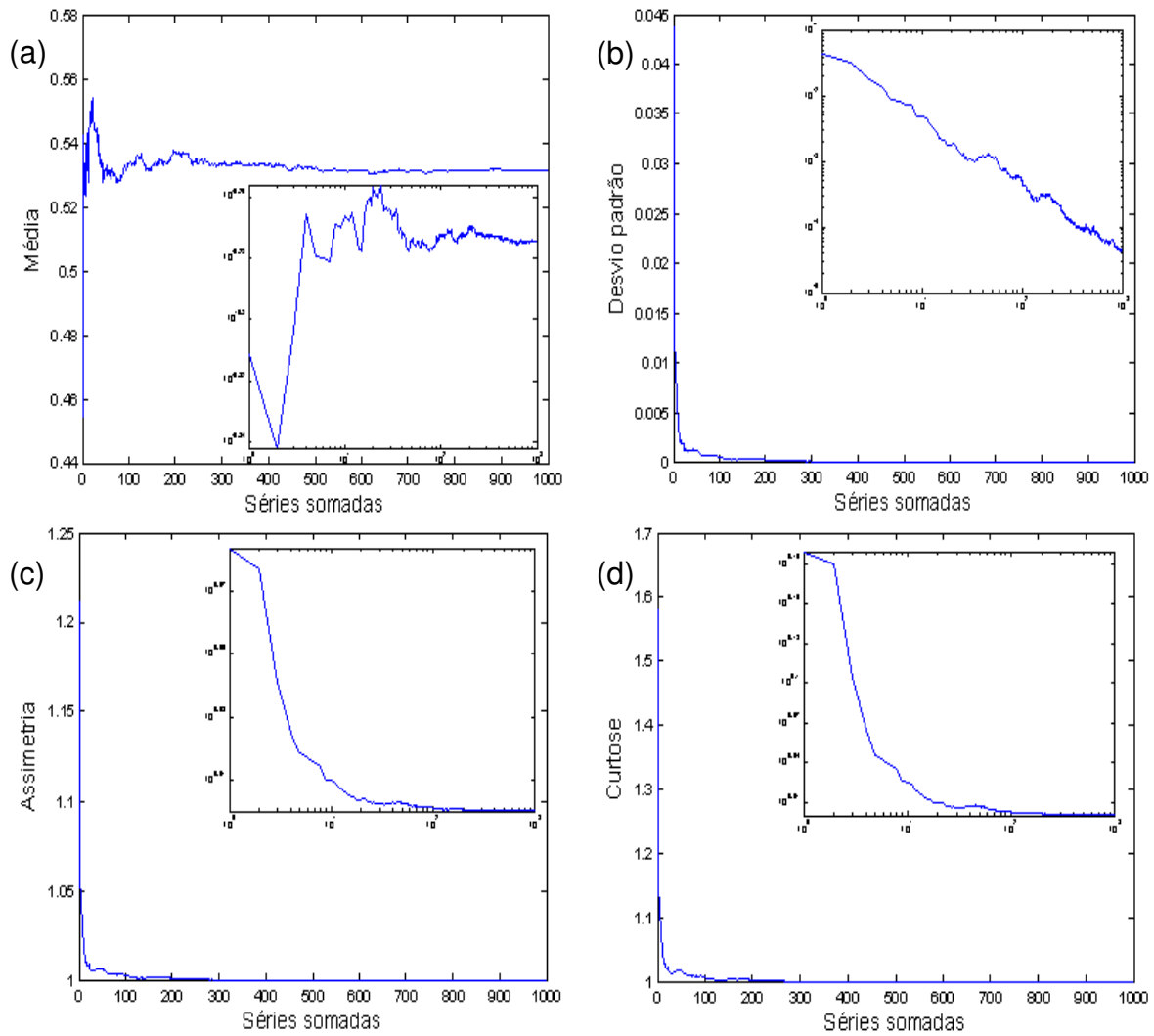


Figura 5.1 – Teste de convergência dos momentos estatísticos da ST com padrão caótico de Lorenz: (a) média; (b) desvio padrão; (c) assimetria e (d) curtose. No detalhe, o teste em escala log-log.

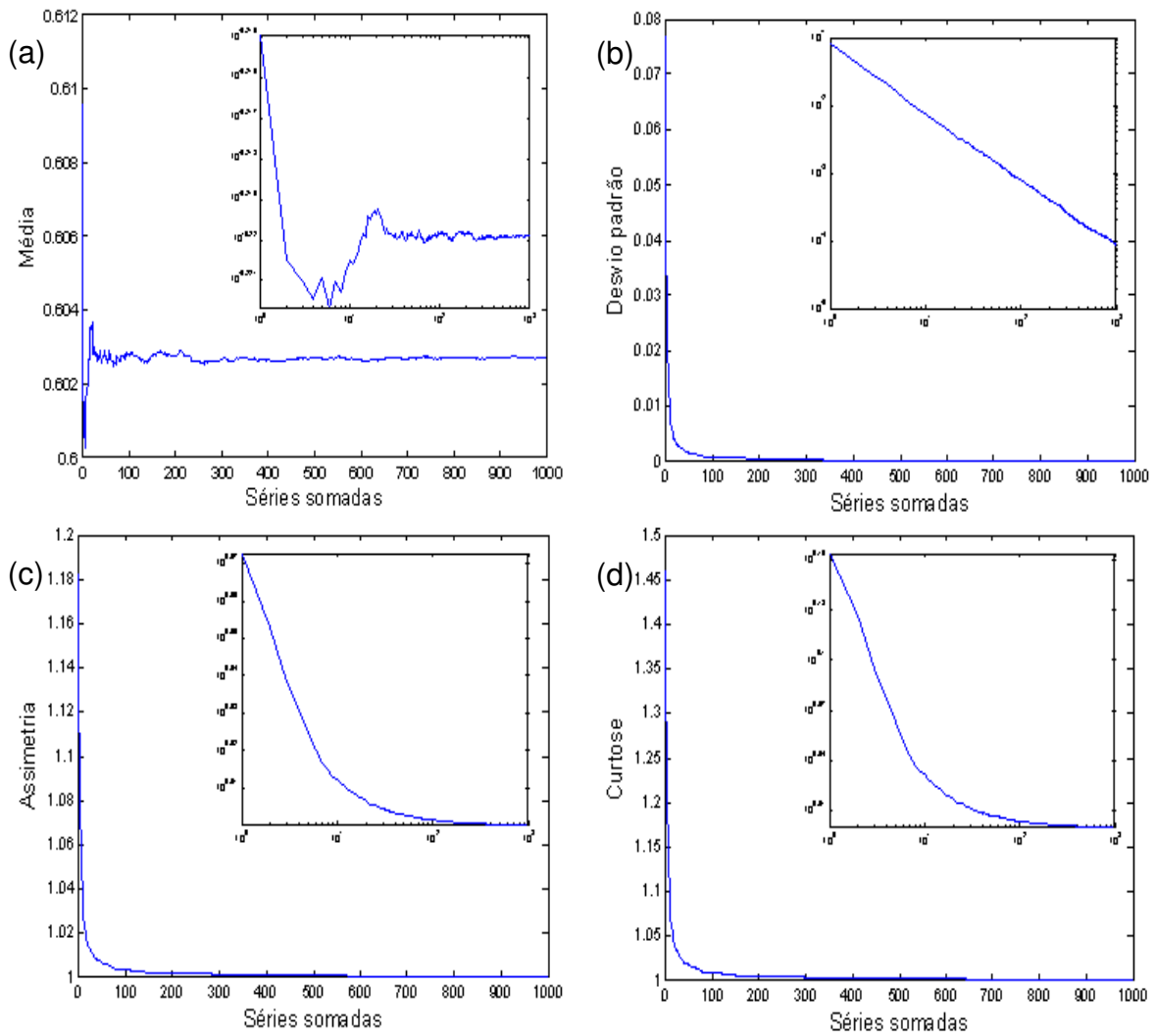


Figura 5.2 – Teste de convergência dos momentos estatísticos da ST com padrão caótico de Hénon: (a) média; (b) desvio padrão; (c) assimetria e (d) curtose. No detalhe, o teste em escala log-log.



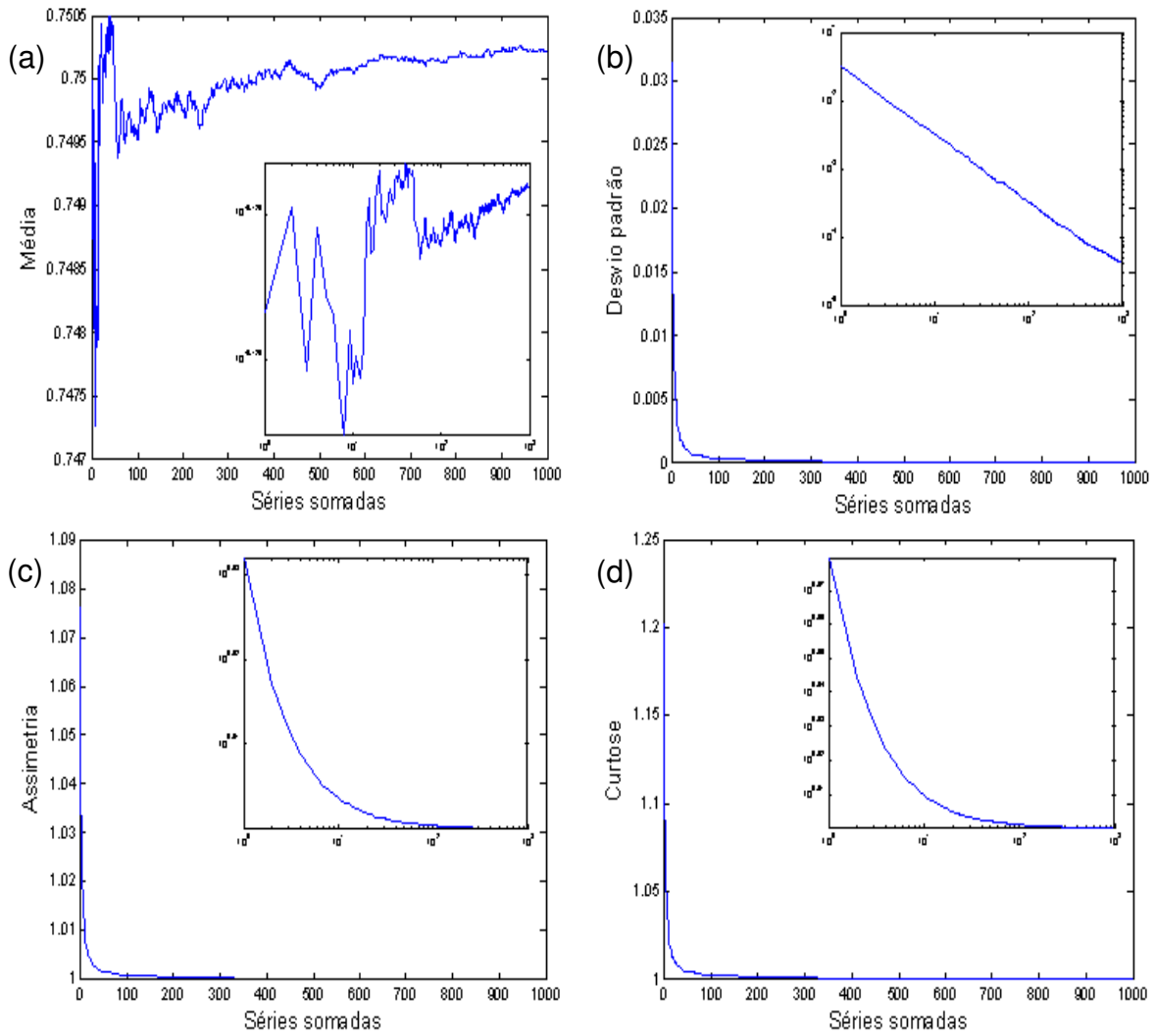


Figura 5.3 – Teste de convergência dos momentos estatísticos da ST com padrão caótico Logístico: (a) média; (b) desvio padrão; (c) assimetria e (d) curtose. No detalhe, o teste em escala log-log.

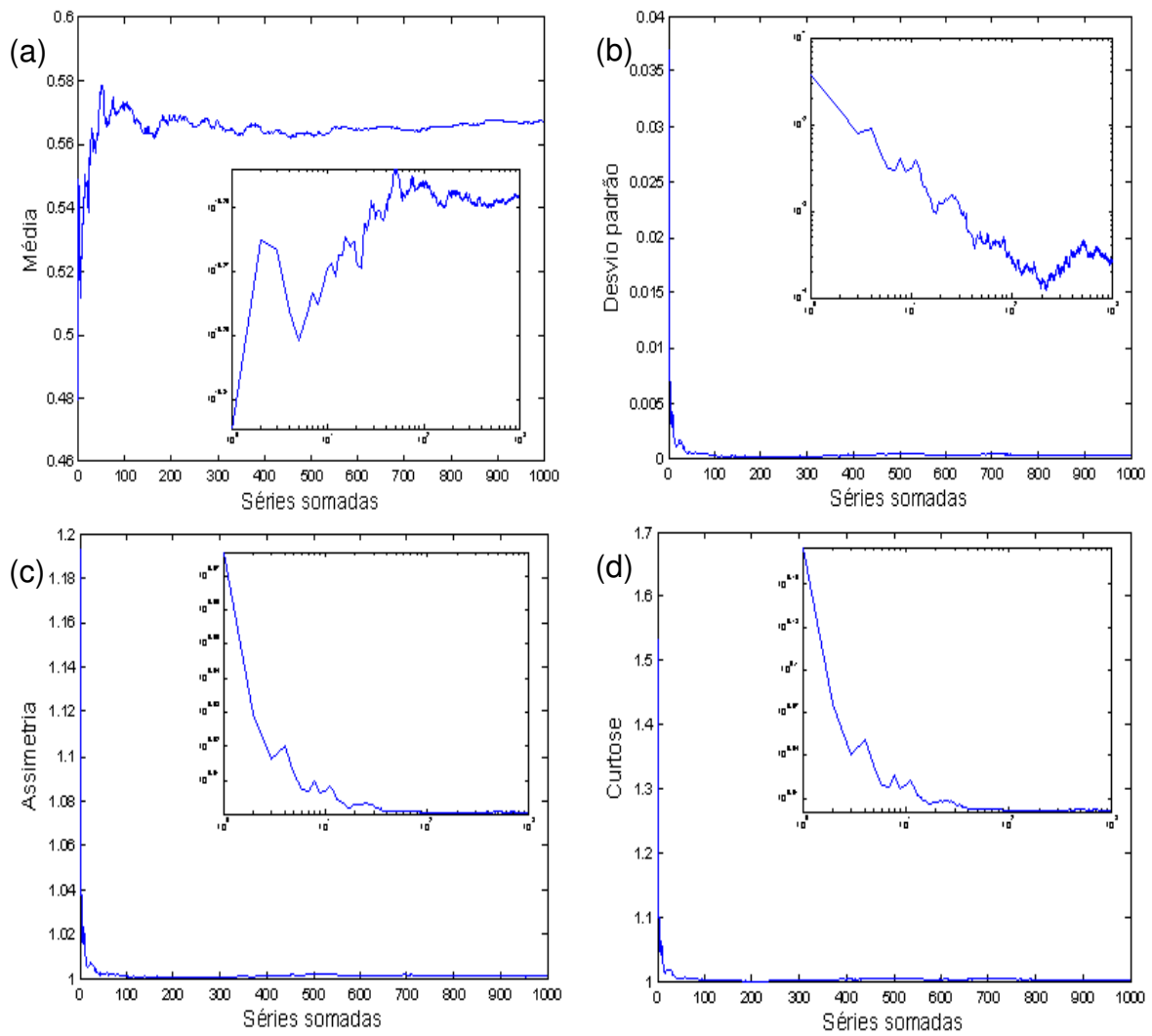


Figura 5.4 – Teste de convergência dos momentos estatísticos da ST com padrão esto cástico  $\alpha = -\frac{3}{2}$ : (a) média; (b) desvio padrão; (c) assimetria e (d) curtose. No detalhe, o teste em escala log-log.

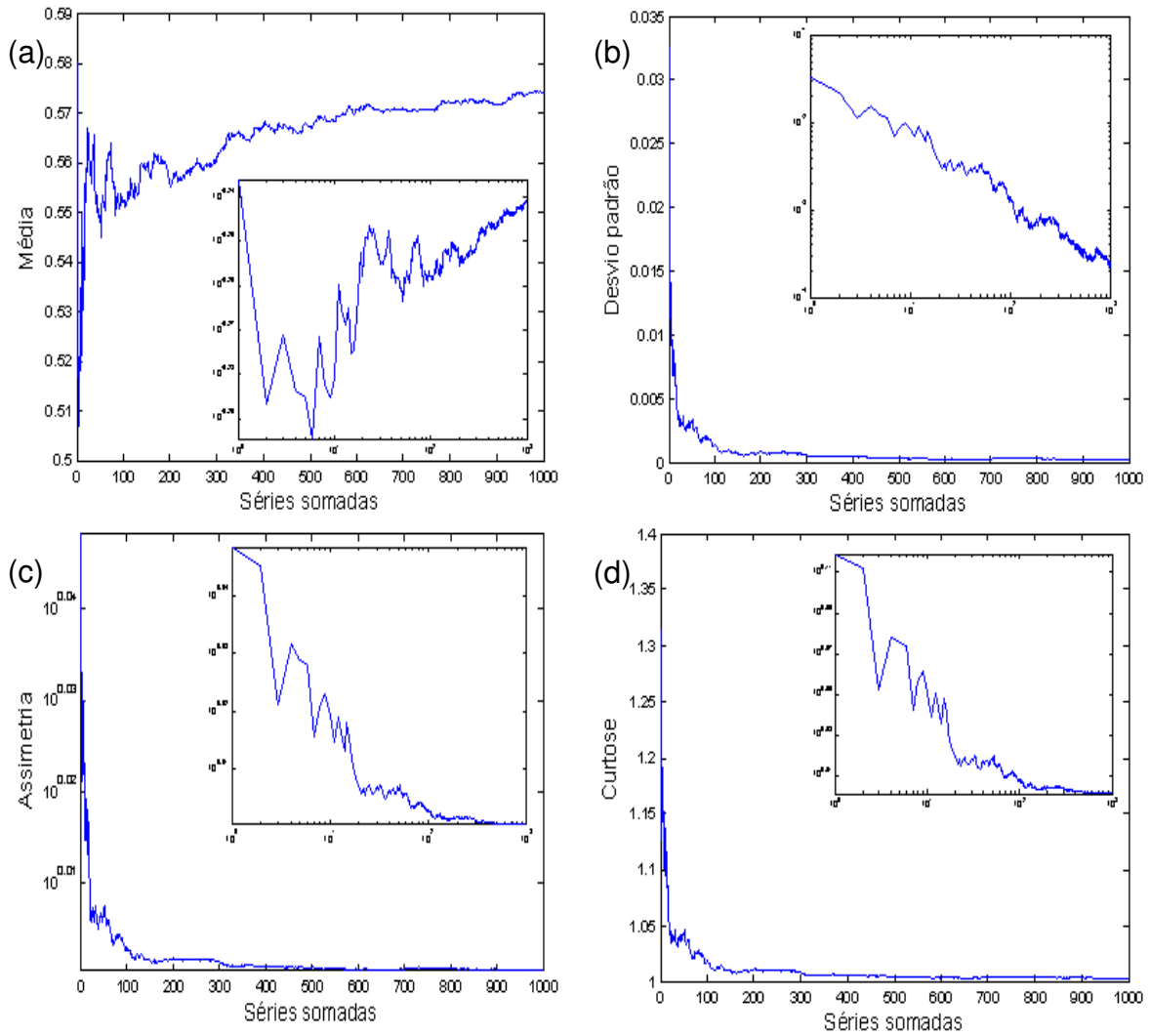


Figura 5.5 – Teste de convergência dos momentos estatísticos da ST com padrão esto cástico  $\alpha = -\frac{5}{3}$ : (a) média; (b) desvio padrão; (c) assimetria e (d) curtose. No detalhe, o teste em escala log-log.

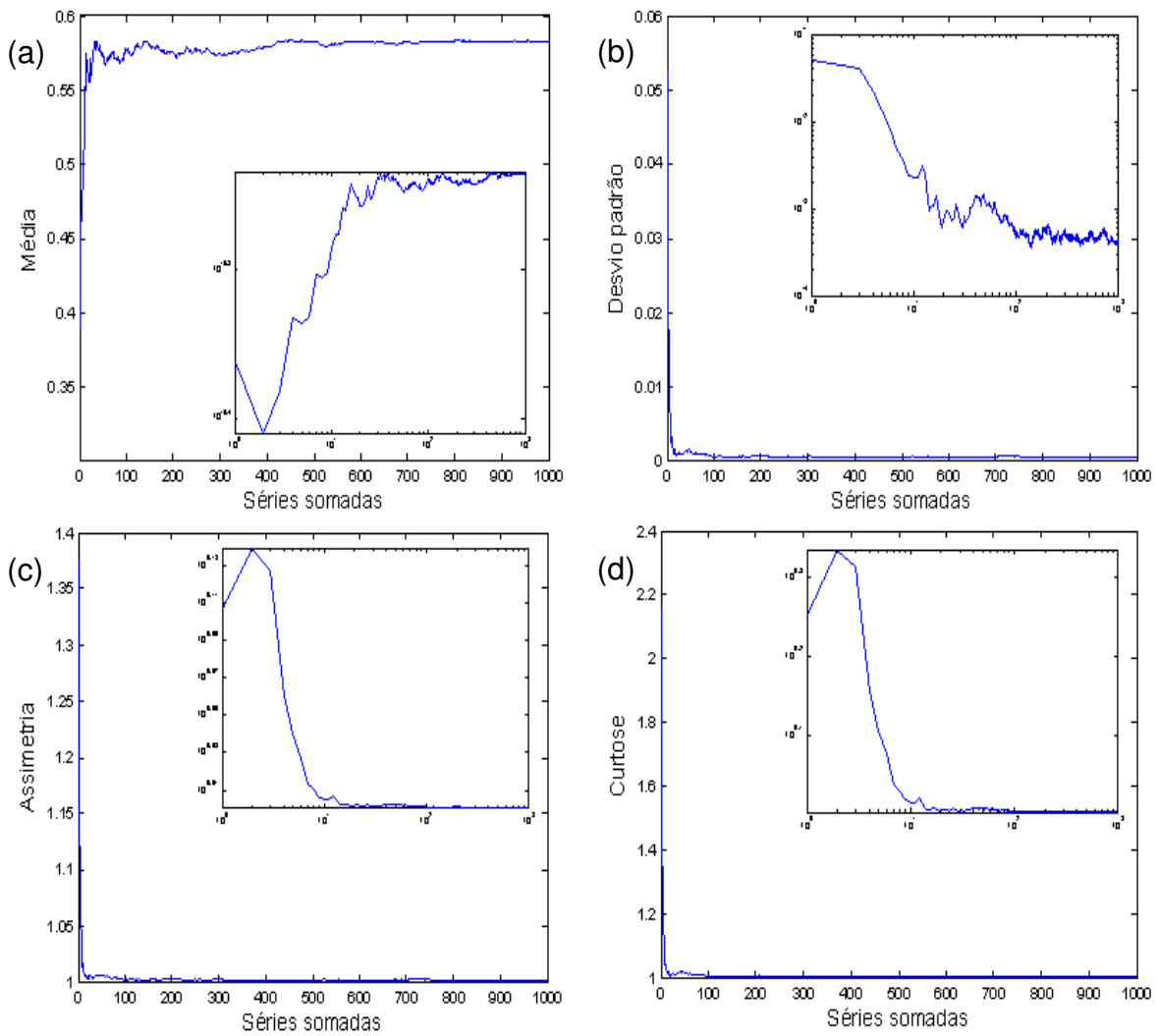


Figura 5.6 – Teste de convergência dos momentos estatísticos da ST com padrão estocástico  $\alpha = -2$ : (a) média; (b) desvio padrão; (c) assimetria e (d) curtose. No detalhe, o teste em escala log-log.

Observe que os momentos do padrão caótico logístico e do padrão estocástico com  $\alpha = -\frac{5}{3}$  convergem a partir da 600ª ST adicionada. Os momentos das demais ST convergem de forma robusta a partir da 200ª série adicionada. Com esse re-

sultado, consideramos confiável analisar os processos abordados neste trabalho, levando em consideração mil exemplos diferentes de cada um.

Calculamos, então, a  $\lambda_{mc}$  média (para obter  $G_A$ ) e a  $\lambda_{mc}$  média quadrada mais próxima numericamente (a fim de obter o cálculo da  $G_{POT}$ ) para cada tipo de sinal. O resultado pode ser visualizado na Tabela 5.1.

Tabela 5.1 – Escala máxima de coerência média para cada padrão.

<b>Tipo</b>	$\langle \lambda_{mc} \rangle$	$\lambda_{mc} / N$	<b>Escala quadrada média mais próxima</b>
Logístico	477,6	0,4664	484
Hénon	470,4	0,4594	484
Lorenz	436,6	0,4264	441
$\alpha = \frac{3}{2}$	403,1	0,3936	400
$\alpha = \frac{5}{3}$	395,0	0,3857	400
$\alpha = 2$	375,8	0,3670	361

*A priori*, podemos observar na Tabela 5.1 que a própria  $\langle \lambda_{mc} \rangle$  demonstra a possibilidade de classificação. Porém, ao analisarmos as flutuações de  $\langle \lambda_{mc} \rangle$  verificamos, através da Figura 5.7, que essa escala não é suficiente para tal caracterização.

O Espectro-Gradiente médio de cada sinal pode ser visualizado nas Figuras 5.8 a 5.13.

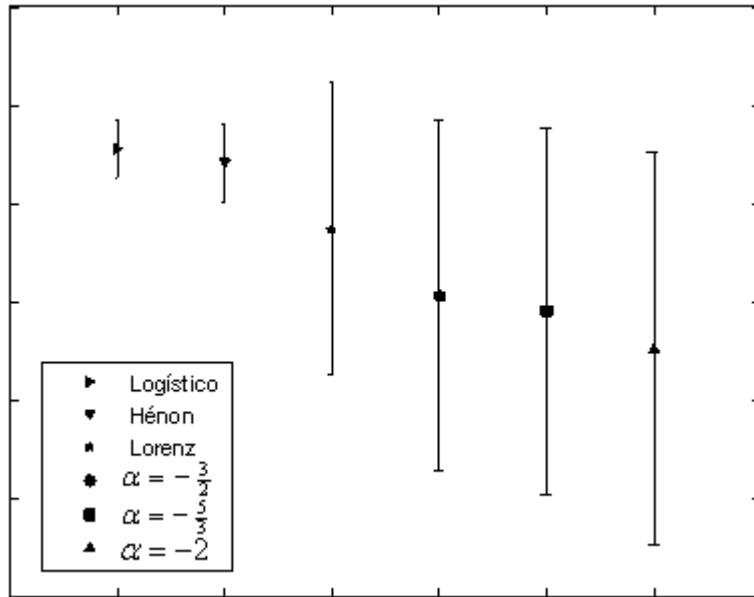


Figura 5.7 – Escalas máximas de coerência médias e seus respectivos desvios.

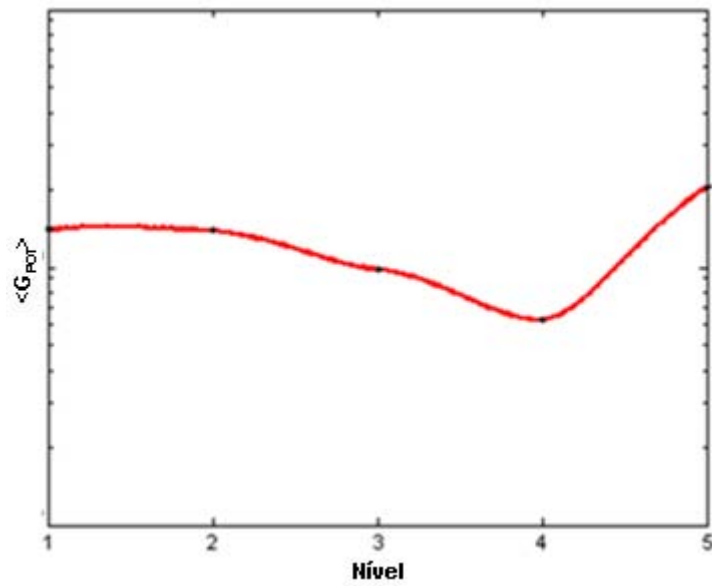


Figura 5.8 – Espectro-Gradiente médio: Mapa Logístico.

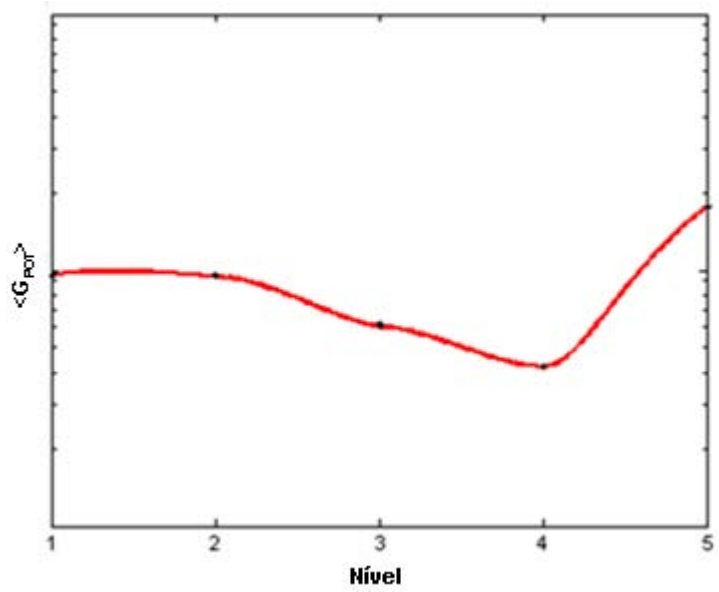


Figura 5.9 – Espectro-Gradiente médio: Mapa de Hénon.

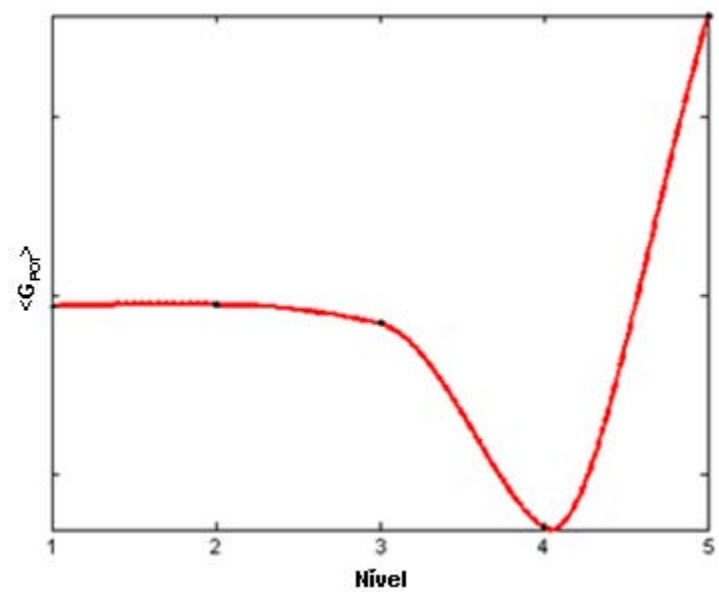


Figura 5.10 – Espectro-Gradiente médio: Modelo de Lorenz.

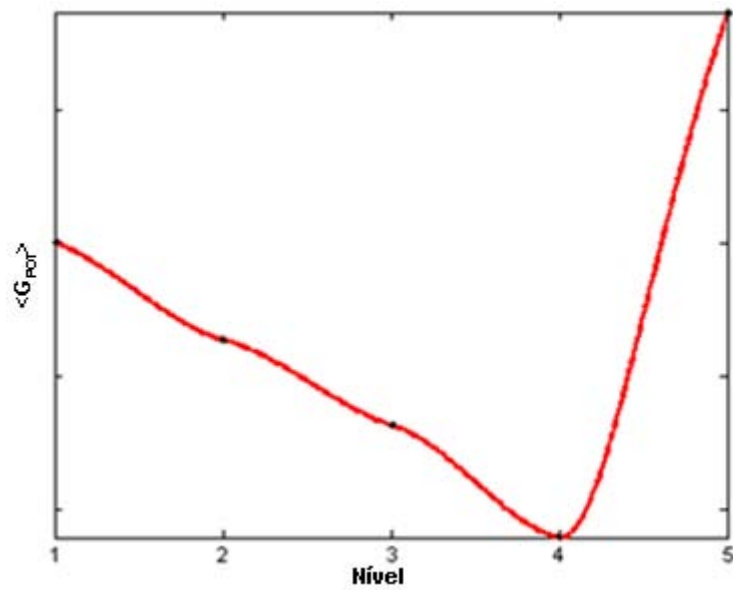


Figura 5.11 – Espectro-Gradiente médio:  $\alpha = -\frac{3}{2}$ .

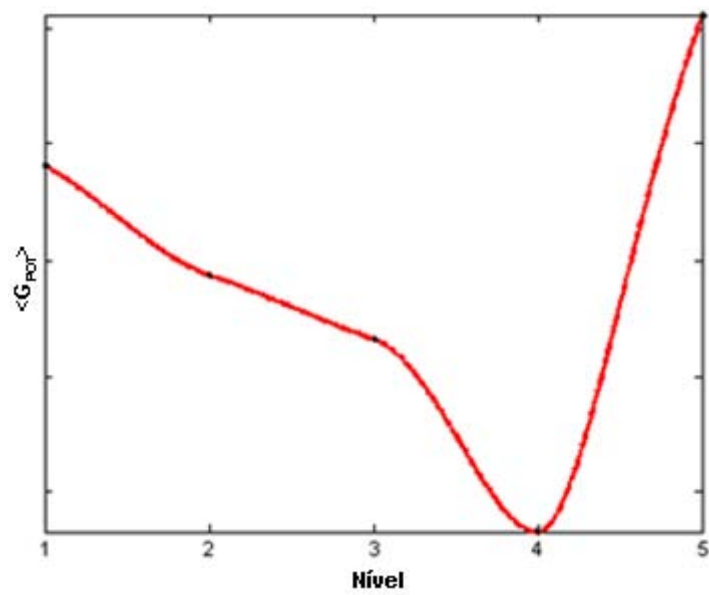


Figura 5.12 – Espectro-Gradiente médio:  $\alpha = -\frac{5}{3}$ .



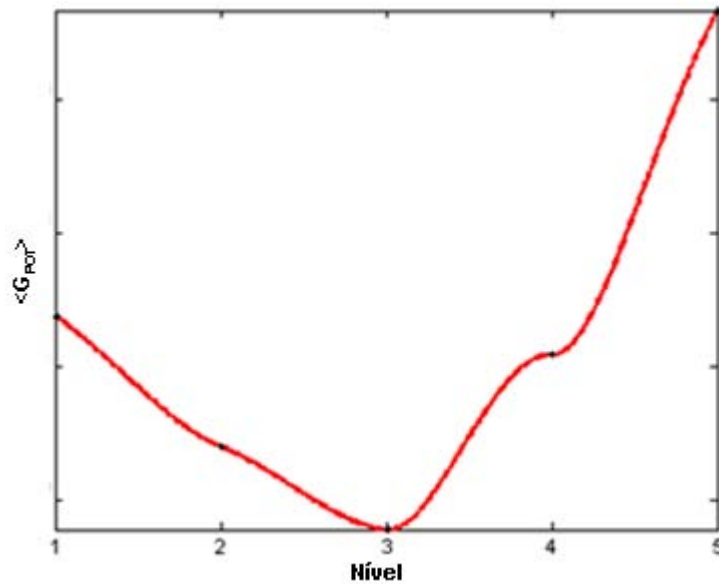


Figura 5.13 – Espectro-Gradiente médio:  $\alpha = -2$ .

Apesar de, em alguns casos, a forma do Espectro-Gradiente ser parecida entre os sinais, o domínio dos espectros é bem diferente entre os mesmos devido às  $\langle \lambda_{mc} \rangle$ . Podemos visualizar melhor a relação entre eles na Figura 5.14.

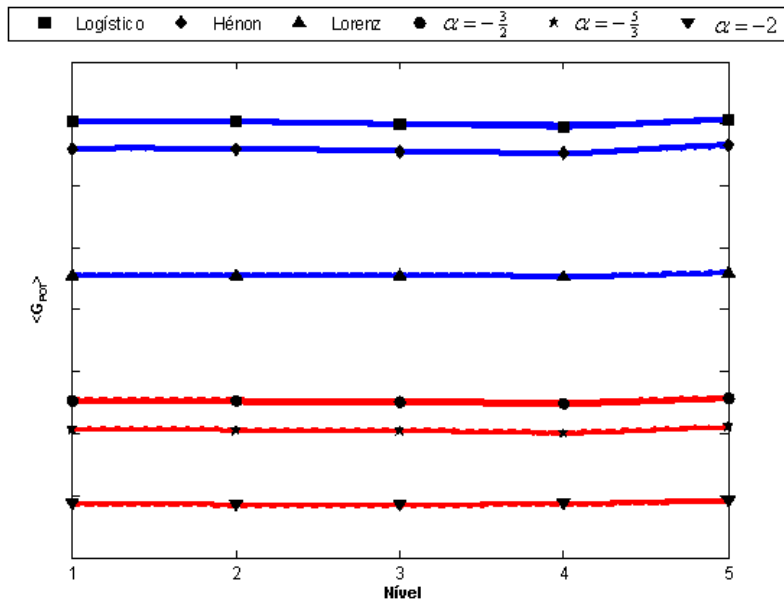


Figura 5.14 – Espectro-Gradiente médio das ST analisadas para cada categoria.

É possível observar, por meio da Figura 5.14, que o Espectro-Gradiente médio de cada ST possui sua própria evolução no gráfico. A fim de quantificar essa classificação de forma numérica, calculamos a  $f_{eg}$  média entre os conjuntos de mil séries para cada padrão, juntamente com o desvio padrão dessas medidas. O resultado está demonstrado na Figura 5.15, que corrobora nossa hipótese de classificação de séries curtas através do Espectro-Gradiente.

Além de classificar os padrões, podemos visualizar na Figura 5.16 que a metodologia demonstra uma possível relação entre a dimensão do modelo da série e a  $f_{eg}$ , onde medidas de  $f_{eg}$  para processos de baixa dimensão (caóticos) possuem valores próximos, assim como os de alta dimensão (estocásticos).

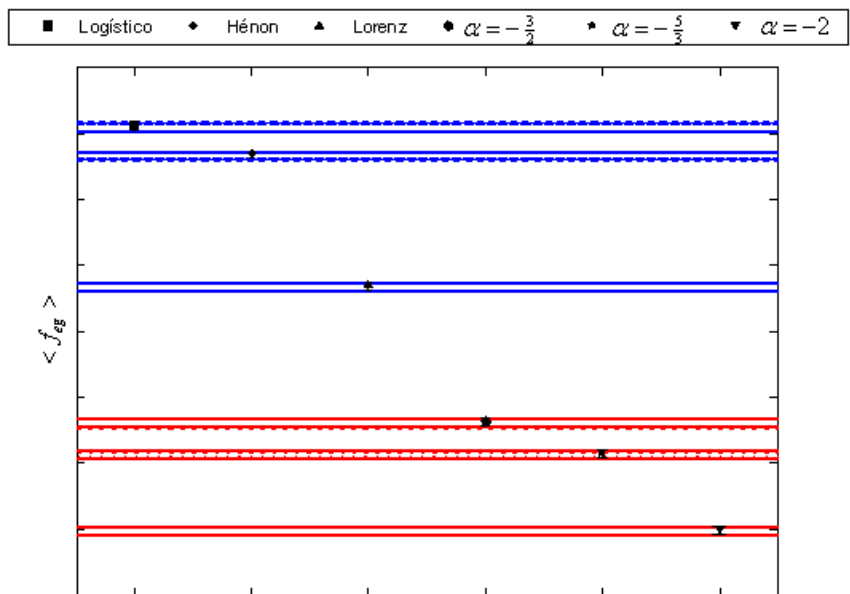


Figura 5.15 – Relação entre as Medidas de Flutuação do Espectro-Gradiente das ST estudadas, com seus respectivos desvios.

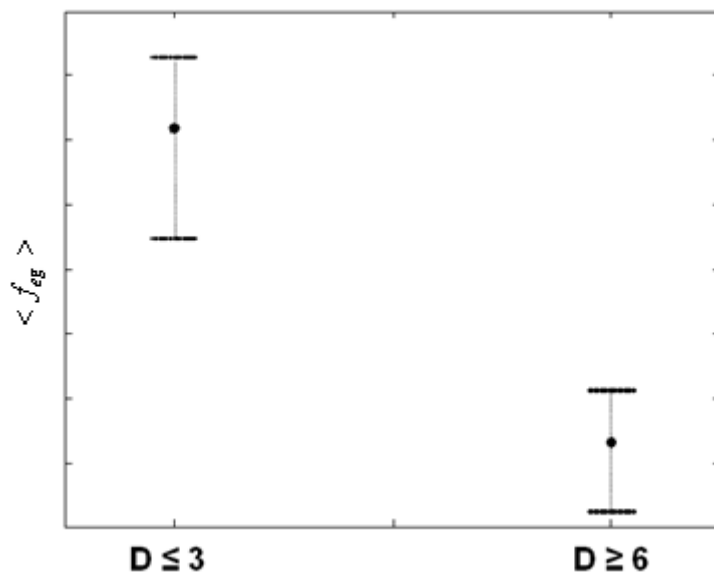


Figura 5.16 – Relação entre as Medidas de Flutuação do Espectro-Gradiente e a dimensão dos sinais estudados: valores médios com respectivos desvios em escala log.

Podemos visualizar essa classificação de maneira mais objetiva através da Figura 5.17, onde relacionamos o  $\langle f_{eg} \rangle$  com a Escala Máxima de Coerência normalizada ( $\lambda_{mc}/N$ ) da Tabela 5.1.

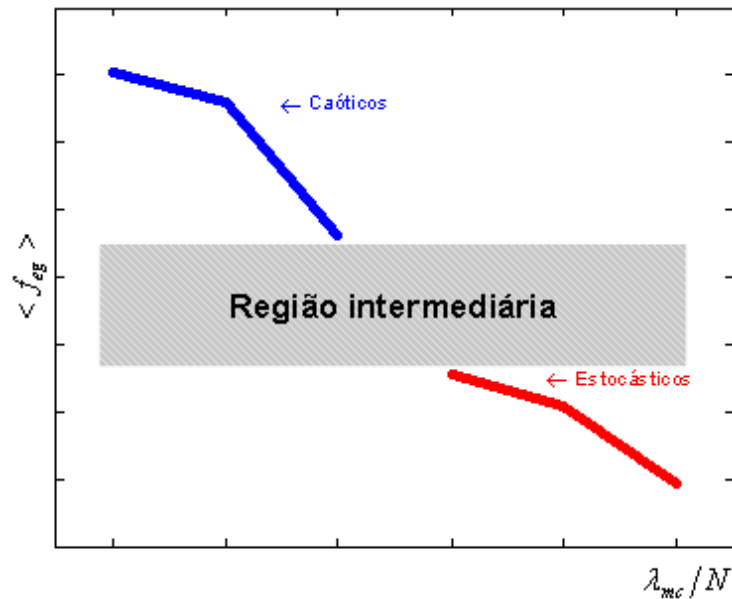


Figura 5.17 – Relação entre as Medidas de Flutuação do Espectro-Gradiente em escala log e a escala-janela normalizada pelo tamanho da série.

## 5.2 Séries ambientais

### 5.2.1 Caracterização de reservatórios aquáticos

Conforme explicamos no Capítulo 2, escolhemos alguns dados de reservatórios aquáticos cedidos por Furnas Centrais Elétricas S.A. para, por meio da caracterização da fenomenologia embutida nas assimetrias de cada ST, classificá-los a partir de suas variáveis ambientais. Os dados coletados do lago Curuai e reservatórios Serra da Mesa e Tucuruí foram extraídos de um banco de dados online disponibilizado pelo INPE (2008(a)) e correspondem a medidas com resolução diária.

Em nossa análise utilizamos dois períodos comuns encontrados sem buracos nos dados às variáveis escolhidas abrangendo um total de 589 medidas em cada período. O primeiro período abrange de 27/04/2005 a 06/12/2006 e o segundo período de 07/12/2006 a 17/07/2008. As Figuras 5.18 a 5.21 exibem esses dados do segundo período escolhido.

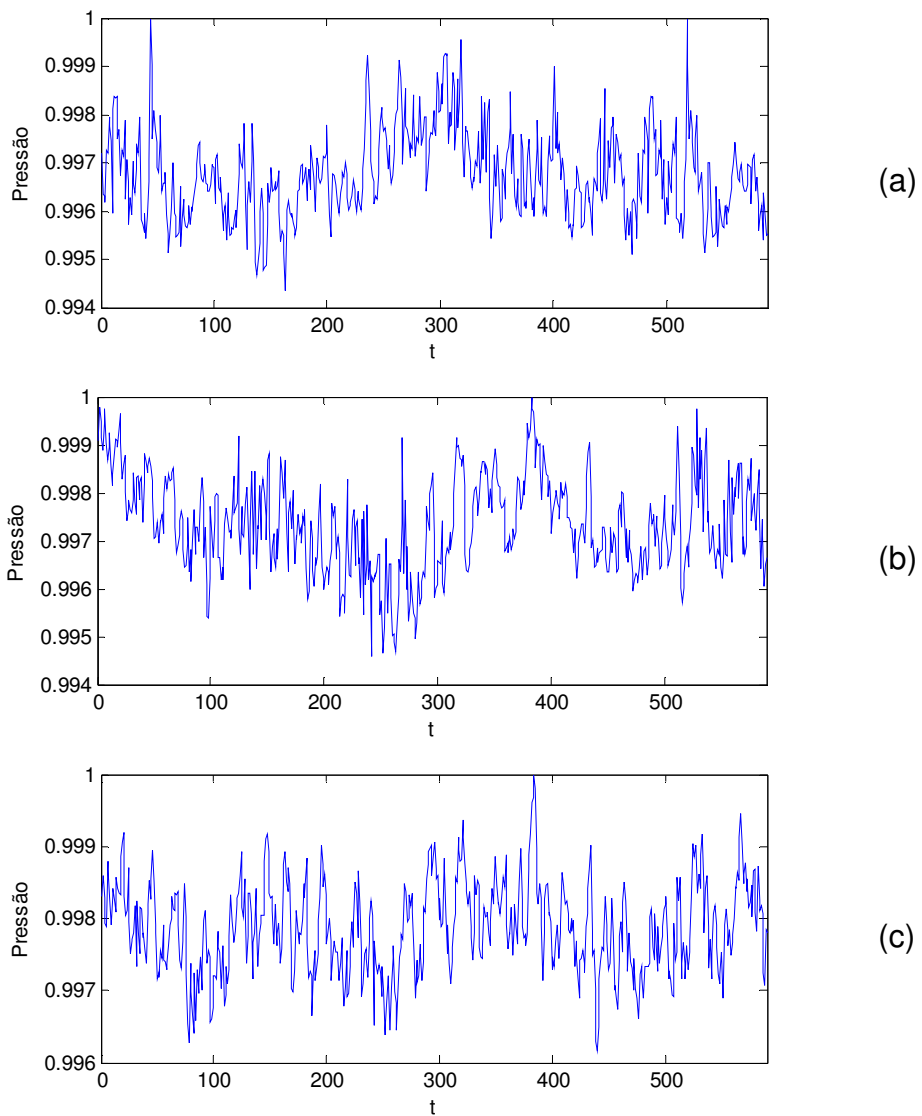


Figura 5.18 – Pressão atmosférica média (hPa): (a) Lago Curuai; (b) Serra da Mesa; e (c) Tucuruí.

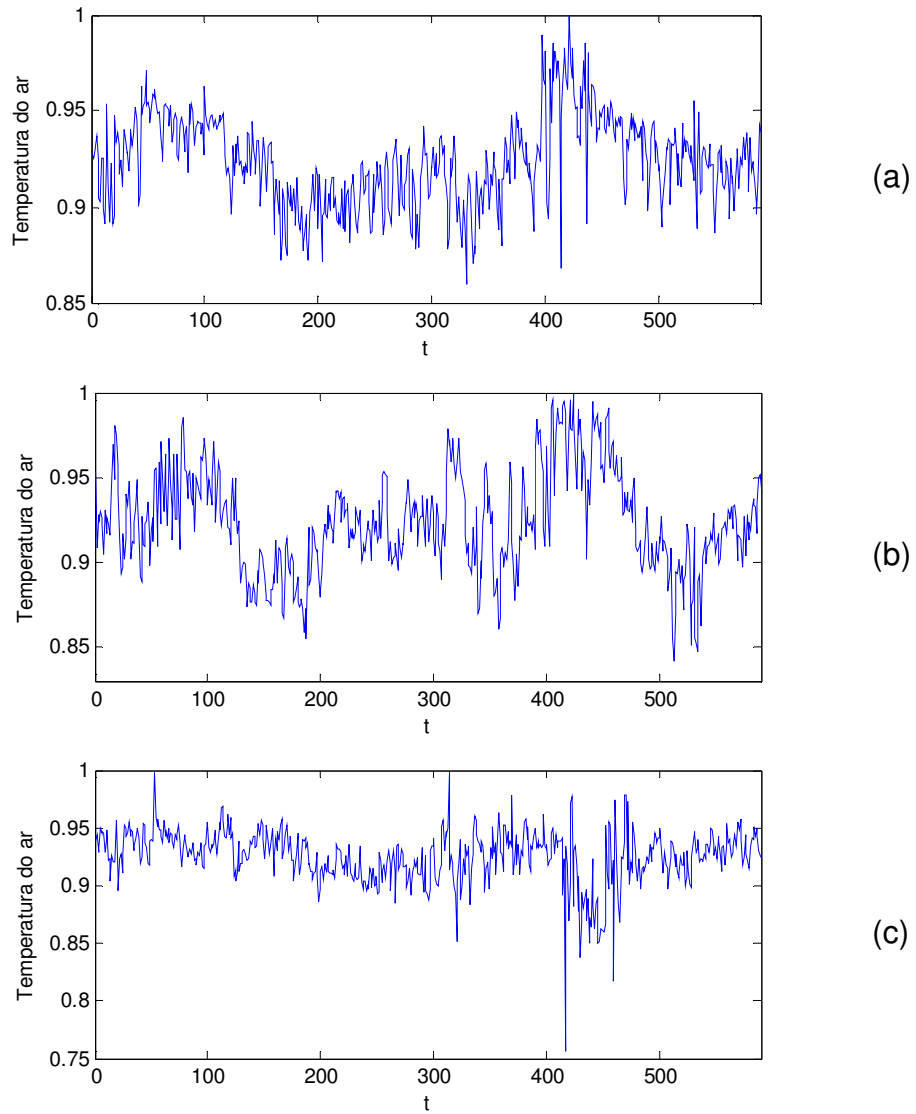


Figura 5.19 – Temperatura média do ar ( $^{\circ}\text{C}$ ): (a) Curuai; (b) Serra da Mesa; e (c) Tucuruí.

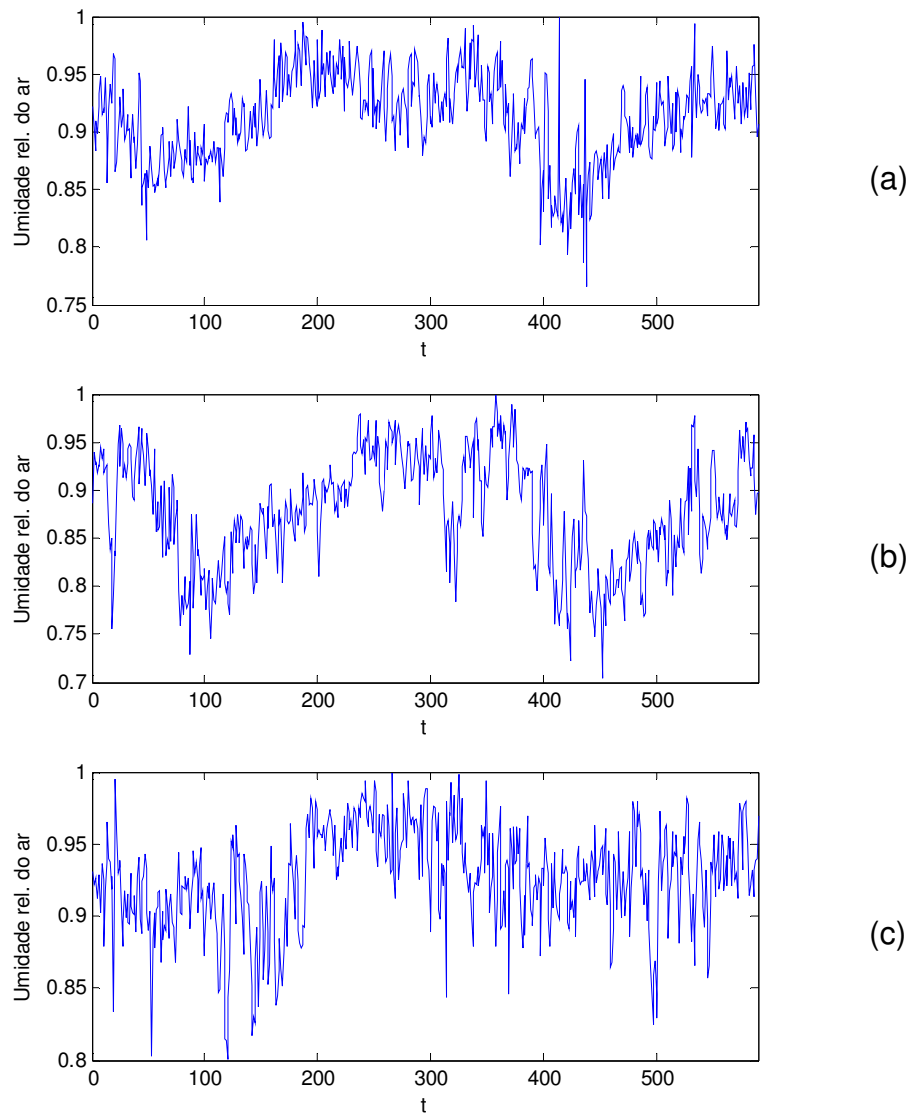


Figura 5.20 – Umidade relativa média do ar (%): (a) Curuai; (b) Serra da Mesa; e (c) Tucuruí.

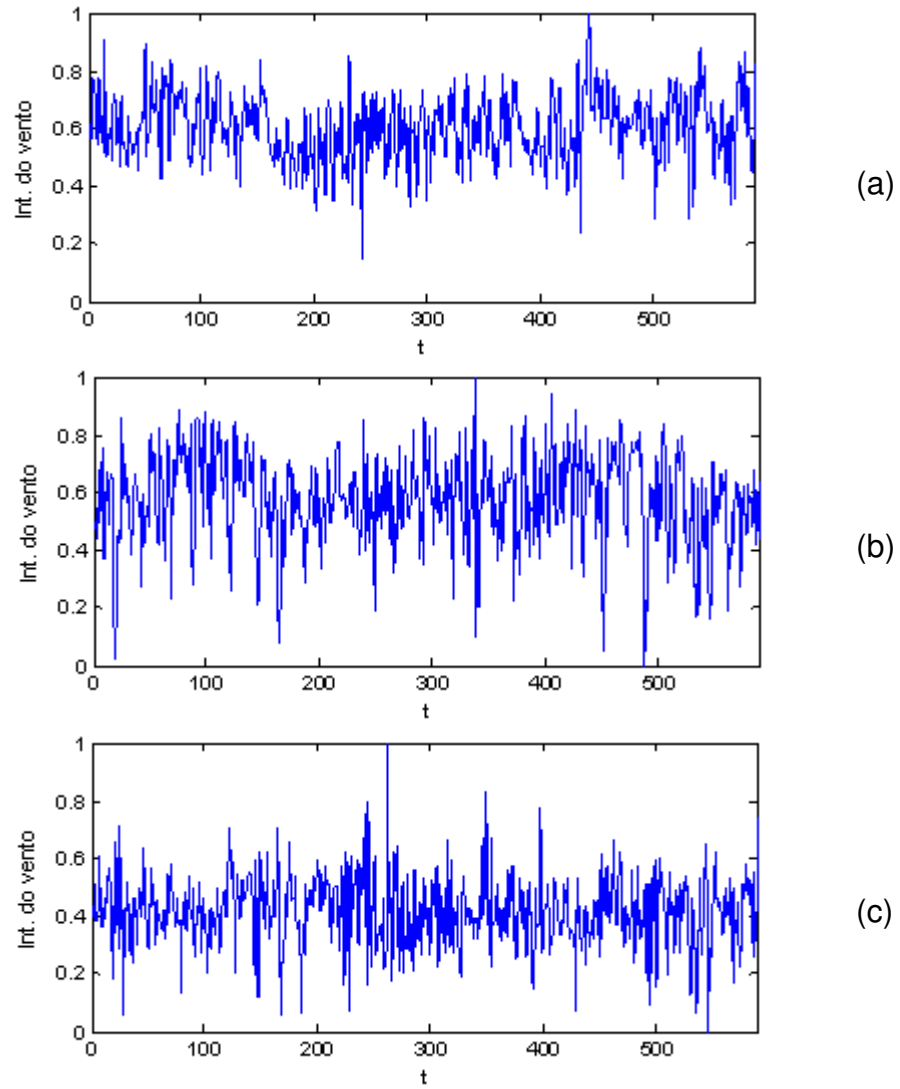


Figura 5.21 – Intensidade do vento (m/s): (a) Curuai; (b) Serra da Mesa; e (c) Tucuruí.

Através da Tabela 5.2 podemos observar a relação entre as  $\langle f_{eg} \rangle$  das ST estudadas.



Tabela 5.2 – Medida de Flutuação do Espectro-Gradiente média para cada reservatório aquático analisado.

	<b>Curuai</b>	<b>Tucuruí</b>	<b>Serra da Mesa</b>
Pressão atmosférica	$4,76 \times 10^{72}$	$4,59 \times 10^{72}$	$2,10 \times 10^{72}$
Temperatura média do ar	$1,02 \times 10^{73}$	$4,29 \times 10^{72}$	$2,34 \times 10^{73}$
Umidade relativa do ar	$9,28 \times 10^{73}$	$1,15 \times 10^{74}$	$1,21 \times 10^{78}$
Intensidade do vento	$2,43 \times 10^{78}$	$1,33 \times 10^{73}$	$8,22 \times 10^{72}$

As Figuras 5.22 a 5.25 permitem a visualização do Espectro-Gradiente de cada variável analisada acima.

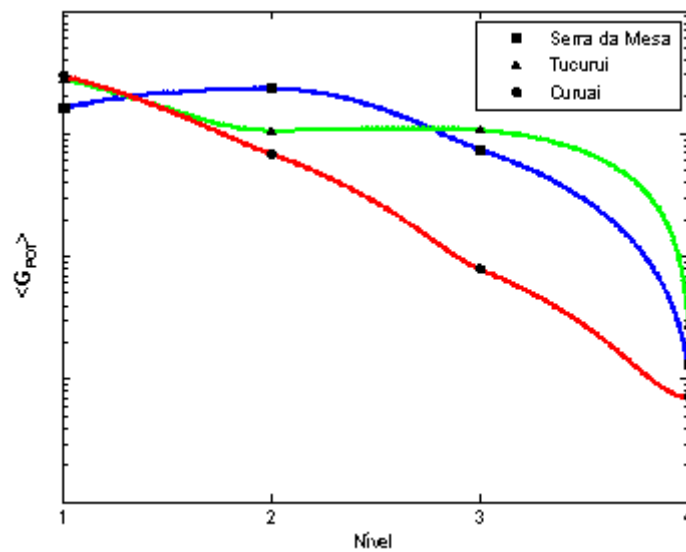


Figura 5.22 – Espectro-Gradiente da pressão atmosférica média nas respectivas regiões.

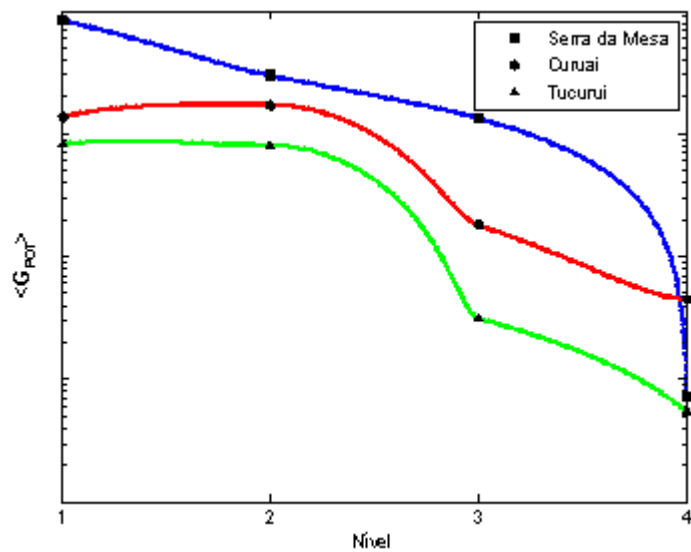


Figura 5.23 – Espectro-Gradiente da temperatura média do ar nas respectivas regiões.

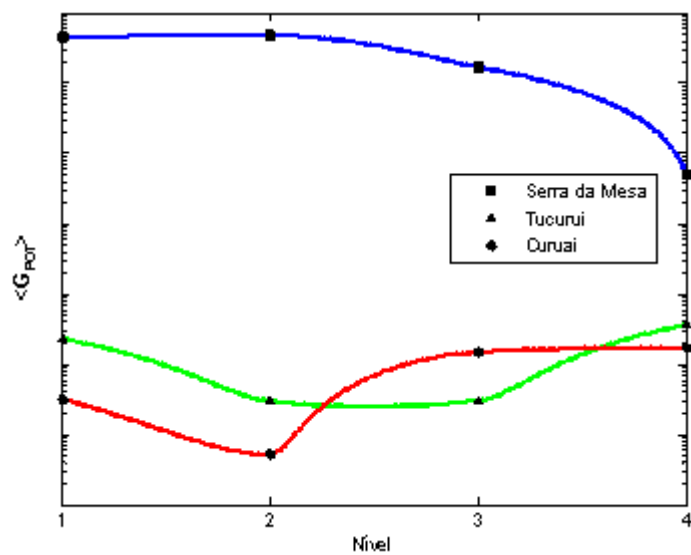


Figura 5.24 – Espectro-Gradiente da umidade relativa do ar nas respectivas regiões.

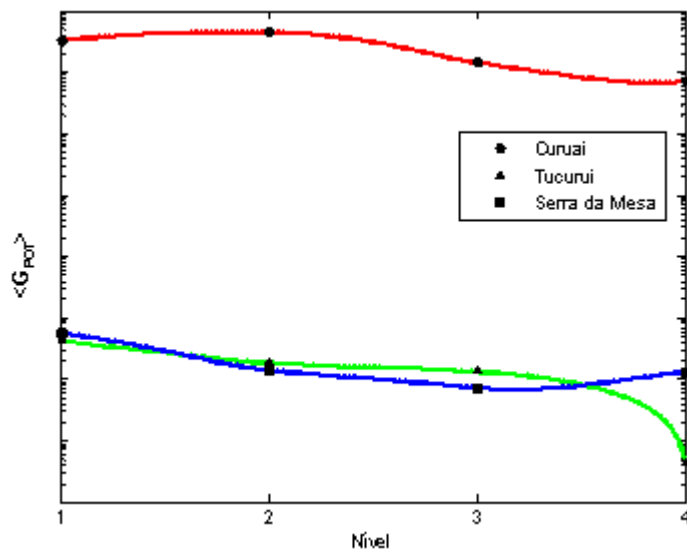


Figura 5.25 – Espectro-Gradiente da velocidade média zonal do vento nas respectivas regiões.

Já através das Figuras 5.26 a 5.29 podemos observar a relação entre as  $\langle f_{eg} \rangle$  dos sinais estudados, com seus respectivos desvios. Nessas figuras a  $\langle f_{eg} \rangle$  é da ordem de  $10^{72}$  e o desvio da ordem de  $10^{56}$ . Por isso, o desvio é quase imperceptível na visualização.

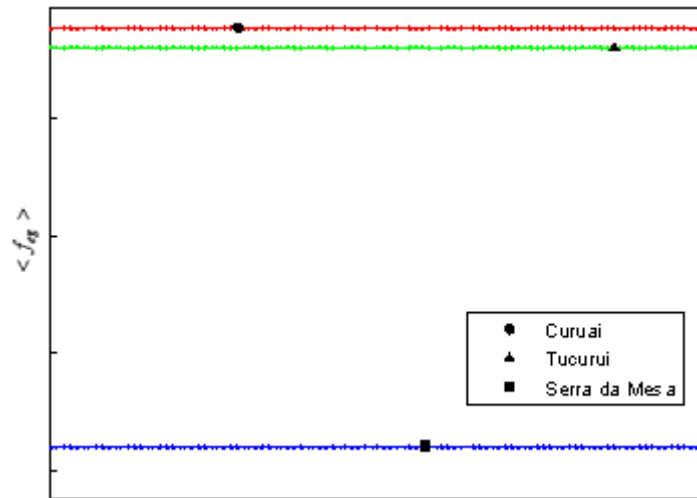


Figura 5.26 – Relação entre as Medidas de Flutuação do Espectro-Gradiente das ST da pressão atmosférica, com seus respectivos desvios. Curuai:  $\langle f_{eg} \rangle = 4,76 \times 10^{72}$ ; Tucuruí:  $\langle f_{eg} \rangle = 4,59 \times 10^{72}$ ; Serra da Mesa:  $\langle f_{eg} \rangle = 2,10 \times 10^{72}$ .

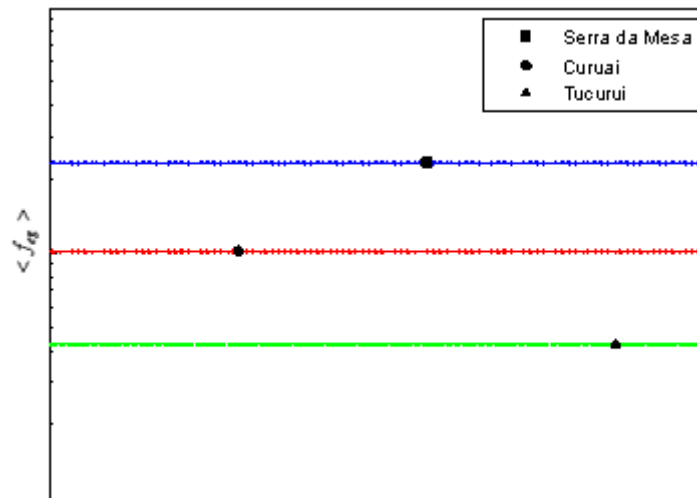


Figura 5.27 – Relação entre as Medidas de Flutuação do Espectro-Gradiente das ST da temperatura média do ar, com seus respectivos desvios. Curuai:  $\langle f_{eg} \rangle = 1,02 \times 10^{73}$ ; Tucuruí:  $\langle f_{eg} \rangle = 4,29 \times 10^{72}$ ; Serra da Mesa:  $\langle f_{eg} \rangle = 2,34 \times 10^{73}$ .

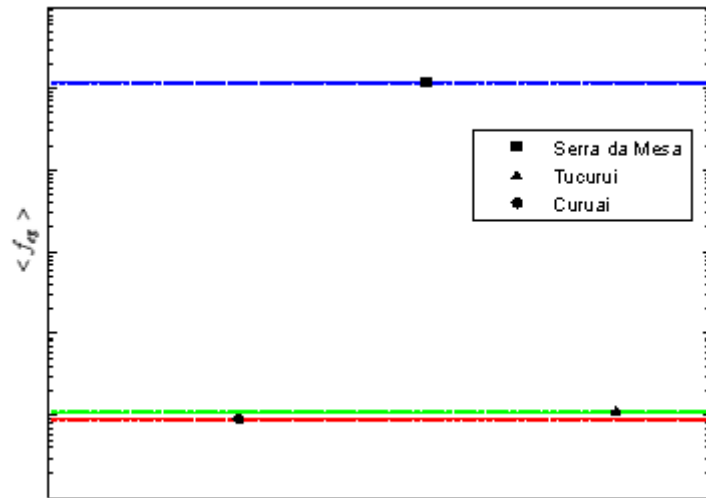


Figura 5.28 – Relação entre as Medidas de Flutuação do Espectro-Gradiente das ST da umidade relativa do ar média, com seus respectivos desvios. Curuai:  $\langle f_{eg} \rangle = 9,28 \times 10^{73}$ ; Tucuruí:  $\langle f_{eg} \rangle = 1,15 \times 10^{74}$ ; Serra da Mesa:  $\langle f_{eg} \rangle = 1,21 \times 10^{78}$ .

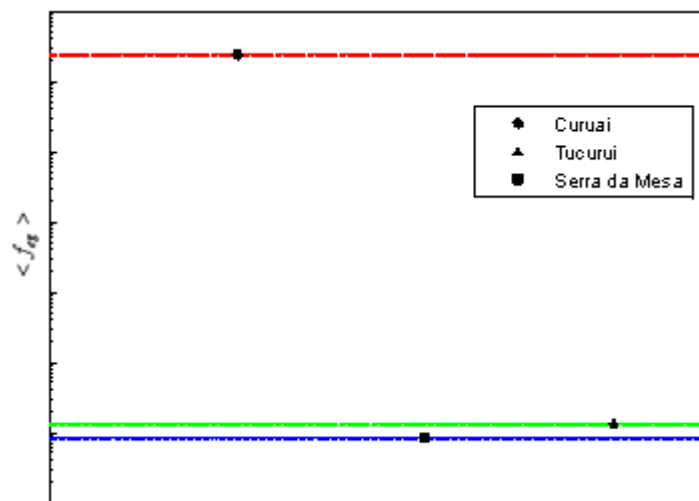


Figura 5.29 – Relação entre as Medidas de Flutuação do Espectro-Gradiente das ST da intensidade do vento médio, com seus respectivos desvios. Curuai:  $\langle f_{eg} \rangle = 2,43 \times 10^{78}$ ; Tucuruí:  $\langle f_{eg} \rangle = 1,33 \times 10^{73}$ ; Serra da Mesa:  $\langle f_{eg} \rangle = 8,22 \times 10^{72}$ .

As Figuras 5.26 a 5.29 resultam de uma análise preliminar com poucas ST e que demonstram que, apesar de estarmos analisando padrões de ST curtas, é possível discriminá-los e por isso, utilizá-los como representantes de cada sistema observado. Com exceção das medidas de intensidade do vento, o Espectro-Gradiente para o reservatório de Serra da Mesa se distinguiu dos demais. Do ponto de vista fenomenológico, é importante estudar se esta distinção pode estar associada à sua localização geográfica distinta dos outros sistemas. Nesse contexto, a GSA não só classifica, mas permite inferir, pela distância entre os valores de  $\langle f_{eg} \rangle$ , quais ambientes são semelhantes considerando seus aspectos históricos e de localização geográfica, e por conseqüência diferenças de natureza geofísica, meteorológicas, biogeoquímica, entre outras. Por exemplo: através da GSA podemos mensurar quão parecidos são os perfis de variabilidade da umidade relativa do ar entre o reservatório de Tucuruí e o Lago Curuai (Figura 5.28) na época analisada. Se obtivermos mais ST curtas de épocas periódicas, podemos descrever relações entre os diferentes ambientes, auxiliando no desenvolvimento de novos projetos ambientais ou de monitoramento dessas áreas, além de fornecer informações para o desenvolvimento de pesquisas científicas sobre essas possíveis correlações.

De acordo com os resultados apresentados cada reservatório está classificado de acordo com a análise GSA. Duas características importantes devem ser consideradas: (i) o nível das barras de erro permite uma caracterização precisa do padrão de variabilidade analisado e (ii) a distância entre os espectros e as flutuações médias funciona como um caracterizador de similaridade ou equivalência entre os sistemas analisados.

### 5.2.2 Análise de padrões de inundação no Pantanal

De acordo com o Capítulo 2, analisamos a ST da região do Pantanal Mato-grossense, com o intuito de classificar as diferentes sub-regiões de acordo com o perfil de inundação num período de 1979 a 1987. A região foi dividida em 10 sub-regiões (Corixo Grande, Cuiabá, Paraguai, Piquiri, Leque do Taquari, rio Taquari, Nhecolândia, Aquidauana, Nabileque e Miranda) (HAMILTON et al., 1996). As ST refletem a área de inundação nessas sub-regiões em  $\text{km}^2$  e os padrões médios podem ser visualizados na Figura 5.30.

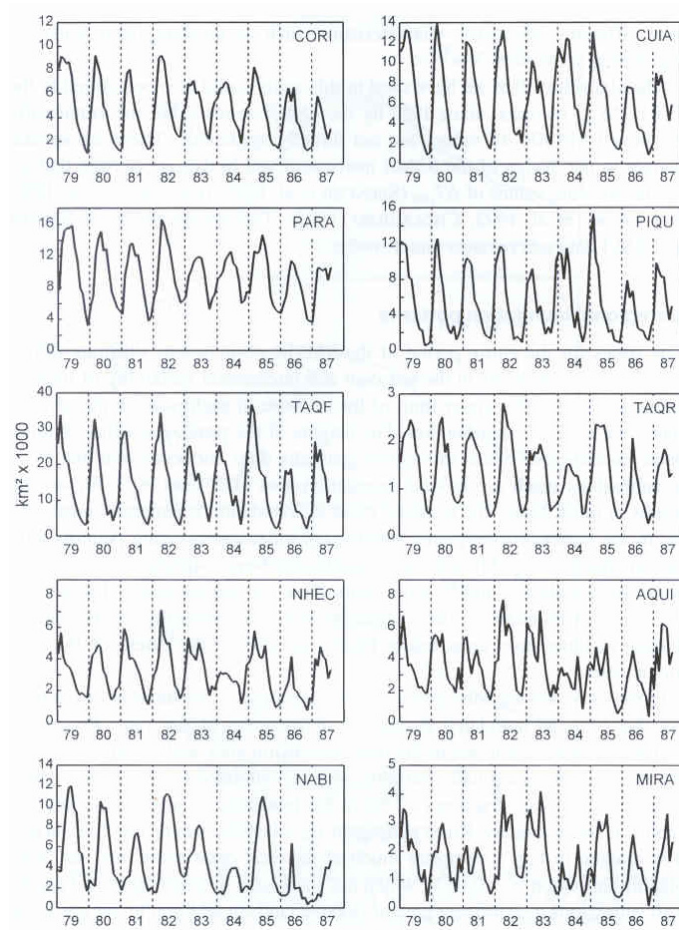


Figura 5.30 – Padrão de inundação nas sub-regiões pantaneiras analisadas.

Fonte: HAMILTON et al., 1996.

Analisar essas ST tem um significado diferente da análise nos reservatórios de Furnas Centrais Elétricas S.A., que demonstramos anteriormente, pois as séries aqui são muito mais curtas (106 pontos), o que nos permitiu testar a robustez da ferramenta nesse tipo de situação.

Para usar a GSA, tivemos que usar a *wavelet* biortogonal com ordem de reconstrução igual a dois e ordem de decomposição igual a quatro (bior2.4), devido ao tamanho da ST, onde apenas dois níveis de resolução *wavelet*.

O primeiro resultado importante é que conseguimos classificar os padrões de cada sub-região individualmente (Tabela 5.3), com exceção para as sub-regiões dos rios Corixo Grande e Paraguai, onde os padrões foram muito semelhantes. A importância desse resultado é significativa porque, mesmo estamos lidando com séries muito curtas, a técnica da GSA conseguiu classificar a maioria dos padrões. A não separação entre os padrões das sub-regiões dos rios Paraguai e Corixo Grande deve ser objeto de estudos futuros.

Tabela 5.3 – Classificação dos padrões de inundação nas sub-regiões analisadas.

	$f_{eg}$
Miranda	$3,91 \times 10^{10}$
Piquiri	$3,57 \times 10^{11}$
Aquidauana	$2,03 \times 10^{10}$
Nhecolândia	$1,56 \times 10^{11}$
Cuiabá	$8,89 \times 10^{10}$
Corixo Grande	$6,70 \times 10^{10}$
Paraguai	$6,70 \times 10^{10}$
Leque do Taquari	$5,07 \times 10^{10}$
Rio Taquari	$2,88 \times 10^{10}$
Nabileque	$2,16 \times 10^{10}$



Numa segunda análise foi possível classificar os padrões por regiões maiores arbitrariamente delimitadas (Figura 5.31) utilizando três ST médias que correspondem, respectivamente, à região norte (Corixo Grande, Cuiabá, Paraguai, Piquiri, Miranda, Nhecolândia e Aquidauana), região central (leque do Taquari e rio Taquari) e região sul (Nabileque). Esse resultado corrobora estudos da dinâmica da inundação na região: o ciclo de inundação sazonal é geralmente mais regular nas sub-regiões mais ao norte, que possuem padrões de inundação mais regulares com mudanças bem graduais, relacionadas diretamente com as chuvas (HAMILTON et al., 1996). Já as regiões mais ao sul, possuem uma variabilidade mais assimétrica em seu padrão, como pode ser visto na Figura 5.31, devido ao efeito da passagem da onda de cheia pela planície (“efeito de planície”) e pelas chuvas locais. Segundo HAMILTON et al. (1996), diferenças entre as sub-regiões são também observadas nas áreas que permanecem inundadas durante o período de estiagem (áreas de alta inundação). Contudo, mais estudos são necessários para se obter maior embasamento das conclusões.

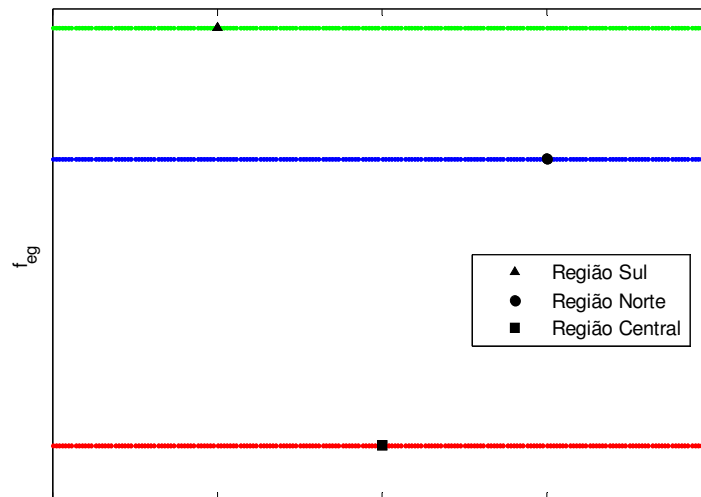


Figura 5.31 – Classificação dos padrões de inundação para as regiões norte, central e sul do Pantanal Mato-grossense (HAMILTON et al., 1996), por meio da GSA.

## 6 CONCLUSÃO

Este trabalho conjuga técnicas de Análise por Wavelets (Escalogramas e Multirresolução) com Análise de Padrões Gradientes propondo uma nova técnica para examinar e classificar ST curtas (e em alguns casos não-estacionárias), denominada Análise Espectral de Padrões-Gradiente (GSA). A metodologia proposta e desenvolvida no escopo deste projeto de mestrado apresentou grande robustez para classificação dos padrões de variabilidade de uma ST curta. A GSA pode ser considerada uma metodologia inovadora e complementar, pois, ao contrário das técnicas estatísticas convencionais, não inclui medidas de autocorrelação em suas operações. Concluímos que a GSA compensa o menor número de pontos (“informação no domínio temporal”) buscando as informações contidas no domínio das escalas que compõem o sinal.

Criamos, assim, um modelo de análises para séries canônicas, onde classificamos séries muito similares, mas oriundas de fenomenologias diferentes, como no caso dos diferentes subtipos de séries estocásticas e caóticas.

Para obter essa caracterização inédita, associamos nossa metodologia de análise com a escala do sinal onde acontece a transição entre eventos de pequenas e grandes escalas ( $\lambda_{mc}$ ), gerando um operador mais otimizado na classificação dos padrões de variabilidade de tais séries. Cabe aqui mencionar, que a  $\lambda_{mc}$  também resulta em menor esforço computacional, quando comparada com a possível utilização de escalas de coerência menores para o cálculo dos coeficientes de assimetria.

Como estudo de caso, aplicamos a GSA em ST curtas obtidas de experimentos ambientais, onde conseguimos classificar diferentes aspectos fenomenológicos em cada caso de aplicação: reservatórios aquáticos e regiões de inundação. Ape-

sar do caráter preliminar dessas análises, conseguimos obter resultados que justificam o desenvolvimento de um procedimento de análise completo e detalhado em ambos os casos, particularmente no caso dos dados do Projeto Furnas. Dessa forma um estudo sistemático de todas as variáveis medidas considerando todos os ambientes aquáticos estudados será realizado a partir de fevereiro de 2009. Nessa fase, novos critérios em relação à seleção das séries deverão ser definidos. Uma alternativa que possibilitará abranger o maior número de dados possível é testar a robustez do GSA para tamanhos de ST curtas menores. Com relação à análise das ST de padrões de inundação no Pantanal, a metodologia pôde ser testada em séries muito curtas, com tamanho da ordem de 100 pontos. Mesmo em tais condições a técnica mostrou-se eficiente para a classificação de processos relacionados às diferentes regiões pantaneiras com diferentes padrões de inundação. Esses resultados são inéditos e devem repercutir de forma positiva na estratégia de pesquisa da Embrapa no Pantanal para os próximos anos.

Como consequência de uma demanda colaborativa entre o LAC-INPE e o grupo de biofísica da universidade alemã Otto-von-Guericke, demos início a um trabalho inédito de pesquisa utilizando a GSA para análise e validação de modelos que simulam o padrão de variabilidade de pH enzimáticos em processos celulares reativo-difusivos<sup>14</sup>. Resultados preliminares obtidos nos últimos dois meses evidenciam o caráter plenamente satisfatório dessa nova aplicação.

## **6.1 Trabalhos futuros**

- Ampliar todas as amostras de dados analisados, dando seqüência aos estudos iniciados neste projeto;
- Estudar em detalhes, possíveis relações e equivalências entre o parâmetro de flutuação do espectro-gradiente, considerando as Leis de Escala con-

---

<sup>14</sup> Artigo submetido para o periódico Communications in Computational Physics.

vencionais da física estatística. À medida que a dimensão do sinal aumenta, a escala máxima de coerência média diminui possivelmente relacionada a alguma lei paramétrica. Isso é observado na Tabela 5.1 e pode significar alguma relação entre a dimensão do sinal com a distribuição de estruturas coerentes no sinal dado;

- Estudar mais profundamente os padrões de inundação das sub-regiões dos rios Corixo Grande e Paraguai, no Pantanal, com o intuito de entender a superposição dos padrões em termos de fenomenologia ou limitação da técnica;
- Implementar uma versão da GSA 2D para análise de perfis espaços-temporais.



## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABRY, P., GONÇALVÈS, P., FLANDRIN, P. Wavelets, spectrum analysis and 1/f processes. In: Antoniadis, A. and Oppenheim, G. (Editors). **Lectures notes in statistics 103: Wavelet and Statistics**. New York: Springer-Verlag, 1995, p. 15-29.

ADELSBRUNNER, H. **Geometric algorithms**. Hand Book of Convex Geometry. North-Holland: Elsevier, 1993.

ASSIREU, A. T. **Relatório de atividade de campo**. Período: 22/05/2005 a 25/05/2005. Disponível em: <http://www.dpi.inpe.br/sima>. Acesso em: 20 de maio de 2008.

ASSIREU, A.T., ROSA, R.R., LORENZZETTI, J.A, VIJAYKUMAR, N.L., REMPEL, E.L., RAMOS, F. M., ABREU de SÁ, L.D., BOLZAN, M.J.A. e ZANANDREA, A. Gradient Pattern Analysis of short nonstationary time séries: an application to lagrangian data from satellite tracked drifters. **Physica D: Nonlinear phenomena**, v.168, p. 397- 403, 2002.

BAEYR, H. C. von. Catch the wave. **The sciences**, 1999, p. 10-13.

BAK, P., TANG, C., WIESENFELD, K. Self-organized criticality. **Phys. Rev. Letters**, v. 59(4), p. 364-374, 1988.

BARBER, C. B., DOBKIN, D. P., e HUHDANPAA, H.T. **ACM transactions on mathematical software**, vol 469, 1996, p. 22.

BARBOSA, E. B. M. **Estudo da variabilidade de séries temporais ambientais através de espectros de assimetria implementados em software científico livre**. 2006-05-26. 107 p. (INPE-14670-TDI/1223). Dissertação (Mestrado em Computação Aplicada) - Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos. 2006.

BARLETT, K.B. e HARRISS, R. C. Review and assesment of methane emissions from wetlands. **Chemosphere**, v. 26, 1993, p. 261-320.

BARONI, M. P. M. A., CONCEIÇÃO, M. V., ROSA, R. R., PERSSON, C., ARWIN, H., SILVA Jr., E. F., ROMAN, L. S., NAKAMURA, O., PEPE, I. e SILVA, A.F. **J. of Non-Crystalline Solids**, vol 3734, 2006a, p. 352.

BARONI, M. P. M. A., ROSA, R. R., FERREIRA DA SILVA, A., PEPE, I., ROMAN, L. S., RAMOS, F. M., AHUJA, R., PERSSON, C. e VEJE, E., **Microelectronics Journal**, v. 290, 2006b, p. 37.

BRASIL: **Relatório da Primeira Fase, Descrição Física e Recursos Naturais, Estudo de Desenvolvimento Integrado da Bacia do Alto Paraguai** (Convênio Governo Brasileiro-UNDP-OEA) – Superintendência do Desenvolvimento da Região Centro-Oeste, Brasília, 1979.

BRUCE, A., DONOHO, D. e GAO, M. Y. Wavelet Analysis. **IEEE Spectrum**, 1996, p. 26-35.

BUCHER, E.H., BONETTO, A., BOYLE, T., CANEVARI, P., CASTRO, G., HUSZAR, P. e STONE, T. **Hidrovia: an initial environment examination of the Paraguay-Paraná Waterway – Wetland for the Americas**, Manomet, Massachusetts: Publication Number 10, 1993.

BURT, P. J. e ADELSON, E. H. The Laplacian pyramid as a compact image code. **IEEE Trans. On Comm.**, v. 31, 1983, p. 365-368.

CHIERICE, R. A. F. **O uso de wavelets na determinação do expoente de Hurst de uma série temporal diária de chuvas do município de Araras-SP de 1955-2000**. 2003-11-28. 84 p. Dissertação (Mestrado em Física Aplicada) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro. 2003.

CHOUDHURY, B. J., MAJOR, E. R., SMITH, E. A. e BECKER, F. Atmospheric effects on SMMR and SSM/I 37 GHz polarization difference over the Sahel. **Int. J. Remote Sensing**, v. 13, 1992, p. 3443-3463.

CHUI, C. K. **An introduction to wavelets**. San Diego: Academic Press, 1992.

COHEN, A., DAUBECHIES, I., FEAUVEAU, J. C. Biorthogonal bases of compactly supported wavelets, **Communications on pure and applied mathematics**, v. 55, 1992, p. 458-560.

COIFMAN, R.R. e WICKERHAUSER, M.V. Entropy-based algorithms for best basis selection. **IEEE Trans. on Inf. theory**, v. 38, 1992, p. 713-718.

COOLEY, J. e TUKEY, J. An algorithm for the machine calculation of complex fourier series. **Mathematics of computation**, v. 19, n. 90, 1965, p. 297-301.

COX, D. R. The current position of statistics: a personal view. **International statistics review**, v. 65, n. 3, 1997, p. 261-290.

CROSS, M. C., HOHENBERG, P.C. Pattern formation outside of equilibrium. **Rev. Mod. Physics**, v. 65, 1993, p. 851-1112.

DAUBECHIES, I. **Ten lectures on wavelets**, Montpellier: Capital City Press, 1992.  
DAUBECHIES, I. The Wavelet Transform, Time-Frequency Localization of a Signal and Analysis. **IEEE Trans. Info. Theory**. v. IT 36, 1990, p. 961-1005.

DOMINGUES, M. O., JÚNIOR, O. M. e COSTA, A. M. Algumas aplicações wavelet na análise de sinais atmosféricos. In: CONGRESSO TEMÁTICO DE APLICAÇÕES DE DINÂMICA E CONTROLE DA SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL, 2., 2003, São José dos Campos. **Anais...** São José dos Campos: SBMC, 2003. v. 2. Série Arquimedes.

EMERY, W.J. e THOMSON, R.E. **Data analysis methods in physical oceanography**. Second and revised edition. New York: Elsevier Science B.V., 2001.

FLANDRIN, P. Fractional Brownian Motion and Wavelets. In: Farge, M.; Hunt, J.C.R.; Vassilicos, J.C., (eds). **Wavelets, fractals, and Fourier transforms**. Clarendon Press-Oxford, 1994, p.109-122.

FLANDRIN, P. Wavelet analysis and synthesis of fractional brownian motion. **IEEE Transactions on Information Theory**, v.38, n.2, 1992, p.910-917.

FRISH, U. **Turbulence: the legacy of a. n. Kolmogorov**. Cambridge: Cambridge University Press, 1995.

FRITSCH, F. N. e R. E. CARLSON, Monotone piecewise cubic interpolation. **SIAM J. Numerical Analysis**, v. 17, 1980, p.238-246.

FURNAS. **Banco de dados**. Disponível em: <http://www.dpi.inpe.br/sima>. Acesso em: 10 de novembro de 2008.

GABOR, D. Theory of communications. **J. IEEE**, v. 93, p. 429-457, 1946.

GABOR, D. Communication theory, past, present and prospective. **IEEE Trans. Info. Theory**. v.IT-1, 1953a, p. 2-4.

GABOR, D. Communication theory and physics. **IEEE Trans. Info. Theory**. v.IT-1, 1953b, p. 48-59.

GAO, W., LI, B. L. Wavelet analysis of coherent structures at atmosphere-forest interface. **Journal of Applied Meteorology**, vol 32, 1993, p. 1717-1725.



- GARRET, C. J. R. e MUNK W. H. Internal waves in the ocean. **Ann. Rev. Fluid Mech.** v. 11, 1979, p. 339-369.
- GASQUET, G. e WITOMSKI, P. **Analyse de Fourier et applications.** Paris: Dunod, 2000.
- GOUPILLAUD, P-L. GROSSMAN, A. e MORLET, J. Cycle-octave and related transforms in seismic Signal Analysis. **Geoexploration**, v. 23, 1984, p. 85-102.
- GOMES, J. VELHO, L. e GOLDESTSTEIN, S. **Wavelets: teoria, software e aplicações.** Rio de Janeiro: IMPA, 1987.
- GRANGER, C. W. J. e NEWBOLD, J. P. Forecasting transformed series. **Journal of the Royal Statistical Society**, Series B, v. 38, 1976, p. 189-203.
- GRAPS, A. An introduction to wavelets. **IEEE Computer Society**, v.2, n.2, 1995.
- HAGELBERG, C. R., GAMAGE, N. K. K. **Applications of structure preserving wavelet decompositions to intermittent turbulence: a case study.** In: FOUFOULA-GEORGIU, E., KUMAR, P., et al. Wavelets in Geophysics, Academic Press, 1994.
- HAMILTON, S. K., SIPPEL, S. J., MELACK, J. M. Inundation patterns in the Pantanal wetland of South America determined from passive microwave remote sensing. **Arch. Hydrobiol.**, v.137, n.1, 1996.
- HÉNON, M. A two-dimensional mapping with a strange attractor. **Communications in Mathematical Physics**, v.50, 1976, p. 69–77.
- HOMSY, G. V.; PORTUGAL, M. S. e ARAÚJO, J. P. **Wavelets e previsões de séries de tempo: uma análise empírica.** Texto para Discussão N<sup>o</sup> 09, Porto Alegre, UFRGS, 2000.
- HUBBARD, B. B. **Ondes et ondelettes: La saga d'un outil mathématique.** San Diego: Pour La Science, 1995.
- INPE. **Projeto balanço do carbono de Furnas Centrais Elétricas.** Período: 23/01/2005 a 11/02/2006. Disponível em: <http://www.dpi.inpe.br/sima/bancos>. Acesso em 20 de maio de 2008 (a).
- INPE. **Projeto balanço do carbono de Furnas Centrais Elétricas.** Disponível em: <http://www.dpi.inpe.br/projetofurnas>. Acesso em 04 de setembro de 2008 (b).

JUNK, W. J. **Wetlands of tropical South America**. In: WHIGHAM, D., DYKY-JOVÁ, D. e HEJNÝ, S. (eds.): *Wetlands of the world: inventory, ecology and management*, vol I Kluwer, 1993, p. 679-739.

KAHANER, DAVID, MOLER, C., e NASH, S. **Numerical methods and software**, Prentice Hall, 1988.

KANEKO, K. Globally coupled chaos violates the law of large numbers but not the central-limit theorem. **Phys. Rev. Lett.**, v. 65, 1990, p. 1391-1394.

LESLIE, D. C. **Developments in theory of turbulence**. Oxford: Clarendon, 1973.

LORENZ, E.N. Deterministic nonperiodic flow. **Journal of the Atmospheric Science**, v.20, 1963, p.130-141.

MALAMUD, B. D. e TURCOTE, D. L. Self-affine time series: measures of weak and strong persistence. **Journal of Statistical Planning and Inference**, v. 80, 1999, p. 173-196.

MACKENZIE, D. Wavelets: seeing the forest and the trees. **National Academy of Sciences**, 2007

MALLAT, S. **Une exploration des signaux em ondelettes**. Palaiseau: Les Editions de l'École Polytechnique, 2000.

MALLAT, S. Multiresolution approximations and wavelet orthonormal bases of  $L_2(\mathcal{R})$ , **Transactions of the American Mathematical Society**, v. 315, 1989a, p.69-87.

MALLAT, S. A Theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation, **IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence**, v. 11, n.7, 1989b, p.674-693.

MANDELBROT, B.B., VAN NESS, J.W. Fractional brownian motions, fractional noises and applications. **SIAM Review**, v.10, n.4, 1968, p.422-437.

MANDELBROT, B.B. **The fractal geometry of nature**. W.H. Freeman and Company, New York, 1983.

MEMÓRIA, J. M. P. **Breve história da estatística**. 1ª edição. Brasília: Embrapa Informação Tecnológica, 2004.

- MEYER, Y. **Wavelets: algorithms and applications**. Philadelphia: SIAM, 1993.
- MISITI, M., MISITI, Y., OPPENHEIM, G., POGGI, J.-M. **Les ondelettes et leurs applications**, Paris: Hermes Science Publications, 2003.
- MONTEIRO, L. H. A., **Sistemas dinâmicos**, São Paulo: Editora Livraria da Física, 2002.
- MORETTIN, P. A., TOLOI, C. M. C. **Análise de séries temporais**. 2ª edição. São Paulo: Edgard Blücher, 2006.
- MORETTIN, P. A. **Ondas e ondaletas**: da análise de Fourier à análise de ondaletas. 1ª edição. São Paulo: Edusp, 1999.
- NELSON, H. L. **The use of Box-Cox transformations in economic time series analysis**: An Empirical Study. Tese de Doutorado – University of California, San Diego, 1976.
- OLIVEIRA, H. M. de. **Análise de sinais para engenheiros**: uma abordagem via wavelets. 1ª edição. Rio de Janeiro: Brasport, 2007.
- OPPENHEIN, A. V., SHAFER, R. W. **Discrete-Time Signal Processing**. New Jersey: Prentice-Hall, 1989.
- OSBORNE, A. R. and PROVENZALE, A. Finite correlation dimension for stochastic systems with power-law spectra. **Physica D: Nonlinear Phenomena**, v.35, Issue 3, 1989, p. 357-381.
- ORSZAG, S. A. **Lectures on the statistical theory of turbulence**, IN: Fluid Dynamics, Proc. Les Houches, R. Balian e J. –L. Peube, et al. London: Gordon and Breach, 1977.
- PANCHEV, S. **Random functions and turbulence**. Oxford: Pergamon, 1971.
- PAPOULIS, A. **The Fourier integral and its applications**. New York: McGraw Hill, 1962.
- PARRAGA, A. **Aplicação da Transformada Wavelet Packet na Análise e Classificação de Sinais de Vozes Patológicas**. 2002-03. 163 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre. 2002
- PEITGEN, H.O., JÜRGENS, H., SAUPE, D. **Chaos and fractals**: new frontiers of

science. New York: Springer-Verlag, 1992.

PENG, C. K., BULDYREV, S.V., GOLDBERGER, A.L., HAVLIN, S., SCIORTINO, F., SIMONS, M., STANLEY, H.E. Long-range correlations in nucleotide sequences. **Nature**, v. 356, 1992., p. 168-171

PLOSSER, C. I. Short-term forecasting and seasonal adjustment. **Journal of the American Statistical Association**, v. 74, 365, 1979, p.15-24.

RAMOS, F.M., BOLZAN, J.M.A., ABREU SÁ, L.D. e ROSA, R.R. Atmospheric turbulence within and above an Amazon forest. **Physica D: Nonlinear Phenomena**, 193, 2004, p. 278-291.

RICHEY, J. E., VICTORIA, R. L., SALATI, E. e FORSBERG, B.R. **The biogeochemistry of a major river system: the Amazon case study.** – In: DEGENS, E. T., KEMPE, S. e RICHEY, J. E. (eds.): Biogeochemistry of Major World Rivers. New York: John Wiley, 1991.

RIOUL, O. e VETTERLI, M. Wavelets and signal processing. **IEEE Signal Proc. Mag.**, 1991, p. 14-37.

ROSA, R. R., SILVA, J. D. S. e CAMPOS-VELHO, H. F. **Computação e matemática aplicadas às ciências e tecnologias espaciais.** Coletânea de minicursos oferecidos na escola de verão do LAC – Laboratório Associado de Computação e Matemática Aplicada do Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais. São José dos Campos, SP, Brasil, janeiro de 2008.

ROSA, R. R., BARONI, M. P. M. A., ZANIBONI G. T., FERREIRA DA SILVA, A., ROMAN, L. S., PONTES, J. e BOLZAN, M. J. A. **Physica A**, vol 666, 2007, p. 386.

ROSA, R., CAMPOS, M., RAMOS, F., VIJAYKUMAR, N., FUJIWARA, S. e SATO, T. Gradient Pattern Analysis of structural dynamics: application to molecular system relaxation. **Brazilian Journal of Physics**, v. 33, n. 3, 2003, p. 605–610.

ROSA, R., PONTES, J., CHRISTOV, C., RAMOS, F., NETO, C., REMPEL, E. e WALGRAEF, D. Gradient Pattern Analysis of Swift-Hohenberg dynamics: phase disorder characterization. **Physica A**, v. 283, n. 1-2, 2000, p. 156–159.

ROSA, R.; SHARMA, A.; VALDIVIA, J. Characterization of asymmetric fragmentation patterns in spatially extended systems. **International Journal of Modern Physics B**, v. 10, n. 1, 1999, p. 147–163.

SALMON, R. **Geostrophic turbulence**, IN: Topics in ocean physics, Proc. Int. School of Physics "E. Fermi", Course LXXX, A.R. Osborne e P. Malanotte Rizzoli, et al. Amsterdam: North-Holland, 1982.

SCHREIBER, T. Interdisciplinary application of nonlinear time series methods. **Phys. Rep.**, v.308, n.1, 1998, p. 1-64.

SHENG Y. **Wavelet Transform**. The transforms and applications handbook. CRC Press in cooperation with IEEE press: Boca Raton, 1996.

SILVA, A. V. e EYNG, J. **Wavelets e wavelet packets**. Disponível em: <http://www.inf.ufsc.br/~visao/2000/Wavelets/>. Acessado em 15 de agosto de 2008.

SIPPEL, S. J., HAMILTON, S. K. e MELACK, J. M. Determination of inundation area in the Amazon river floodplain using the SMMR 37 GHz polarization difference. **Remote Sensing Environ**, vol 78, 1994, p. 70-76.

STECH, J.L., LIMA, I.B.T., NOVO, E.M.L.M., SILVA, C.M., ASSIREU, A.T., LORENZZETTI, J.A., CARVALHO, J.C., BARBOSA, C.C., ROSA, R.R. Telemetric Monitoring System for Meteorological and Limnological Data Acquisition in Aquatic Environments. **Verh Internat, Verein Limnol.**, 2006, v.29.

STEVENSON, M.R.; LORENZZETTI, J.A.; STECH, J.L.; ARLINO, P.R.A. SIMA - an integrated environmental monitoring system. IN: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE SENSORIAMENTO REMOTO, 1993, Curitiba. **Anais...** São José dos Campos: INPE, 1993.

STRANG, G., NGUYEN, T. **Wavelets and filter banks**. Cambridge, Wellesley-Cambridge Press, 1996.

SWINNEY, H.L. e TSALLIS, C. Anomalous distributions, nonlinear dynamics, and nonextensivity. **Physica D: Nonlinear Phenomena**, v.193, Issue 1-4, 2004, p. 1-2.

TEWFIK, A.H., KIM, M. Correlation structure of the discrete wavelet coefficients of fractional brownian motion. **IEEE Transactions on Information Theory**, v.38, n.2, 1992, p.904-909.

TORRES, M.E. e GAMERO, L.G. Relative complexity changes in time series using information measures. **Physica A**, 286, 2000, p. 457-473.

TORRÉSANI, B. An overview of wavelet analysis and time-frequency analysis. **Proc. of the Int. Workshop in self-similar systems**, Dubna, Russia, JINR, E5-99-38, 1999, p. 9-34. Disponível em

<http://www.cmi.univmrs.fr/~torresan/lectures.html>. Acessado em 20 de junho de 2008.

TURCOTTE, D. L.. **Fractals and chaos in geology and geophysics**. Second Edition. Cambridge: Cambridge University Press, 1997.

VERHULST, P.F. Recherches mathématiques sur la loi d'accroissement de la population. **Nouv. mém. de l'Academie Royale des Sci. et Belles-Lettres de Bruxelles**, v. 18, 1845, p. 1-41.