



Ministério da  
Ciência e Tecnologia



INPE-15381-TDI/1400

**SIMULAÇÃO E ANÁLISE COMPUTACIONAL DAS  
ANISOTROPIAS DA RADIAÇÃO CÓSMICA DE FUNDO  
USANDO O MODELO DE EINSTEIN-DE SITTER**

Cristiane Pires Camilo

Dissertação de Mestrado do Curso de Pós-Graduação em Computação Aplicada,  
orientada pelos Drs. Reinaldo Roberto Rosa e Germán Ignacio Gomero, aprovada  
em 21 de maio de 2004

Registro do documento original:

<<http://urlib.net/sid.inpe.br/jeferson/2004/07.22.14.53>>

INPE  
São José dos Campos  
2008

**PUBLICADO POR:**

Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE

Gabinete do Diretor (GB)

Serviço de Informação e Documentação (SID)

Caixa Postal 515 - CEP 12.245-970

São José dos Campos - SP - Brasil

Tel.:(012) 3945-6911/6923

Fax: (012) 3945-6919

E-mail: [pubtc@sid.inpe.br](mailto:pubtc@sid.inpe.br)

**CONSELHO DE EDITORAÇÃO:****Presidente:**

Dr. Gerald Jean Francis Banon - Coordenação Observação da Terra (OBT)

**Membros:**

Dr<sup>a</sup> Maria do Carmo de Andrade Nono - Conselho de Pós-Graduação

Dr. Haroldo Fraga de Campos Velho - Centro de Tecnologias Especiais (CTE)

Dr<sup>a</sup> Inez Staciarini Batista - Coordenação Ciências Espaciais e Atmosféricas (CEA)

Marciana Leite Ribeiro - Serviço de Informação e Documentação (SID)

Dr. Ralf Gielow - Centro de Previsão de Tempo e Estudos Climáticos (CPT)

Dr. Wilson Yamaguti - Coordenação Engenharia e Tecnologia Espacial (ETE)

**BIBLIOTECA DIGITAL:**

Dr. Gerald Jean Francis Banon - Coordenação de Observação da Terra (OBT)

Marciana Leite Ribeiro - Serviço de Informação e Documentação (SID)

Jefferson Andrade Ancelmo - Serviço de Informação e Documentação (SID)

Simone A. Del-Ducca Barbedo - Serviço de Informação e Documentação (SID)

**REVISÃO E NORMALIZAÇÃO DOCUMENTÁRIA:**

Marciana Leite Ribeiro - Serviço de Informação e Documentação (SID)

Marilúcia Santos Melo Cid - Serviço de Informação e Documentação (SID)

Yolanda Ribeiro da Silva Souza - Serviço de Informação e Documentação (SID)

**EDITORAÇÃO ELETRÔNICA:**

Viveca Sant´Ana Lemos - Serviço de Informação e Documentação (SID)



Ministério da  
Ciência e Tecnologia



INPE-15381-TDI/1400

**SIMULAÇÃO E ANÁLISE COMPUTACIONAL DAS  
ANISOTROPIAS DA RADIAÇÃO CÓSMICA DE FUNDO  
USANDO O MODELO DE EINSTEIN-DE SITTER**

Cristiane Pires Camilo

Dissertação de Mestrado do Curso de Pós-Graduação em Computação Aplicada,  
orientada pelos Drs. Reinaldo Roberto Rosa e Germán Ignacio Gomero, aprovada  
em 21 de maio de 2004

Registro do documento original:

<<http://urlib.net/sid.inpe.br/jeferson/2004/07.22.14.53>>

INPE  
São José dos Campos  
2008

C146s Camilo, Cristiane Pires.

Simulação e análise computacional das anisotropias da radiação cósmica de fundo usando o Modelo de Einstein-de Sitter / Cristiane Pires Camilo. – São José dos Campos: INPE, 2008.

79p. ; (INPE-15381-TDI/1400)

Dissertação (Mestrado em Computação Aplicada) – Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 2004.

1. Radiação cósmica de fundo. 2. Cosmologia. 3. Modelo Einstein-de Sitter. 4. Simulação. 5. Análise computacional. I. Título.

CDU 523.165

---

Copyright © 2008 do MCT/INPE. Nenhuma parte desta publicação pode ser reproduzida, armazenada em um sistema de recuperação, ou transmitida sob qualquer forma ou por qualquer meio, eletrônico, mecânico, fotográfico, microfílmico, reprográfico ou outros, sem a permissão escrita da Editora, com exceção de qualquer material fornecido especificamente no propósito de ser entrado e executado num sistema computacional, para o uso exclusivo do leitor da obra.

Copyright © 2008 by MCT/INPE. No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted in any form or by any means, electronic, mechanical, photocopying, microfilming, recording or otherwise, without written permission from the Publisher, with the exception of any material supplied specifically for the purpose of being entered and executed on a computer system, for exclusive use of the reader of the work.

C146s Camilo, Cristiane Pires.

Simulação e análise computacional das anisotropias da radiação cósmica de fundo usando o Modelo de Einstein-de Sitter / Cristiane Pires Camilo. – São José dos Campos: INPE, 2008.

79p. ; (INPE-15381-TDI/1400)

Dissertação (Mestrado em Computação Aplicada) – Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 2004.

1. Radiação cósmica de fundo. 2. Cosmologia. 3. Modelo Einstein-de Sitter. 4. Simulação. 5. Análise computacional. I. Título.

CDU 523.165

---

Copyright © 2008 do MCT/INPE. Nenhuma parte desta publicação pode ser reproduzida, armazenada em um sistema de recuperação, ou transmitida sob qualquer forma ou por qualquer meio, eletrônico, mecânico, fotográfico, microfílmico, reprográfico ou outros, sem a permissão escrita da Editora, com exceção de qualquer material fornecido especificamente no propósito de ser entrado e executado num sistema computacional, para o uso exclusivo do leitor da obra.

Copyright © 2008 by MCT/INPE. No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted in any form or by any means, electronic, mechanical, photocopying, microfilming, recording or otherwise, without written permission from the Publisher, with the exception of any material supplied specifically for the purpose of being entered and executed on a computer system, for exclusive use of the reader of the work.

Aprovada pela Banca Examinadora em cumprimento a requisito exigido para a obtenção do Título de **Mestre em Computação Aplicada**.

Dr. Fernando Manoel Ramos



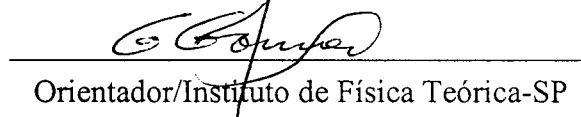
Presidente/INPE, SJCampos-SP

Dr. Reinaldo Roberto Rosa



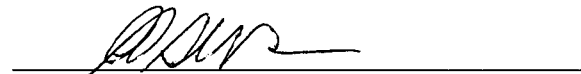
Orientador/INPE, SJCampos-SP

Dr. German Ignácio Gomero Ferrer



Orientador/Instituto de Física Teórica-SP

Dr. Carlos Alexandre Wuensche de Souza



Membro da Banca/ INPE, SJCampos-SP

Dr. Marcelo José Rebouças



Convidado/CBPF-Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

**Aluno(a): Cristiane Pires Camilo**

São José dos Campos, 21 de maio de 2004.



A minha família:

*Polianna, Alexandre*

*Renato, Neusa,*

*Ale, Joana e Ana.*





## AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por todas as oportunidades.

À minha família que sempre me apoiou, principalmente minha mãe, que foi muito importante na etapa final.

Às minhas amigas e amigos que fiz no Inpe, especialmente à Ivana, Márcia e Sabrina e ao Ubiratan.

Ao Wiliam Hipolito, do IFT, por disponibilizar algumas horas para as aulas de física.

Ao Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE e aos professores, sempre dispostos a compartilhar seus conhecimentos. Um agradecimento especial ao Professor Pawel por ter disponibilizado uma sala especial no CCS à Polianna.

Aos orientadores Professores Reinaldo Roberto Rosa e Germán I. Gomero pela dedicada orientação e pelo apoio na realização deste trabalho.

Ao Alexandre, pelo amor e por sempre me apoiar nos estudos.

À CAPES, pelo apoio financeiro que tornou este trabalho possível.



## RESUMO

As flutuações de temperatura na radiação cósmica de fundo, em grandes escalas angulares, são de fundamental importância no estudo da formação de estruturas no universo. Este trabalho tem como principal objetivo simular mapas de anisotropia utilizando um modelo simples do Universo (modelo Einstein-de Sitter). Os mapas de anisotropia são descritos usando a decomposição em harmônicos esféricos e a simulação é desenvolvida a partir da geração aleatória dos momentos multipolares, seguindo uma distribuição normal com variância dada pelo espectro de potência. O espectro de potência para este modelo é calculado pressupondo perturbações iniciais de densidade do tipo gaussiano com espectro de Harrison-Zeldovich. Para representar visualmente os mapas de anisotropia é preciso escolher uma técnica de pixelização para a esfera. Neste trabalho utilizamos a pixelização Igloo por ser eficiente e de fácil implementação computacional. Como objetivo interpretativo, aplicamos a Análise de Padrões Gradientes (GPA) aos padrões de anisotropia a fim de verificar se esta técnica computacional é capaz de distinguir mapas com diferentes espectros de potência.



# SIMULATION AND COMPUTATIONAL ANALYSIS OF THE COSMIC MICROWAVE BACKGROUND ANISOTROPIES USING THE EINSTEIN-DE SITTER MODEL

## ABSTRACT

The temperature fluctuations in the Cosmic Microwave Background, for large angular scales, have fundamental importance for the study of the structure formation in the universe. The main goal of this work is to simulate anisotropy maps using a simple model of the Universe (Einstein-de Sitter model). The anisotropy maps are described using spherical harmonic decomposition and the simulation is performed from random multipolar moments generation, following a normal distribution with its variance given by the power spectrum. The power spectrum of this model is calculated considering primordial density gaussian perturbations with a Harrison-Zeldovich spectrum. In order to visualize the anisotropy maps it is necessary to choose a sphere pixelization technique. In this work we use the Igloo pixelization for being efficient and due to its easy computational implementation. As a interpretative goal we applied the Gradient Pattern Analysis (GPA) on the anisotropy patterns in order to verify whether this computational technique is capable to distinguish among maps generated from different power spectra.



## SUMÁRIO

Pág.

### LISTA DE FIGURAS

### LISTA DE TABELAS

|  |           |
|--|-----------|
| <b>CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO</b>   | <b>19</b> |
| <b>CAPÍTULO 2 - COSMOLOGIA</b>   | <b>23</b> |
| 2.1 - Modelos Cosmológicos de Friedmann-Lemaître . . . . .                                       | 23        |
| 2.2 - Perturbações Cosmológicas . . . . .  | 26        |
| 2.3 - Flutuações de Temperatura na RCF . . . . .   | 29        |
| <b>CAPÍTULO 3 - GERAÇÃO DE MAPAS DE ANISOTROPIA</b>  | <b>31</b> |
| 3.1 - Harmônicos Esféricos . . . . .   | 31        |
| 3.2 - Espectro de Potências . . . . .  | 34        |
| 3.3 - Pixelização da Esfera . . . . .  | 36        |
| 3.4 - Mapas de Anisotropia . . . . .   | 41        |
| <b>CAPÍTULO 4 - IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL</b>  | <b>47</b> |
| 4.1 - Algoritmo para a Pixelização Igloo . . . . .   | 47        |
| 4.2 - Algoritmo para Gerar $U_{P,lm}$ e $V_{P,lm}$ . . . . .                                     | 49        |
| 4.2.1 - Algoritmo para Gerar e Avaliar as Funções Associadas de Legendre . . . . .               | 51        |
| 4.2.2 - Algoritmo para Gerar e Avaliar as Integrais das Funções Associadas de Legendre . . . . . | 52        |
| 4.3 - Algoritmo para Simular os Mapas de Anisotropia da RCF Conforme Modelo EdS . . . . .        | 54        |
| <b>CAPÍTULO 5 - ANÁLISE DE PADRÕES GRADIENTES</b>  | <b>61</b> |
| 5.1 - Os Momentos Gradientes . . . . .   | 61        |
| 5.2 - O Primeiro Momento Gradiente para Assimetrias . . . . .                                    | 63        |
| 5.3 - Caracterização dos Mapas por Assimetrias . . . . .   | 64        |
| <b>CAPÍTULO 6 - CONCLUSÃO</b>  | <b>69</b> |



|   |           |
|---|-----------|
| <b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>                 | <b>71</b> |
| <b>APÊNDICE A - PROJEÇÃO MOLLWEIDE</b>            | <b>77</b> |
| A.1 - Algoritmo para Projeção Mollweide . . . . . | 77        |

## LISTA DE FIGURAS

|  | <u>Pág.</u> |
|--|-------------|
| 3.1 Exemplo de pixelização ECP utilizada pelo MatLab. . . . .  | 37          |
| 3.2 Exemplo da pixelização cúbica. . . . .   | 37          |
| 3.3 Exemplo da pixelização HEALPix. . . . .  | 38          |
| 3.4 Exemplo da pixelização Igloo. . . . .  | 39          |
| 3.5 Pixelização Igloo. . . . .   | 40          |
| 3.6 Pixelização Igloo - 4 <sup>0</sup> refinamento. . . . .  | 41          |
| 4.1 Diagrama de fluxo de geração de mapas. . . . .   | 58          |
| 4.2 Pixelização da esfera. . . . .   | 58          |
| 4.3 Cálculo de $U_{P,lm}$ e $V_{P,lm}$ . . . . .   | 59          |
| 4.4 Geração dos mapas. . . . .   | 59          |
| 5.1 Representação esquemática da Análise de Padrões Gradientes de um<br>campo escalar matricial. . . . . | 62          |
| 5.2 Triangulação de Dealunay no contexto do operador AAF. . . . .  | 64          |
| 5.3 Exemplo de saída do operador AAF. . . . .  | 65          |
| A.1 Projeção Mollweide. . . . .  | 77          |



## LISTA DE TABELAS

|  | <u>Pág.</u> |
|--|-------------|
| 3.1 Expressões dos polinômios de Legendre. . . . .   | 32          |
| 3.2 Funções associadas de Legendre. . . . .  | 33          |
| 3.3 Exemplos de harmônicos esféricos reais com valores normalizados e utilizando a projeção Mollweide. . . . . | 35          |
| 3.4 Exemplos do efeito da pixelização. . . . .   | 42          |
| 3.5 Exemplos de mapas simulados com diferentes espectros e resoluções. . . .                                   | 45          |
| 5.1 Valores médios de $g_1^a$ e desvio padrão. . . . .   | 66          |
| 5.2 Histograma do primeiro momento gradiente $g_1^a$ . . . . .   | 67          |



## CAPÍTULO 1

### INTRODUÇÃO

Com o avanço das técnicas computacionais e com a sua aplicação em quase todos os ramos da ciência, a comunidade científica tem desenvolvido e utilizado novos métodos computacionais para armazenamento, processamento, visualização, análise e simulação de dados referentes a fenômenos observados na natureza.

Na astronomia, as técnicas computacionais encontram aplicações no estudo da evolução do sistema solar, da física planetária, da formação da estrutura e evolução estelar, na formação e evolução de galáxias, da estrutura em grande escala e topologia do Universo. Com fins de ilustração podemos citar (a) Ferramentas de análise em Java, para exploração e análise de uma grande biblioteca de taxas de reações nucleares ([LINGERFELT et al., 2002](#); [EDIRISINGHE et al., 2002a](#)); (b) Programas para determinação do redshift e classificação de supernovas ([HOWELL; WANG, 2002](#)); (c) Algoritmos genéticos e redes neurais aplicados em simulações de colisões de galáxias ([EDIRISINGHE et al., 2002b](#)); (d) O *National Cosmology Supercomputer - COSMOS*, pertencente à Universidade de Cambridge, o primeiro supercomputador dedicado à pesquisa em cosmologia, no estudo de modelos de origem de galáxias e outras estruturas em grande escala ([COSMOS... , 2003](#)) e (e) Softwares em cosmologia, tais como o CMBFAST ([CMBFASTG, 2002](#)), COSMICS ([COSMICS... , 2003](#)), CAMB ([CAMB... , 2004](#)) e CMBEASY ([CMBEASY... , 2003](#)). Adicionalmente existem bancos de dados de catálogos de galáxias e outros objetos disponíveis "online"([NASA/IPAC... , 2000](#)), contendo informações como posição, tamanho, redshift, luminosidade, entre outros.

Uma das descobertas mais espetaculares na cosmologia do século XX foi a detecção de um sinal muito fraco na frequência das microondas que provinha de todas as direções do céu. Esta radiação passou a ser chamada de radiação cósmica de fundo de microondas, ou simplesmente, Radiação Cósmica de Fundo (RCF).

A RCF é entendida agora como um remanescente de uma época em que o universo era extremamente pequeno, e portanto a densidade de matéria e a sua temperatura eram extremamente altas. Em um cenário desse tipo, os fótons são tão energéticos que não permitem a formação de átomos: qualquer átomo que se formar é imediatamente destruído ao bater num dos inúmeros fótons que vagueiam pelo universo.

Com o passar do tempo o universo se expandiu e esfriou o suficiente de modo a permitir que os átomos se formassem, pois a energia da grande maioria dos fótons era insuficiente para ioniza-los. Como consequência, os fótons não eram mais absorvidos e reemitidos pela matéria e não existiam mais elétrons livres para espalhá-los, o que aumentou o livre caminho médio para os fótons significativamente. Ocorreu assim, um desacoplamento entre a matéria e a radiação, e o universo ficou transparente. Os fótons quase livres começaram a se propagar por todo o Universo com a distribuição de temperatura de um corpo negro. O limite onde ocorreu o desacoplamento chama-se Superfície do Último Espalhamento (SUE) (ISLAM, 1992).

A RCF é altamente isotrópica, isto é, a temperatura da radiação (medida pelo espectro de corpo negro) é essencialmente a mesma em qualquer direção. Esta temperatura na atualidade é  $T_0 = 2,725 \pm 0,002 \text{ K}$  (BENNETT *et al.*, 2003). No entanto a radiação não é perfeitamente isotrópica: existem pequenas diferenças entre as temperaturas provenientes de distintas direções. Denotemos por  $T(\theta, \varphi)$  a temperatura da radiação de fundo observada na direção dada pelos ângulos polar e azimutal  $(\theta, \varphi)$ . O mapa das anisotropias da RCF é definido por

$$\frac{\delta T}{T}(\theta, \varphi) = \frac{T(\theta, \varphi) - T_0}{T_0}. \quad (1.1)$$

Observações feitas a partir de 1992 pelo satélite COBE (*Cosmic Background Explorer*) determinaram que a amplitude das anisotropias é  $|\delta T/T| \sim 10^{-5}$  (SMOOT *et al.*, 1992).

Por outro lado, um dos problemas mais intrigantes na cosmologia é explicar como se deu a formação de estruturas em grande escala (galáxias, aglomerados de galáxias, filamentos, etc). As explicações mais aceitas para a origem destas estruturas estão baseadas na hipótese da existência de pequenas perturbações na densidade de matéria nos primeiros instantes do universo. Estas perturbações em escalas muito grandes descrevem regiões onde a curvatura é um pouco maior (ou menor) que a curvatura média do universo. Como a gravidade é atrativa, as regiões com maior curvatura, começariam a acumular mais matéria, deixando as regiões com menor curvatura cada vez menos densas. Esta instabilidade deu origem às estruturas observadas no universo (MUKHANOV *et al.*, 1992).

O fato crucial para nós é que a teoria demanda que as perturbações da métrica, na época em que se originou a RCF, ficaram registradas na anisotropia da temperatura,

e o mais importante, a amplitude observada destas anisotropias é da ordem adequada para que as perturbações gerem as estruturas observadas no presente. De tudo isto segue-se que um estudo detalhado da anisotropia da RCF pode nos ajudar a entender melhor os mecanismos da geração de estruturas em grande escala. Adicionalmente, as anisotropias da RCF em escalas angulares menores fornecem estimativas precisas de alguns parâmetros cosmológicos, tais como, a idade do universo ( $t_0 = 13,7 \pm 0,2$ ), o parâmetro de Hubble ( $h = 0,71 \pm 0,04$ ), a densidade de matéria ( $\Omega_m = 0,27 \pm 0,04$ ), a densidade bariônica ( $\Omega_b = 0,044 \pm 0,004$ ), entre outros (BENNETT *et al.*, 2003).

A simulação e análise da RCF requer o processamento de grandes conjuntos de dados ( $10^6$  a  $10^{10}$  pontos) (FERNANDES, 2003) e, portanto, requer também sistemas de alta capacidade de processamento para sua redução, visualização e análise (BORRILL, 1999). Para analisar os mapas gerados é necessário o desenvolvimento de métodos computacionais cada vez mais eficientes.

Este trabalho tem como objetivos: (i) simular mapas de anisotropia da RCF baseados em um modelo simples do Universo (modelo de Einstein-de Sitter), onde é possível conhecer com precisão as propriedades da RCF, (ii) aplicar a Análise de Padrões Gradientes (GPA) a fim de verificar se esta técnica computacional é capaz de distinguir mapas com diferentes espectros de potência.

Esta dissertação está organizada em 6 capítulos e um apêndice. No Capítulo 1 tem-se a introdução. No Capítulo 2 descreve-se alguns conceitos básicos sobre cosmologia como os modelos cosmológicos de Friedmann-Lemaître e suas equações, as perturbações cosmológicas e as flutuações de temperatura na RCF. No Capítulo 3 apresenta-se a geração de mapas de anisotropias utilizando harmônicos esféricos, descreve o espectro de potências e o processo de pixelização da esfera. No Capítulo 4 encontra-se a implementação computacional da geração de mapas de anisotropia da temperatura da RCF no modelo cosmológico de Einstein-de Sitter. No Capítulo 5 descreve a Análise de Padrões Gradientes, técnica computacional utilizada na análise dos mapas simulados e a caracterização dos mapas por assimetrias. No Capítulo 6 apresenta-se a conclusão. No Apêndice A apresenta-se a projeção Mollweide e sua implementação computacional.





## CAPÍTULO 2

### COSMOLOGIA

Neste capítulo são descritos alguns conceitos básicos sobre os modelos cosmológicos de Friedmann-Lemaître e as equações que os descrevem assim como as perturbações cosmológicas e sua relação com as flutuações de temperatura em grandes escalas angulares na RCF.

#### 2.1 Modelos Cosmológicos de Friedmann-Lemaître

Entre 1922 e 1924 Alexander Friedmann, usando as hipóteses locais de homogeneidade e isotropia espaciais, construiu dois modelos cosmológicos nos quais o espaço apresenta curvatura positiva e negativa respectivamente. No modelo de Friedmann com curvatura positiva, a densidade média de matéria é maior que a densidade crítica,  $\Omega_0 = \rho/\rho_{crit} > 1$ , e o espaço é representado por uma esfera tridimensional. Já no modelo de Friedmann com curvatura negativa, a densidade média é menor que a densidade crítica,  $\Omega_0 < 1$ , e o espaço é o espaço hiperbólico (ISLAM, 1992).

Um terceiro modelo é o universo de Einstein-de Sitter (EdS), criado em 1932, que supõe que a densidade de matéria é exatamente a densidade crítica,  $\Omega_0 = 1$ , e o espaço é o espaço euclidiano. O modelo EdS é, às vezes, chamado de modelo de Friedmann de curvatura nula. Ou seja, a expressão modelos de Friedmann pode designar os três modelos mencionados acima.

Os três modelos consideram a constante cosmológica nula, e prevêm uma expansão do universo desacelerado, ou seja a velocidade da expansão está sempre diminuindo. Isso porque a única força atuante é a atração gravitacional, que freia a grande velocidade de expansão inicial. Até há poucos anos, achava-se que essa previsão estava correta, porém observações de supernovas distantes de tipo Ia levaram à conclusão de que a expansão do universo não está sendo freada, mas sendo acelerado (PERLMUTTER *et al.*, 1999). Isto motivou em épocas recentes a introdução de uma constante cosmológica nos modelos de Friedmann.

Neste trabalho são consideradas a constante cosmológica e a curvatura nulas pois o modelo EdS é geometricamente mais simples, o que permite que concentremos nossos esforços na implementação dos algoritmos para simular os mapas de anisotropia da RCF.

Para encontrar as equações que descrevem os modelos de Friedmann-Lemaître parte-se das equações de Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu} , \quad (2.1)$$

onde

$$R_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\nu,\lambda}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\lambda,\nu}^{\lambda} + \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}\Gamma_{\lambda\sigma}^{\sigma} - \Gamma_{\mu\lambda}^{\sigma}\Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda} , \quad (2.2)$$

é o tensor de Ricci,

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} ,$$

é o escalar de Ricci,  $g_{\mu\nu}$  é a métrica do espaço-tempo e  $G$  é a constante gravitacional (ISLAM, 1992). O lado esquerdo de (2.1) contém a contribuição da geometria à dinâmica do espaço-tempo, e o tensor energia momento  $T_{\mu\nu}$  contém a contribuição da matéria. Os termos  $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$  que aparecem em (2.2) são os símbolos de Christoffel

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2}g^{\mu\sigma}(g_{\sigma\nu,\lambda} + g_{\sigma\lambda,\nu} - g_{\nu\lambda,\sigma}) . \quad (2.3)$$

A métrica que satisfaz a condição de homogeneidade e isotropia local espacial (princípio cosmológico) é a métrica de Robertson-Walker (RW)

$$ds^2 = a^2(\eta)[d^2\eta - \gamma_{ij}dx^i dx^j] , \quad (2.4)$$

onde  $a(\eta)$  é o parâmetro de expansão ou fator de escala,  $\eta$  é o tempo conforme ( $a(\eta)d\eta = dt$ ) e

$$\gamma_{ij} = \delta_{ij} \left[ 1 + \frac{K}{4} (x^2 + y^2 + z^2) \right]^{-2} ,$$

com  $K = -1, 0, 1$ , dependendo se o Universo apresenta curvatura gaussiana negativa, nula ou positiva.

Considerando a matéria como um fluido perfeito, onde as partículas interagem fracamente, o tensor energia-momento toma a forma

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)u^{\mu}u^{\nu} - pg^{\mu\nu} , \quad (2.5)$$

onde  $\rho$  é a densidade de energia,  $p$  é a densidade de pressão e  $u^{\mu}$  a quadrivelocidade do fluido. Usando (2.4) e (2.5) no referencial do fluido em repouso,  $u^{\nu} = (1, 0, 0, 0)$ ,

as equações de Einstein tomam a forma

$$K + H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho a^2 \quad \text{e} \quad (2.6)$$

$$2H' + K + H^2 = -8\pi G p a^2, \quad (2.7)$$

onde  $H = a'/a$ <sup>1</sup> é a função de Hubble. As Equações 2.6 e 2.7 são chamadas de equações de Friedmann, observamos que há apenas duas equações para três incógnitas e para resolvê-las precisa-se de uma terceira equação que é a equação de estado

$$p = \omega \rho,$$

onde  $\omega$  é uma constante. Derivando (2.6) em relação a  $\eta$ , e usando (2.7) para eliminar o termo  $H'$ , chegamos à equação de conservação

$$\rho' + 3H(1 + \omega)\rho = 0,$$

cuja solução geral é

$$\rho \propto a^{-3(1+\omega)}.$$

Introduzindo esta expressão em (2.6) e resolvendo para  $K = 0$  obtemos a lei de expansão do Universo de Einstein-de Sitter

$$a \propto \eta^{\frac{2}{1+3\omega}}.$$

A equação de estado para um universo dominado por matéria não relativista corresponde a  $\omega = 0$  e, portanto, a expansão é quadrática

$$a \propto \eta^2, \quad (2.8)$$

e a densidade varia de acordo com

$$\rho_m \propto a^{-3}. \quad (2.9)$$

---

<sup>1</sup>onde  $a'$  é a derivada de  $a$  em relação ao tempo

Para a radiação, no entanto, tem-se  $\omega = 1/3$ , e portanto

$$\rho_r \propto a^{-4} . \quad (2.10)$$

A densidade de energia dos fótons é proporcional à temperatura  $T$  e ao número de fótons  $n_f$  por unidade de volume

$$\rho_r = n_f kT ,$$

onde  $k$  é a constante de Boltzmann. Por outro lado, a densidade de energia dos bárions não relativistas é proporcional apenas ao número de bárions por unidade de volume

$$\rho_b \propto n_b ,$$

e portanto temos

$$\frac{\rho_r}{\rho_b} \propto \frac{n_f kT}{n_b} .$$

Se o universo se expande adiabaticamente temos  $n_f/n_b = cte$ , usando (2.9) e (2.10) obtemos

$$T \propto a^{-1} , \quad (2.11)$$

ou seja, o universo esfria proporcionalmente à expansão.

## 2.2 Perturbações Cosmológicas

A existência de pequenas perturbações primordiais que lentamente aumentaram em amplitude, devido à instabilidade gravitacional, formaram as estruturas que observamos hoje. As mesmas perturbações deram origem às flutuações da radiação cósmica de fundo observadas por diversos experimentos no solo (COBLE *et al.*, 1999; HALVERSON *et al.*, 2002; PADIN *et al.*, 2001; MEINHOLD *et al.*, 2003), em balões (MAUSKOPF *et al.*, 2000; LEE *et al.*, 1999), e pelos satélites COBE (SMOOT *et al.*, 1992) e WMAP (BENNETT *et al.*, 2003) e futuramente pelo Planck (PLANCK..., 2004). Para uma revisão dos experimentos dedicados à observação das anisotropias da RCF, prévias ao lançamento do WMAP, veja (BERSANELLI *et al.*, 2002).

Matematicamente, a descrição da evolução dessas pequenas perturbações, no contexto da relatividade geral, reduz-se a resolver as equações de Einstein perturbadas (MUKHANOV *et al.*, 1992). Estas equações são construídas decompondo cada quan-

tidade em um termo de fundo e uma perturbação. Por exemplo, o tensor energia-momento toma a forma

$$T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{(0)} + \delta T_{\mu\nu} ,$$

onde  $T_{\mu\nu}^{(0)}$  é o componente de fundo do tensor energia-momento, e

$$\delta T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \delta\rho & 0 \\ 0 & -\delta p \delta_j^i \end{pmatrix} , \quad (2.12)$$

é a perturbação do tensor energia-momento. As equações de Einstein tomam então a forma

$$(R_{\mu\nu}^{(0)} + \delta R_{\mu\nu}) - \frac{1}{2}(g_{\mu\nu}^{(0)} + \delta g_{\mu\nu})(R^{(0)} + \delta R) = 8\pi G(T_{\mu\nu}^{(0)} + \delta T_{\mu\nu}) . \quad (2.13)$$

Expandindo (2.13) até a primeira ordem nas perturbações, e agrupando termos obtemos que as quantidades de fundo satisfazem as equações de Einstein (2.1), e as quantidades perturbadas satisfazem a equação

$$\delta R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}^{(0)}\delta R - \frac{1}{2}\delta g_{\mu\nu}R^{(0)} = 8\pi G\delta T_{\mu\nu} , \quad (2.14)$$

onde

$$\delta R_{\mu\nu} = -\delta\Gamma_{\mu\nu,\alpha}^{\alpha} + \delta\Gamma_{\mu\alpha,\nu}^{\alpha} - \delta\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}\Gamma_{\lambda\alpha}^{(0)\alpha} - \Gamma_{\mu\nu}^{(0)\lambda}\delta\Gamma_{\lambda\alpha}^{\alpha} + \delta\Gamma_{\lambda\nu}^{\alpha}\Gamma_{\mu\alpha}^{(0)\lambda} + \Gamma_{\lambda\nu}^{(0)\alpha}\delta\Gamma_{\mu\alpha}^{\lambda}$$

é a perturbação do tensor de Ricci, e

$$\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \frac{1}{2}\delta g^{\alpha\lambda}(g_{\mu\lambda,\nu}^{(0)} + g_{\nu\lambda,\mu}^{(0)} - g_{\mu\nu,\lambda}^{(0)}) + \frac{1}{2}g^{(0)\alpha\lambda}(\delta g_{\mu\lambda,\nu} + \delta g_{\nu\lambda,\mu} - \delta g_{\mu\nu,\lambda})$$

são as perturbações dos símbolos de Christoffel (2.3).

Na teoria das perturbações cosmológicas a métrica de fundo é a métrica RW (2.4), e a perturbação  $\delta g_{\mu\nu}$  é decomposta em modos escalar, vetorial e tensorial. Destes modos apenas o modo escalar influencia na formação de estruturas e na geração das flutuações de temperatura da RCF.

Um problema difícil na teoria das perturbações é a escolha do referencial ("gauge"). Nesta dissertação utilizamos o gauge longitudinal, pois as variáveis neste gauge coincidem com as variáveis invariantes de Bardeen (BARDEEN, 1980) de modo que a

métrica perturbada invariante é

$$ds^2 = a^2(\eta) [(1 + 2\phi)d\eta^2 - (1 - 2\phi)\gamma_{ij}dx^i dx^j] , \quad (2.15)$$

onde  $\phi$  é a amplitude da perturbação escalar, identificada com o potencial gravitacional Newtoniano.

Usando 2.15 e 2.12 na Equação 2.14, encontram-se as equações para os componentes 00, 0i e ij e pode ser mostrado que se  $p$  e  $\rho$  dependem só de  $\eta$  a forma de  $\delta T_{\mu\nu}$  dada em (2.12) é invariante. Partindo destas equações e de algumas considerações termodinâmicas, encontra-se a equação do movimento que permite estudar a evolução no espaço e no tempo da amplitude da perturbação escalar

$$\phi'' + 3H(1 + c_s^2)\phi' - c_s^2\Delta^2\phi + (2H' + (1 + 3c_s^2))(H^2 - K)\phi = 4\pi G a^2 \tau \delta S , \quad (2.16)$$

onde  $\Delta$  é o operador Laplaciano,  $S$  a entropia e  $c_s$  é a velocidade do som no fluido.

Se considerarmos um universo com perturbações adiabáticas ( $\delta S = 0$ ), usando a separação de variáveis

$$\phi(\eta, \vec{x}) = F(\eta)\psi(\vec{x}) , \quad (2.17)$$

a parte espacial satisfaz a equação de Helmholtz

$$(\Delta^2 + k^2)\psi(k, \vec{x}) = 0 , \quad (2.18)$$

e a parte temporal satisfaz a equação

$$F'' + 3H(1 + c_s^2)F' + [2H' + (1 + 3c_s^2)(H^2 - K) + c_s^2 k^2]F = 0 , \quad (2.19)$$

onde  $k$  é a constante que surge no processo de separação de variáveis.

Para o modelo cosmológico EdS ( $\Lambda = K = 0$ ) dominado pela matéria temos  $c_s = 0$ , e portanto (2.19) toma a forma

$$F'' + 3HF' + (2H' + H^2)F = 0 . \quad (2.20)$$

Como a lei de expansão do universo EdS é quadrática, temos  $H = 2/\eta$ , e portanto (2.20) simplifica-se para

$$F'' + \frac{6}{\eta}F' = 0 , \quad (2.21)$$

que tem como solução geral

$$F(\eta) = A + \frac{B}{\eta^5}, \quad (2.22)$$

com  $A$  e  $B$  constantes. Como o segundo termo da soma em (2.22) decai rapidamente, costuma-se fazer a seguinte aproximação

$$F(\eta) \approx A. \quad (2.23)$$

Por outro lado, resolvendo (2.18) para um universo plano, temos

$$\psi(k, \vec{x}) = \int d^3\vec{q} \delta(|\vec{q}| - k) \phi_{\vec{q}} e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}}, \quad (2.24)$$

e portanto a amplitude da perturbação escalar é constante no tempo

$$\phi(x) = F(\eta) \int dk \psi(k, \vec{x}) \propto \int d^3\vec{k} \phi_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}, \quad (2.25)$$

onde  $\phi_{\vec{k}}$  é o chamando espectro inicial das perturbações escalares.

### 2.3 Flutuações de Temperatura na RCF

Na superfície de último espalhamento (SUE) as flutuações da amplitude da perturbação fizeram com que os fótons em diferentes regiões tenham diferença de energia, e essa diferença é a que se observa hoje na RCF como flutuações de temperatura. Se considerarmos que as únicas fontes de anisotropias da RCF são as amplitudes da perturbação, então pela conservação de energia (LEVIN, 2001) pode-se escrever,

$$\left. \frac{\delta T}{T} \right|_0 - \left. \frac{\delta T}{T} \right|_{SUE} = \phi_{SUE} - \phi_0, \quad (2.26)$$

onde o subíndice "0" indica as quantidades medidas hoje. O potencial gravitacional local  $\phi_0$  tem uma contribuição isotrópica para  $\delta T/T$  e portanto é nulo por construção, ou seja

$$\left. \frac{\delta T}{T} \right|_0 = \left. \frac{\delta T}{T} \right|_{SUE} + \phi_{SUE}. \quad (2.27)$$

Utilizando a lei de esfriamento de um universo em expansão (2.11) tem-se

$$\left. \frac{\delta T}{T} \right|_{SUE} = - \left. \frac{\delta a}{a} \right|_{SUE}. \quad (2.28)$$



Por outro lado, como a lei de expansão num Universo EdS dominado pela matéria é quadrática, da expressão  $a(\eta)d\eta = dt$  para o tempo conforme, obtemos  $\eta \propto t^{1/3}$  e portanto,  $a \propto t^{2/3}$ . Segue-se então que

$$\frac{\delta a}{a} \Big|_{SUE} = \frac{2}{3} \frac{\delta t}{t} \Big|_{SUE} . \quad (2.29)$$

Mas uma flutuação de potencial gravitacional trás como conseqüência uma flutuação no tempo (desvio ao vermelho gravitacional) (PEACOCK, 1999)

$$\frac{\delta t}{t} \Big|_{SUE} = \phi \Big|_{SUE} , \quad (2.30)$$

portanto juntando (2.28)-(2.30) em (2.27) obtemos

$$\frac{\delta T}{T} \Big|_0 = \frac{1}{3} \phi_{SUE} . \quad (2.31)$$

Este é o efeito Sach-Wolfe ordinário que produz as flutuações de temperatura em grandes escalas angulares. Introduzindo (2.25) em (2.31) temos finalmente para o universo EdS dominado pela matéria

$$\frac{\delta T}{T} \Big|_0 \propto \int d^3 \vec{k} \phi_{\vec{k}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} , \quad (2.32)$$

com  $|\vec{r}| = R_{SUE}$  sendo o raio da superfície de último espalhamento.

## CAPÍTULO 3

### GERAÇÃO DE MAPAS DE ANISOTROPIA

Este capítulo apresenta a decomposição dos mapas de anisotropia em harmônicos esféricos, os harmônicos esféricos reais e o espectro de potências do modelo cosmológico EdS, assim como o método usado para simular os mapas de anisotropia. Para representar visualmente os mapas simulados é preciso pixelizar a esfera. Dentre os vários métodos de pixelização apresentamos em detalhe a pixelização Igloo, utilizada neste trabalho.

#### 3.1 Harmônicos Esféricos

Como o mapa de anisotropia (1.1) é uma função definida na esfera, a maneira natural de estudá-lo é mediante a sua decomposição em harmônicos esféricos.

$$\frac{\delta T}{T}(\theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l a_{lm} Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad (3.1)$$

onde os coeficientes da expansão  $a_{lm}$ , chamados de momentos multipolares, carregam toda a informação das anisotropias.

Os harmônicos esféricos são funções na esfera definidas por

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi} \quad (3.2)$$

onde  $l \geq 0$ ,  $-l \leq m \leq l$  e  $(\theta, \varphi)$  são as coordenadas esféricas usuais. As funções associadas de Legendre são

$$P_l^m(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m P_l}{dx^m}(x) \quad \text{e} \quad (3.3)$$

$$P_l^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(x), \quad (3.4)$$

onde  $0 \leq m \leq l$ , e  $P_l(x)$  são os polinômios de Legendre, que podem ser expressos de diferentes maneiras equivalentes (ARFKEN, 1970):

a) Pela fórmula de Rodrigues

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l . \quad (3.5)$$

b) Em termos de uma função geradora

$$P_l(x) = \frac{1}{l!} \left. \frac{\partial^l g(t, x)}{\partial t^l} \right|_{t=0} , \quad (3.6)$$

onde

$$g(t, x) = (1 - 2xt + t^2)^{-\frac{1}{2}} \quad ; \quad |t| < 1 . \quad (3.7)$$

c) Por meio da fórmula recursiva

$$P_{l+1}(x) = \frac{1}{l+1} [(2l+1)xP_l(x) - lP_{l-1}(x)] , \quad (3.8)$$

com  $P_0(x) = 1$  e  $P_1(x) = x$ .

A fórmula recursiva (3.8) apresenta a vantagem de não precisar do cálculo de derivadas, como na fórmula de Rodrigues e na função geradora, que aumenta de acordo com o grau do polinômio de Legendre que se deseja obter. A Tabela 3.1 mostra as expressões dos polinômios, para  $0 \leq l \leq 9$ .

**TABELA 3.1** - Expressões dos polinômios de Legendre.

|   |
|---|
| $P_0(x) = 1$  |
| $P_1(x) = x$  |
| $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$  |
| $P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$   |
| $P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$                                 |
| $P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$                               |
| $P_6(x) = \frac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5)$                     |
| $P_7(x) = \frac{1}{16}(429x^7 - 693x^5 + 315x^3 - 35x)$                   |
| $P_8(x) = \frac{1}{128}(6435x^8 - 12012x^6 + 6930x^4 - 1260x^2 + 35)$     |
| $P_9(x) = \frac{1}{128}(12155x^9 - 25740x^7 + 18018x^5 - 4620x^3 + 315x)$ |

Analogamente à (3.8), as funções associadas de Legendre  $P_l^m(x)$  podem ser obtidas

recursivamente usando

$$P_{l+1}^m(x) = \frac{1}{(l-m+1)} [(2l+1)xP_l^m(x) - (l-m)P_{l-1}^m(x)] , \quad (3.9)$$

com os seguintes valores iniciais

$$P_0^0(x) = 1 , \quad (3.10)$$

$$P_{m+1}^{m+1}(x) = (2m+1)(1-x^2)^{1/2}P_m^m(x) \quad \text{e} \quad (3.11)$$

$$P_{m+1}^m(x) = (2m+1)xP_m^m(x) . \quad (3.12)$$

A Tabela 3.2 mostra as funções associadas de Legendre, para  $1 \leq l \leq 4$ .

**TABELA 3.2** - Funções associadas de Legendre.

|  |
|--|
| $P_1^1(x) = -(1-x^2)^{1/2}$                    |
| $P_2^1(x) = -3x(1-x^2)^{1/2}$                  |
| $P_2^2(x) = 3(1-x^2)$                          |
| $P_3^1(x) = \frac{3}{2}(1-5x^2)(1-x^2)^{1/2}$  |
| $P_3^2(x) = 15x(1-x^2)$                        |
| $P_3^3(x) = -15(1-x^2)^{3/2}$                  |
| $P_4^1(x) = \frac{5}{2}x(3-7x^2)(1-x^2)^{1/2}$ |
| $P_4^2(x) = \frac{15}{2}x(7x^2-1)(1-x^2)$      |
| $P_4^3(x) = -105x(1-x^2)^{3/2}$                |
| $P_4^4(x) = 105(1-x^2)^2$                      |

Como os harmônicos esféricos definidos por (3.2) são funções que tomam valores complexos, para representar funções reais na esfera é conveniente introduzir os harmônicos esféricos reais

$$X_{lm}(\theta, \varphi) = \frac{1}{2}[Y_{lm}(\theta, \varphi) + Y_{lm}^*(\theta, \varphi)] \quad (3.13)$$

$$= \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) \cos m\varphi ,$$

$$Z_{lm}(\theta, \varphi) = \frac{1}{2i}[Y_{lm}(\theta, \varphi) - Y_{lm}^*(\theta, \varphi)] \quad (3.14)$$

$$= \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) \sin m\varphi .$$

A Tabela 3.3 ilustra os harmônicos esféricos reais  $X_{lm}(\theta, \varphi)$  para  $1 \leq l \leq 4$ , utilizando a projeção Mollweide (ver Apêndice A). Os valores encontrados para cada par  $l, m$  estão normalizados entre -1 e 1.

### 3.2 Espectro de Potências

Nesta seção usamos (2.32) e (3.1) para estabelecer uma relação entre os momentos multipolares  $a_{lm}$  e o modelo cosmológico EdS. Para isto usamos a decomposição da onda plana em harmônicos esféricos (ARFKEN, 1970)

$$e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = 4\pi \sum_{lm} i^l j_l(kr) Y_{lm}^*(\theta_{\vec{k}}, \varphi_{\vec{k}}) Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad (3.15)$$

onde  $(\theta_{\vec{k}}, \varphi_{\vec{k}})$  são as coordenadas angulares do vetor  $\vec{k}$  no mesmo sistema de coordenadas esféricas usado para determinar as coordenadas esféricas  $(\theta, \varphi)$  do vetor  $\vec{r}$  e  $j_l$  são as funções esféricas de Bessel.

Substituindo a Equação 3.15 em 2.32 obtemos

$$\frac{\delta T}{T}(\theta, \varphi) \propto \sum_{lm} \left[ i^l \int d^3\vec{k} \phi_{\vec{k}} j_l(kR_{SUE}) Y_{lm}^*(\theta_{\vec{k}}, \varphi_{\vec{k}}) \right] Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad (3.16)$$

que comparada com (3.1) fornece uma expressão para os momentos multipolares

$$a_{lm} \propto i^l \int d^3\vec{k} \phi_{\vec{k}} j_l(kR_{SUE}) Y_{lm}^*(\theta_{\vec{k}}, \varphi_{\vec{k}}). \quad (3.17)$$

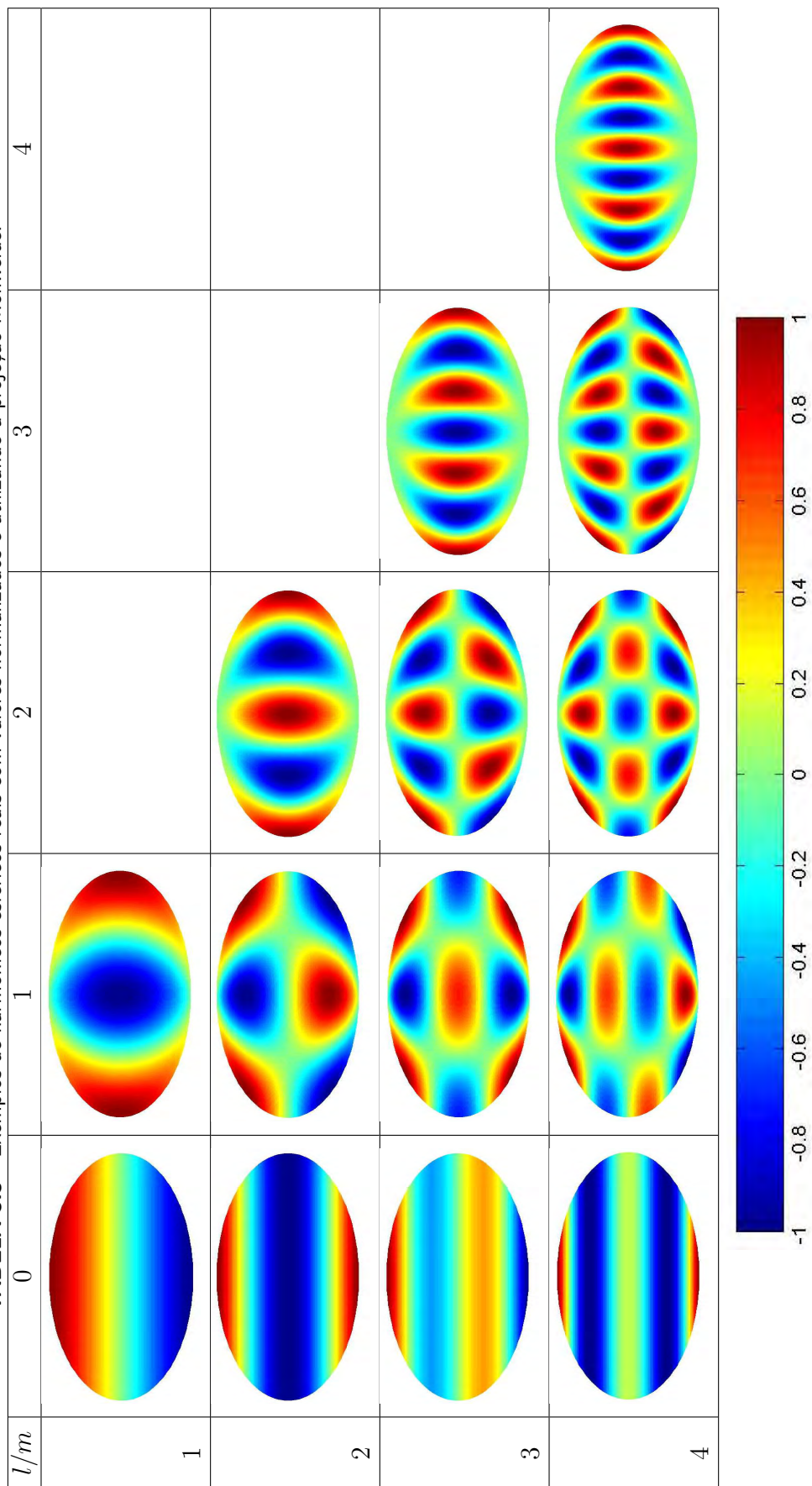
Porém, como o espectro inicial de perturbações é um campo estocástico, não é possível utilizar (3.17) para determinar os momentos multipolares. Na prática só podemos estabelecer propriedades estatísticas para estes momentos calculando a matriz de correlação definida como uma média do produto  $a_{lm} a_{l'm'}^*$  sobre um ensemble de universos essencialmente idênticos. Temos então

$$\langle a_{lm} a_{l'm'}^* \rangle \propto i^{l-l'} \int d^3\vec{k} d^3\vec{k}' \langle \phi_{\vec{k}} \phi_{\vec{k}'}^* \rangle j_l(kR_{SUE}) j_{l'}(k'R_{SUE}) Y_{lm}^*(\theta_{\vec{k}}, \varphi_{\vec{k}}) Y_{l'm'}(\theta_{\vec{k}'}, \varphi_{\vec{k}'}), \quad (3.18)$$

onde  $\langle \phi_{\vec{k}} \phi_{\vec{k}'}^* \rangle$  é a matriz de correlação das perturbações iniciais.

A suposição mais simples que pode ser feita é a de que o campo  $\phi_{\vec{k}}$  é um campo gaussiano, isto é, não existem correlações entre as diferentes escalas. Esta propriedade é

**TABELA 3.3** - Exemplos de harmônicos esféricos reais com valores normalizados e utilizando a projeção Mollweide.



descrita como

$$\langle \phi_{\vec{k}} \phi_{\vec{k}'}^* \rangle = \frac{P_\phi(k)}{k^3} \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') . \quad (3.19)$$

Substituindo (3.19) em (3.18) e integrando a parte angular temos que a matriz de correlação é diagonal

$$\langle a_{lm} a_{l'm'}^* \rangle = C_l \delta_{ll'} \delta_{mm'} , \quad (3.20)$$

onde

$$C_l \propto \int \frac{dk}{k} P_\phi(k) j_l^2(kR_{SUE}) \quad (3.21)$$

é o chamado espectro de potência. Vemos também que o espectro de potência está associado à variância dos momentos multipolares. De fato, fazendo  $l = l'$  e  $m = m'$  em (3.20) obtemos

$$\langle |a_{lm}|^2 \rangle = C_l . \quad (3.22)$$

O espectro invariante de escala, o espectro de Harrison-Zeldovich, é definido por  $P_\phi(k) = cte$ , e neste caso temos

$$C_l \propto \frac{1}{l(l+1)} . \quad (3.23)$$

Este é o espectro de potências que utilizamos nesta dissertação para construir os mapas de anisotropia.

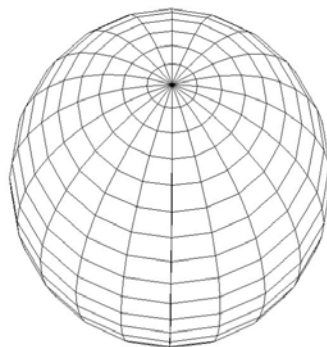
### 3.3 Pixelização da Esfera

Os mapas de anisotropia da temperatura da RCF (3.1) são simulados gerando aleatoriamente os coeficientes  $a_{lm}$ , com  $2 \leq l \leq l_{max}$  (monopolo e dipolo estão sendo desprezados) seguindo uma distribuição normal com média nula e variância dada pelo espectro de potência no modelo EdS, dado por (3.23). Entretanto, a função gerada possui valores num conjunto infinito de pontos, enquanto que os mapas reais da radiação cósmica de fundo consistem em um número finito de medidas de temperatura em diferentes regiões do céu (esfera celeste). Um problema fundamental para representar este conjunto finito de dados é o de discretizar a esfera. Este processo é também chamado de pixelização.

Dentre as pixelizações existentes podemos citar:

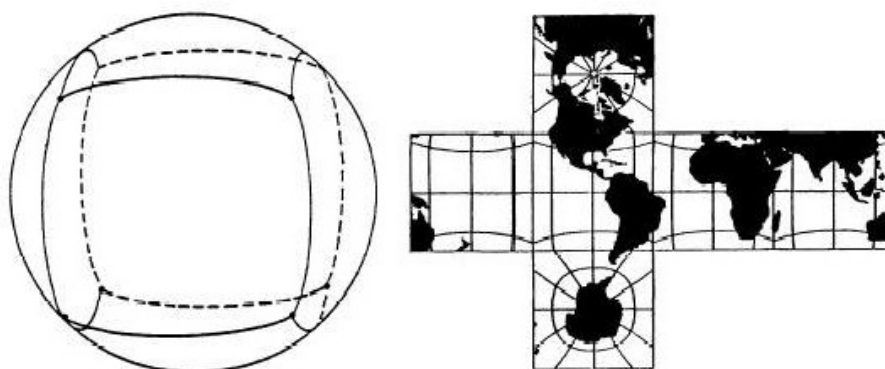
- a) **ECP**. A pixelização mais simples, conhecida como Projeção Cilíndrica

Equidistante (*Equidistant Cylindrical Projection* - ECP), usa divisões iguais na latitude e na longitude. Ela é a pixelização utilizada por *default* em sistemas como MatLab, Maple, etc., e o principal problema dela é que os pixels próximos dos pólos são pequenos e muito distorcidos (ver Figura 3.1).



**FIGURA 3.1** - Exemplo de pixelização ECP utilizada pelo MatLab.

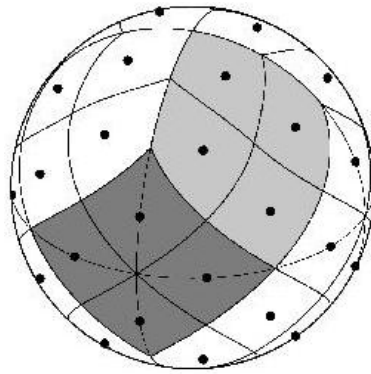
- b) **QSCP**. Outro tipo de pixelização, a cúbica (*Quadrilateralized Spherical Cube Projection*-QSCP), foi utilizada para construir os mapas gerados pelo satélite COBE. Esta pixelização é construída circunscrevendo um cubo na esfera, dividindo cada face do cubo em quatro quadrados iguais, e projetando essa divisão para a esfera. Este processo é iterado para obter uma maior resolução ([WHITE; STEMWEDEL, 1992](#)) (ver Figura 3.2).



**FIGURA 3.2** - Exemplo da pixelização cúbica.



- c) **HEALPix.** Nos mapas gerados pelo WMAP (*Wilkinson Microwave Anisotropy Probe*) se utiliza a pixelização HEALPix (*Hierarchical Equal Area isoLatitude Pixelisation of the sphere*), onde a esfera é enxadrezada em quadriláteros curvilíneos. A resolução inicial de 12 pixels é aumentada a cada refinamento dividindo cada pixel em quatro novos com áreas idênticas (GÓRSKI, 1999; THE... , 2003) (ver Figura 3.3).



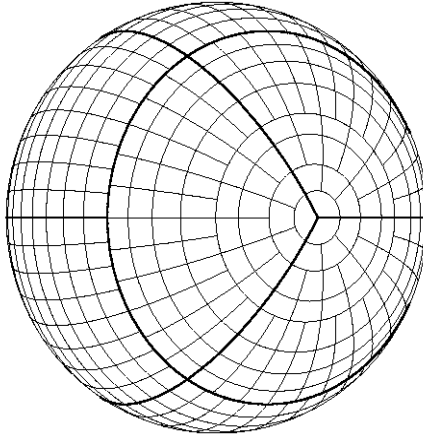
**FIGURA 3.3** - Exemplo da pixelização HEALPix.  
 FONTE: <http://www.eso.org/science/healpix>.

- d) **Igloo.** A pixelização Igloo consiste em dividir a esfera em faixas com bordas de latitude constante, e cada faixa é dividida em pixels iguais com bordas de longitude constante. A Figura 3.4 mostra a pixelização Igloo. Neste trabalho é utilizada a pixelização Igloo por ser eficiente e de fácil implementação computacional (CRITTENDEN; TUROK, 1998; IGLOO... , 2001).

O processo de construção da pixelização Igloo começa com a divisão inicial da esfera numa partição 3:6:3, onde cada região tem a mesma área: três regiões na calota superior, seis na faixa central e três na calota inferior da esfera (veja Figura 3.5(a)). Cada uma dessas regiões é chamada de pixel.

A área de cada calota inicial é a quarta parte da área da esfera

$$A_0 = \frac{1}{4} A_{esfera} = \pi . \quad (3.24)$$



**FIGURA 3.4** - Exemplo da pixelização Igloo.

FONTE: <http://www.mrao.cam.ac.uk/projects/cpac/igloo>.

Como

$$A_0 = \int_0^{\theta_0} \int_0^{2\pi} \sin \theta \, d\theta \, d\varphi , \quad (3.25)$$

onde  $\theta_0$  é o ângulo polar do paralelo que limita a calota, segue-se que

$$\cos \theta_0 = \frac{1}{2} . \quad (3.26)$$

O processo de refinamento consiste na divisão de cada calota em uma nova calota com um quarto da área inicial, e uma faixa horizontal onde cada setor se divide em três pixels de mesma área. Por outro lado, cada pixel pertencente as outras faixas horizontais é dividido em quatro novos pixels.

Como a área das calotas é a quarta parte da área das calotas do refinamento anterior, temos para a área da calota superior do  $k$ -ésimo refinamento

$$A^{(k)} = \frac{1}{4} A^{(k-1)} , \quad (3.27)$$

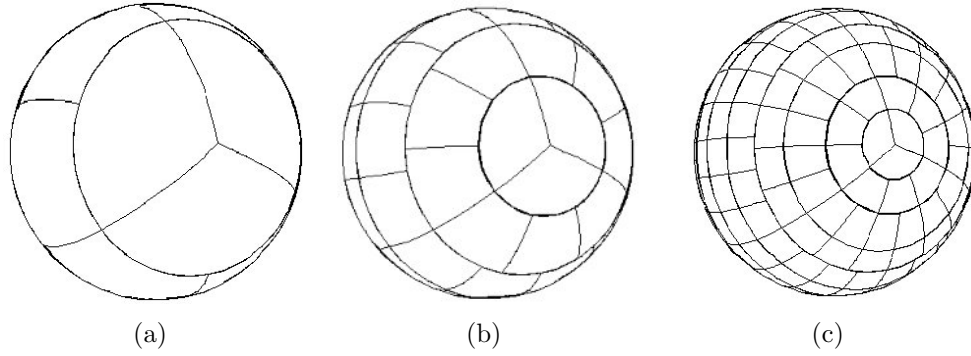
e como

$$A^{(k)} = \int_0^{\theta_k} \int_0^{2\pi} \sin \theta \, d\theta \, d\varphi , \quad (3.28)$$

obtemos

$$\cos \theta_k = \frac{1}{4} (3 + \cos \theta_{k-1}) . \quad (3.29)$$

onde  $\theta_k$  é o ângulo polar do paralelo que limita esta calota.



**FIGURA 3.5** - Pixelização Igloo.

(a) Divisão inicial, (b) primeiro e (c) segundo refinamento da esfera na pixelização Igloo.

As faixas horizontais podem ser divididas seguindo qualquer um dos dois critérios seguintes.

**Espaçamentos iguais.** Cada faixa é dividida em dois por um paralelo, de modo que cada faixa resultante tenha a mesma **abertura angular**. O ângulo polar do paralelo que faz a divisão é dado por

$$\theta = \frac{\theta_s + \theta_i}{2}, \quad (3.30)$$

onde  $\theta_s$  é o ângulo superior e  $\theta_i$  é o ângulo inferior da faixa.

**Áreas iguais.** Cada faixa é dividida em dois por um paralelo, de modo que cada faixa resultante tenha a mesma **área**. A área de uma faixa horizontal limitada pelos ângulos  $\theta_s$  e  $\theta_i$  é

$$A = 2\pi(\cos \theta_s - \cos \theta_i). \quad (3.31)$$

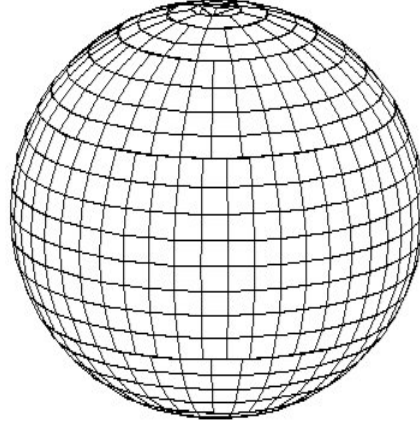
Denotando por  $\tilde{A}$  a área de cada faixa resultante da divisão temos

$$\tilde{A} = \frac{1}{2}A, \quad (3.32)$$

e daqui segue-se que o ângulo polar do paralelo que faz a divisão é

$$\cos \theta = \frac{1}{2}(\cos \theta_s + \cos \theta_i). \quad (3.33)$$

Este processo recursivo foi implementado em Matlab de modo que podemos obter a esfera pixelizada na ordem, em princípio, arbitrária (ver Figura 3.6).



**FIGURA 3.6** - Pixelização Igloo - 4<sup>o</sup> refinamento.

Na prática, porém, não tem sido necessário passar do quinto refinamento. A Tabela 3.4 mostra o efeito da pixelização para o mesmo mapa, temos uma pixelização mais grossa ( $k = 1$ ) até uma pixelização mais fina ( $k = 4$ ).

### 3.4 Mapas de Anisotropia

O mapa de anisotropia da RCF (3.2) pode ser expandido em termos dos harmônicos esféricos reais na forma

$$\frac{\delta T}{T}(\theta, \varphi) = \sum_{l=1}^{\infty} a_{l0} Y_{l0}(\theta, \varphi) + \sum_{lm} [A_{lm} X_{lm}(\theta, \varphi) + B_{lm} Z_{lm}(\theta, \varphi)], \quad (3.34)$$

onde

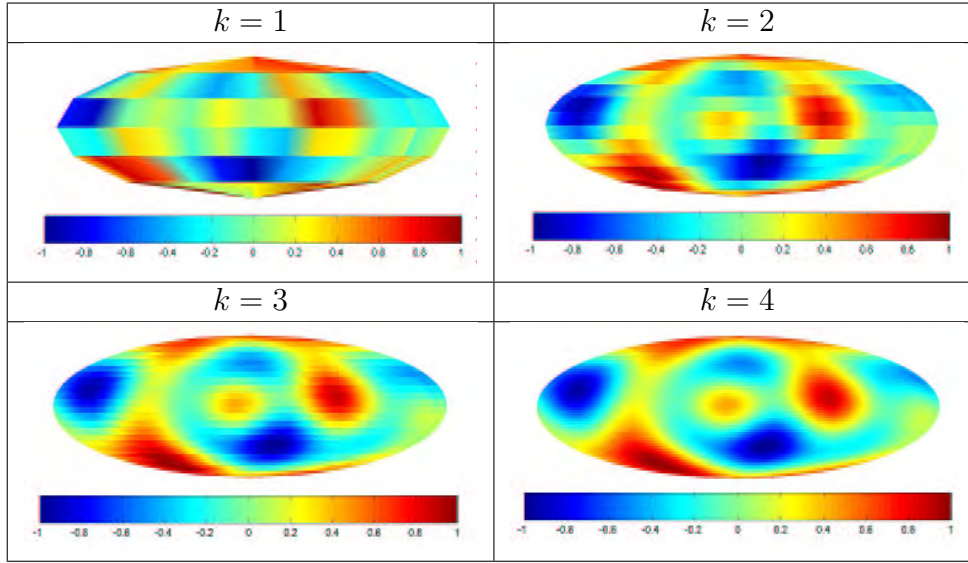
$$A_{lm} = a_{lm} + a_{lm}^*; \quad B_{lm} = i(a_{lm} - a_{lm}^*),$$

e os harmônicos esféricos reais  $X_{lm}$  e  $Z_{lm}$  são dados por (3.13) e (3.14).

Para construir o mapa na esfera pixelizada devemos obter a média da anisotropia da temperatura em cada pixel. Para isto introduzimos a função janela no pixel  $P$ ,

$$W_P(\theta, \varphi) = \begin{cases} \frac{1}{A_P} & \text{se } (\theta, \varphi) \in P \\ 0 & \text{se } (\theta, \varphi) \notin P, \end{cases} \quad (3.35)$$

**TABELA 3.4** - Exemplos do efeito da pixelização.



onde  $A_P$  é a área do pixel  $P$ . A temperatura no pixel  $P$  é portanto

$$\begin{aligned}
 T_P &= \int d\Omega W_P(\theta, \varphi) T(\theta, \varphi) \\
 &= \sum_{l=1}^{\infty} a_{l0} U_{P,l0} + \sum_{lm} (A_{lm} U_{P,lm} + B_{lm} V_{P,lm}),
 \end{aligned} \tag{3.36}$$

onde

$$U_{P,lm} = N_{lm} I_{P,lm} J_{P,m}^{(c)} \quad \text{e} \tag{3.37}$$

$$V_{P,lm} = N_{lm} I_{P,lm} J_{P,m}^{(s)}, \tag{3.38}$$

com

$$\begin{aligned}
 N_{lm} &= \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} \\
 I_{P,lm} &= \int_{x_f}^{x_i} P_l^m(x) dx \quad ; \quad x_{i,f} = \cos \theta_{i,f} \\
 J_{P,m}^{(c)} &= \begin{cases} \varphi_f - \varphi_i & \text{se } m = 0 \\ \frac{1}{m} (\sin m\varphi_f - \sin m\varphi_i) & \text{se } m \neq 0, \end{cases} \\
 J_{P,m}^{(s)} &= \begin{cases} 0 & \text{se } m = 0 \\ \frac{1}{m} (\cos m\varphi_i - \cos m\varphi_f) & \text{se } m \neq 0. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Finalmente, a integral  $\int P_l^m(x) dx$  é calculada recursivamente usando a fórmula (para detalhes veja (CRITTENDEN; TUROK, 1998))

$$\int_a^b P_{l+1}^m(x) dx = \frac{(l+m)(l-1)}{(l-m+1)(l+2)} \int_a^b P_{l-1}^m(x) dx + \frac{2l+1}{(l-m+1)(l+2)} [(1-a^2)P_l^m(a) - (1-b^2)P_l^m(b)] , \quad (3.39)$$

com as seguintes condições iniciais

$$\int_a^b P_0^0(x) dx = b - a , \quad (3.40)$$

$$\int_a^b P_1^1(x) dx = \frac{1}{2} [b(1-b^2)^{1/2} - a(1-a^2)^{1/2} + \arccos a - \arccos b] , \quad (3.41)$$

$$\int_a^b P_m^m(x) dx = (2m-2)(2m-3) \int_a^b P_{m-2}^{m-2}(x) dx - 2 \int_a^b P_m^{m-2}(x) dx \quad (3.42)$$

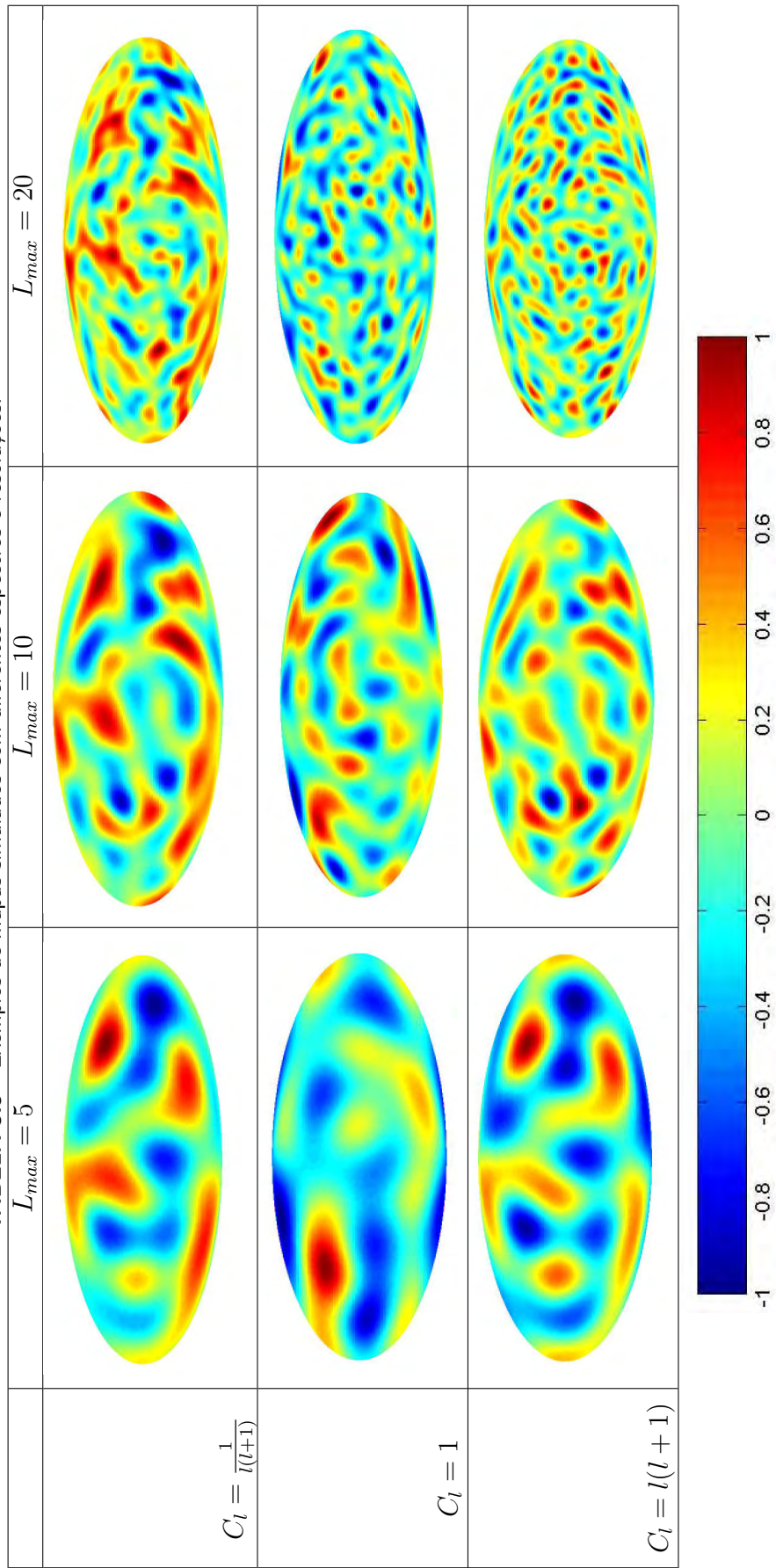
$$\int_a^b P_{m+1}^m(x) dx = \frac{2m+1}{m+2} [(1-a^2)P_m^m(a) - (1-b^2)P_m^m(b)] . \quad (3.43)$$

A construção do mapa pixelizado, de acordo com a fórmula (3.36), é desenvolvida integralmente em ambiente MatLab. A Tabela 3.5 mostra exemplos de mapas simulados para três espectros diferentes ( $C_l = \frac{1}{l(l+1)}$ ,  $C_l = 1$  e  $C_l = l(l+1)$ ), e em três resoluções diferentes ( $L_{max} = 5$ ,  $L_{max} = 10$ , e  $L_{max} = 20$ ). Em todos os mapas, o monopolo e o dipolo são nulos. Todos os mapas são mostrados numa escala colorida com os valores normalizados usando a projeção de Mollweide e utilizam a pixelização Igloo com refinamento  $k = 5$ .

No próximo capítulo descrevemos em detalhe a abordagem de caráter computacional utilizada para a simulação dos mapas.



TABELA 3.5 - Exemplos de mapas simulados com diferentes espectros e resoluções.







## CAPÍTULO 4

### IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

Como trata-se de uma dissertação na área de computação aplicada, neste capítulo são apresentados os algoritmos desenvolvidos para as simulações dos mapas. A Figura 4.1 mostra o diagrama de fluxo dos passos necessários para obtenção de  $N$  mapas. É importante notar que os códigos foram desenvolvidos em Matlab, onde os índices de matrizes, vetores e listas iniciam em 1, porém nos algoritmos descritos neste capítulo consideramos que os índices iniciam em 0.

#### 4.1 Algoritmo para a Pixelização Igloo

Para o processo de construção da pixelização Igloo (4.2) é necessário fornecer para cada faixa, os limites superior e inferior das mesmas,  $s = \cos \theta_s$ ,  $i = \cos \theta_i$  e o número de pixels em cada faixa. Então, a estrutura de dados utilizada para codificar uma faixa da pixelização é

$$FAIXA = [real, real, integer] ,$$

onde o primeiro elemento é  $s$ , o segundo é  $i$  e o último elemento é o número de pixels nesta faixa. Assim, a estrutura de dados que codifica uma pixelização é

$$PIXELS = \text{Dynamic List of } FAIXA ,$$

onde o número de elementos de  $PIXELS$  é  $3 * 2^{k-1}$  com  $k$  sendo a ordem do refinamento.

A função *Pixe* gera a estrutura de dados utilizada na pixelização Igloo. O parâmetro de entrada é o número máximo do refinamento  $Max$ . A saída da função *Pixe* é uma variável do tipo

$$MAPASPIX = \text{Dynamic List of } PIXELS ,$$

onde o número de elementos de  $MAPASPIX$  é  $Max + 1$  para poder armazenar a pixelização inicial.

O processo recursivo para construir o  $k$ -ésimo refinamento começa com a partição

inicial dada por

$$\begin{aligned} PIX^{(0)}[1] &= [1, 0.5, 3] , \\ PIX^{(0)}[2] &= [0.5, -0.5, 6] , \\ PIX^{(0)}[3] &= [-0.5, -1, 3] . \end{aligned}$$

O  $k$ -ésimo refinamento é então obtido a partir da  $(k - 1)$  refinamento pelo seguinte processo, onde  $n$  indica a faixa que está sendo refinada:

**quando  $n = 1$**

$$\text{Pix}^{(k-1)}[1] = [1, \cos \theta_{k-1}, 3] \rightarrow \begin{cases} \text{Pix}^{(k)}[1] = [1, \cos \theta_k, 3] \\ \text{Pix}^{(k)}[2] = [\cos \theta_k, \cos \theta_{k-1}, 9] \end{cases} ,$$

onde  $\cos \theta_k$  é obtido usando (3.29).

**para  $1 < n < m = 3 * 2^{k-1}$**

$$\text{Pix}^{(k-1)}[n] = [s^{(k-1)}, i^{(k-1)}, N^{(k-1)}] \rightarrow \begin{cases} \text{Pix}^{(k)}[2n - 1] = [s^{(k-1)}, \cos \theta, 2N^{(k-1)}] \\ \text{Pix}^{(k)}[2n] = [\cos \theta, i^{(k-1)}, 2N^{(k-1)}] \end{cases} ,$$

onde,  $\cos \theta$  é obtido usando (3.30) ou (3.33), dependendo do critério de divisão de faixas que está sendo adotado.

**para  $n = m$**

$$\text{Pix}^{(k-1)}[m] = [-\cos \theta_{k-1}, -1, 3] \rightarrow \begin{cases} \text{Pix}^{(k)}[2n - 1] = [-\cos \theta_{k-1}, -\cos \theta_k, 9] \\ \text{Pix}^{(k)}[2n] = [-\cos \theta_k, -1, 3] \end{cases} ,$$

**function** Pixe(Max)

**begin**

```
// declaração de variáveis
FAIXA1, FAIXA2, FAIXA3 := FAIXA
// condições iniciais
FAIXA1 := [1, 0.5, 3] ;
FAIXA2 := [0.5, -0.5, 6] ;
FAIXA3 := [-0.5, -1, 3] ;
Pix[0] := [FAIXA1, FAIXA2, FAIXA3] ;
```

```

for  $k = 1 \dots Max$  do
    //  $n = 1$ 
    costheta :=  $1/4 * (3 + Pix[k-1][1][2])$  ;
    // ímpar
    Pix[k][1] := [1, costheta, 3] ;
    // par
    Pix[k][2] := [Pix[k][1][2], Pix[k-1][1][2], 9] ;
    //  $1 < n < m = 3 * 2^{k-1}$ 

    for  $n = 2 \dots \text{length}(Pix[k-1]) - 1$  do
        // usando o critério de áreas iguais (3.31)
        costheta :=  $1/2 * (Pix[k-1][n][1] + Pix[k-1][n][2])$  ;
        // caso queira usar o critério de espaçamentos iguais (3.30) de-
        // considerar a linha acima e considerar a linha abaixo
        //  $costheta := Pix[k-1][n][1] + Pix[k-1][n][2] / 2$ ;
        // ímpar
        Pix[k][2*n-1] := [Pix[k][(n-1)*2][2], costheta, 2*Pix[k-1][n][3]] ;
        // par
        Pix[k][2*n] := [Pix[k][2*n-1][2], Pix[k-1][n][2], 2*Pix[k-1][n][3]] ;
    end

    //  $n = Max$ 
    n :=  $\text{length}(Pix[k-1])$  ;
    Pix[k][2*n-1] := [Pix[k][2*n-2][2], -Pix[k-1][1][2], 9] ;
    Pix[k][2*n] := [Pix[k][2*n-1][2], -1, 3] ;

end

return Pix

```

**end**

#### 4.2 Algoritmo para Gerar $U_{P,lm}$ e $V_{P,lm}$

Para gerar  $U_{P,lm}$  e  $V_{P,lm}$  dados por (3.37) e (3.38) respectivamente, necessários para o cálculo da temperatura de cada pixel do mapa (3.36), desenvolvemos a função FunUV, que possui como parâmetros de entrada os valores de  $L$ ,  $M$ , a estrutura de dados Pix dada pela função Pixe, a ordem do refinamento  $K$ , o valor máximo de  $L$  ( $Lmax$ ), e flag, uma variável de controle de saída da função FunUV, se flag = 0 a função retorna a estrutura de dados com os valores de  $U_{P,lm}$ , senão retorna

$V_{P,lm}$ . Assim, as saídas da função FunUV são duas variáveis,  $U_{P,lm}$  e  $V_{P,lm}$ , do tipo *FUNCASSOC* dada por (4.1).

```
function FunUV(L, M, Pix, K, Lmax, flag)
```

```
begin
```

```
    // atribuição a uma variável da estrutura gerada no refinamento K
    P := Pix[K];
    // valor inicial da área do pixel
    Ap := 0;
    // valor de fi inicial
    fi_i := 0;
    // variável auxiliar para o cálculo do fatorial
    fat := (factorial(L-M)/factorial(L+M));

    for h = 1 .. length(Pix[K]) do
        // limites superior e inferior de cada pixel
        b := P[h][1];
        a := P[h][2];
        // número de pixels da faixa
        N := P[h][3];
        // Área do pixel
        Ap := (b-a)*(2*pi/N);
        // chamada a função Pinteg
        integral := Pinteg(Lmax, a, b);

        for Q = 1 .. N do
            // valor de fi final
            fi_f := fi_i + 2*pi/N;

            if M = 0 then
                u := fi_f - fi_i;
                v := 0;
            else u := (sin((M)*fi_f)-sin((M)*fi_i))/(M);
                v := -(cos((M)*fi_f)-cos((M)*fi_i))/(M);
            end

            // cálculo de U e V
            U[h][Q] := (sqrt((2*(L+1)/(4*pi)*fat))*integral[L][M]*u)/Ap;
```

```

        V[h][Q] := (sqrt((2*(L+1)/(4*pi)*fat))*integral[L][M]*v/Ap;
        fi_i := fi_f;
    end
end
if flag = 0 then
    return U;
else return V;
end
end
end

```

#### 4.2.1 Algoritmo para Gerar e Avaliar as Funções Associadas de Legendre

Para gerar e avaliar numericamente as funções associadas de Legendre utilizamos a fórmula recursiva (3.9) e a seguinte estrutura de dados

$$LEGENDRE = \text{Dynamic List of real ,}$$

onde o número de elementos de *LEGENDRE* depende de  $l$ . Devido à propriedade (3.4) para cada  $l$  precisamos calcular apenas  $l + 1$  funções associadas de Legendre.

A função *Plms* produz a estrutura de dados utilizada na geração e avaliação das funções associadas de Legendre. Os parâmetros de entrada são o valor  $L$  até onde se deseja gerar e avaliar as funções e o valor  $x$  onde são avaliadas as funções. A saída da função *Plms* é uma variável do tipo

$$FUNCASSOC = \text{Dynamic List of } LEGENDRE . \quad (4.1)$$

A  $(l - 1)$ -ésima função associada de Legendre de ordem  $m$  é obtida a partir das  $l$  e  $(l - 1)$ -ésimas funções associadas da mesma ordem  $m$ . Assim, o processo recursivo para construir as funções associadas de Legendre tem como condições iniciais dadas por (3.10), (3.11) e (3.12). Abaixo é apresentado o algoritmo desenvolvido para o cálculo das funções associadas de Legendre.

**function** *Plms*( $L, x$ )

```

begin
    //condição inicial
    Plm[0][0]:=1 ;

    for m = 0 ... L do
        //gerando as condições iniciais para cada m
        Plm[m+1][m+1] := (2*m+1)*sqrt(1-x*x)*Plm[m][m];
        Plm[m+1][m] := (2*m+1)*x*Plm[m][m] ;

        for Lm = 1 ... L do
            //cálculo da funções associadas utilizando a fórmula recursiva
            (3.9)
            Plm[Lm+1][m]:= [(2*Lm+1)*x*Plm[Lm][m]-(Lm+M)*
            Plm[Lm-1][m]]/(Lm-M+1) ;

        end

    end

    return Plm

end

```

#### 4.2.2 Algoritmo para Gerar e Avaliar as Integrais das Funções Associadas de Legendre

Para gerar e avaliar numericamente as integrais das funções associadas de Legendre utilizamos a fórmula recursiva (3.39). A função Pinteg gera e avalia numericamente de modo recursivo as integrais das funções associadas de Legendre no intervalo fornecido. Os parâmetros de entrada são o valor  $L$  até onde se deseja gerar e avaliar as integrais, o intervalo superior  $a$  e o intervalo inferior  $b$  da integral. A saída da função Pinteg é uma variável do tipo *FUNCASSOC* dada por (4.1).

Do mesmo modo que com as funções associadas de Legendre, a  $(l+1)$ -ésima integral da função associada de Legendre de ordem  $m$  é obtida a partir das  $l$  e  $(l-1)$ -ésima integrais das funções associadas da mesma ordem  $m$ . O processo recursivo para construir as integrais das funções associadas de Legendre tem condições iniciais dadas por (3.40), (3.41), (3.42) e (3.43). Como pode ser observado em (3.39 e 3.43), é necessário calcular o valor das funções associadas de Legendre nos extremos  $a$  e  $b$  do intervalo de integração. Por isso no algoritmo abaixo, primeiramente calculamos, através da função Plms, as funções associadas de Legendre nestes pontos.

No processo de construção da estrutura de dados é conveniente, devido à natureza das condições iniciais para cada ordem  $m$ , calcular separadamente as integrais para  $m = 0$  com  $0 < l < L - 1$ , para  $m = 1$  com  $1 < l < L - 1$ , para os demais  $m$ 's com  $m < l < L - 2$ , e finalmente para  $m = L - 1, L$ . Abaixo é apresentado o algoritmo para o cálculo das integrais das funções associadas de Legendre.

**function** Pinteg( $L, a, b$ )

**begin**

*// gera e avalia as funções associadas de Legendre para os valores a e b*

polya := Plm(L,a);

polyb := Plm(L,b);

*// variáveis auxiliares*

sa := (1-a<sup>2</sup>);

sb := (1-b<sup>2</sup>);

*// calculando todos os  $\int P_l^0$*

Pint[0][0] := b-a ;

Pint[1][0] := 0.5\*(sa\*polya[0][0]-sb\*polyb[0][0]) ;

**for** Lm = 1 ... L-1 **do**

y := (2\*Lm+1)\*(sb\*polyb[Lm][0]-sa\*polya[Lm][0]) ;

z := Lm\*(Lm-1)\*Pint[Lm-1][0] ;

den := (Lm+1)\*(Lm-2) ;

Pint[Lm+1][0] := (z-y)/den ;

**end**

*// calculando todos os  $\int P_l^1$*

Pint[1][1] := 0.5\*((b\*sqrt(sb))-(a\*sqrt(sa)) + arccos a - arccos b);

Pint[2][1] := (sa\*polya[1][1]-sb\*polyb[1][1]);

**for** Lm = 2 ... L-1 **do**

y := (2\*Lm+1)\*(sb\*polyb[Lm][1]-sa\*polya[Lm][1]) ;

z := (Lm+1)\*(Lm-1)\*Pint[Lm-1][1] ;

den := Lm\*(Lm-2) ;

Pint[Lm+1][1] := (z-y)/den ;

**end**

*// cálculo de todos os  $\int P_l^m$  para  $m \geq 2$  e  $m \leq l - 1$*



```

for m = 2 ... L-2 do
  Pint[m][m] := (2*m-2)*(2*m-3)*Pint[m-2][m-2]*Pint[m][m-2];
  Pint[m+1][m] := ((2*m+1)/(m+2))*(sa*polya[m][m]-
  sb*polyb[m][m]);

  for Lm = m+1 ... L-1 do
    y := (2*Lm+1)*(sb*polyb[Lm][m]-sa*polya[Lm][m]);
    z := (Lm+m)*(Lm-1)*Pint[Lm-1][m];
    den := (Lm-m+1)*(Lm-2) ;
    Pint[Lm+1][m] := (z-y)/den ;
  end
end

// cálculo de  $\int P_l^m$  para  $m = L - 1, L$ 
m := L-1;
Pint[m][m]:=(2*m-2)*(2*m-3)*Pint[m-2][m-2]*Pint[m][m-2] ;
Pint[m+1][m] := ((2*m+1)/(m+2))*(sa*polya[m][m]-sb*polyb[m][m]) ;
m=L;
Pint[m][m]:=(2*m-2)*(2*m-3)*Pint[m-2][m-2]*Pint[m][m-2] ;
return Pint;

```

**end**

### 4.3 Algoritmo para Simular os Mapas de Anisotropia da RCF Conforme Modelo EdS

Para a construção do mapa pixelizado de acordo com o modelo EdS, utilizamos a Equação 3.36 que depende do cálculo dos coeficientes de expansão  $a_{l0}$ ,  $A_{lm}$  e  $B_{lm}$  com  $1 \leq l \leq l_{max}$ , e de  $U_{P,lm}$  e  $V_{P,lm}$ , dados pela função FunUV. Os coeficientes da expansão são gerados aleatoriamente seguindo uma distribuição normal com variância dada pelo espectro de potência no modelo EdS (3.23).

A função maps gera  $N$  mapas pixelizados de anisotropia de acordo com o modelo EdS. Os parâmetros de entrada são o valor de  $L$  máximo  $Lmax$  e a ordem do refinamento  $K$ . A saída da função maps é uma variável do tipo *FUNCASSOC* dada por (4.1).

```
function maps( $Lmax, K$ )
```

```

begin
    // Quantidade de mapas
    N := 100;
    // Pixelização da esfera
    Pix := Pixe(k);
    // Cálculo de U e V

    for L = 2...Lmax do

        for m = 0...Lmax do
            U[L][m] := FunUV(L,m,Pix,K,Lmax,0);
            V[L][m] := FunUV(L,m,Pix,K,Lmax,1);
        end
    end

end

// laço que controla a quantidade de mapas

for n = 1...N do

    for L = 2...Lmax do // M = 0
        // espectro de potências
        sigma := 1/sqrt(L*(L-1));
        beta := sigma*sqrt(pi)/2;
        // cálculo dos coeficientes para m = 0
        control := 0;
        while control = 0 do
            u := rand;
            v := rand;
            a := -beta*log(1-v);
            w := a/beta-(a/sigma)^2;
            if u ≤ exp(w) then
                control := 1;
            end
        end
    end

    u := rand;
    if u ≤ 0.5 then
        a := -a;
    end
end

```

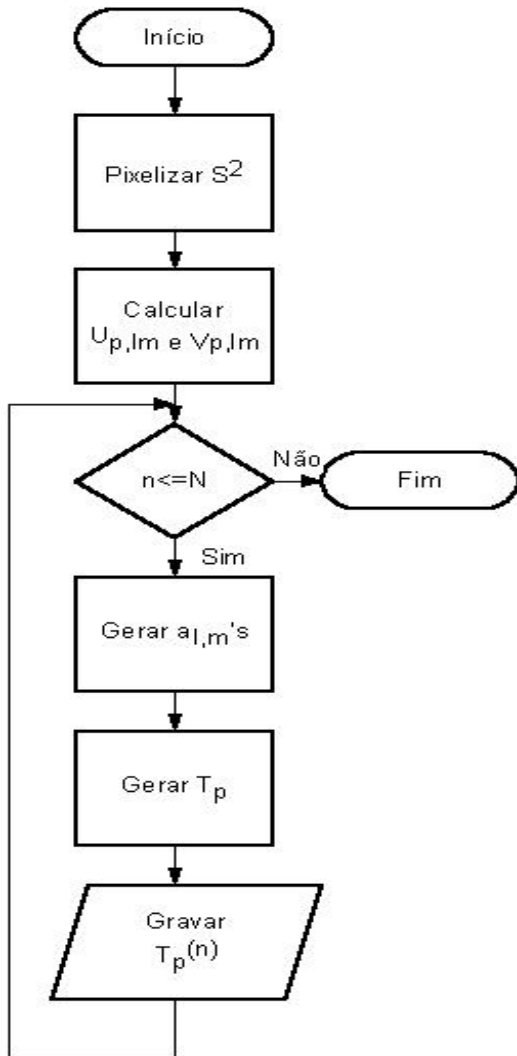
```

// cálculo da temperatura para cada pixel
for  $t = 1 \dots \text{length}(U[L][1])$  do
    Tps[t] := Tps[t] + (a*Ulm[L][1][t]);
end
//cálculo dos coeficientes para  $1 \leq m \leq Lmax$ 
for  $m = 1 \dots Lmax$  do
    control := 0;
    while control = 0 do
        u := rand;
        v := rand;
        a := -beta*log(1-v);
        w := a/beta - (a/sigma)^2;
        if  $u \leq \exp(w)$  then
            control := 1;
        end
    end
    theta := 2*pi*rand;
    Alm := 2*r*cos(theta);
    Blm := 2*r*sin(theta);
    // cálculo da temperatura para cada pixel
    for  $tt = 1 \dots \text{length}(U[L][1])$  do
        Tps[tt] = Tps[tt] + ((Alm*Ulm[L][m][tt]) + (Blm*Vlm[L][m][tt]));
    end
end
// salvando a temperatura dos pixels para cada mapa
salvar TpsN;
end
end
end

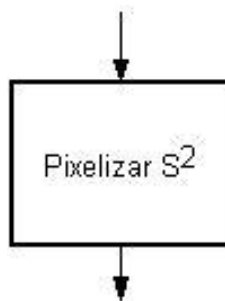
```

Uma vez contruídas e testadas as ferramentas computacionais e teóricas para simulação e visualização dos mapas descritas, respectivamente, neste capítulo e no capítulo anterior, iremos descrever e aplicar no próximo capítulo, a metodologia de análise de padrões gradientes que terá como objetivo testar o desempenho da análise

de padrões para caracterizar mapas com diferentes espectro de potência simulados e visualizados de acordo com as técnicas apresentadas até aqui.



**FIGURA 4.1** - Diagrama de fluxo de geração de mapas.



**FIGURA 4.2** - Pixelização da esfera.

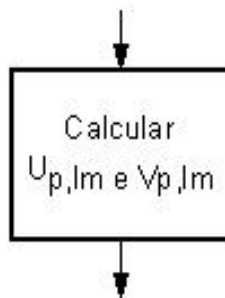


FIGURA 4.3 - Cálculo de  $U_{P,lm}$  e  $V_{P,lm}$ .

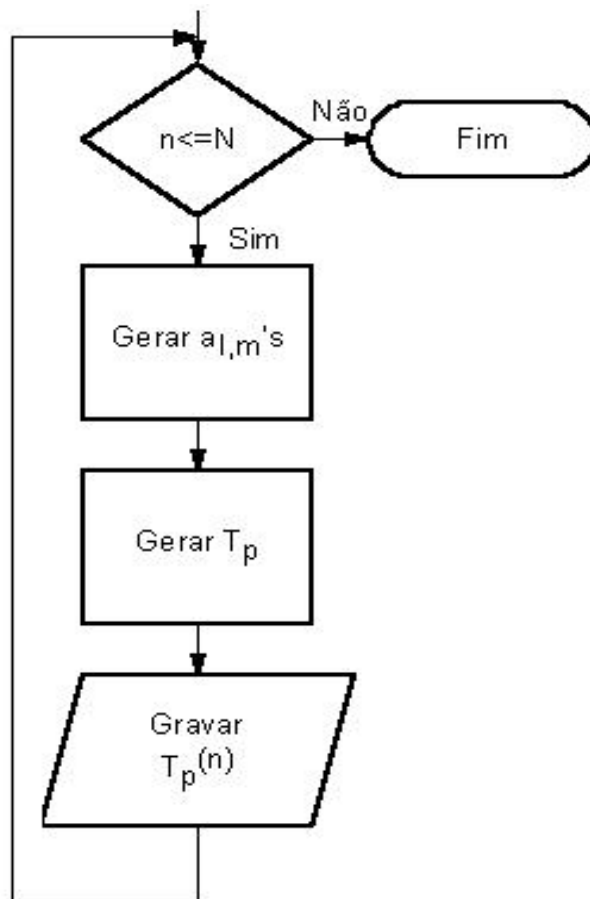


FIGURA 4.4 - Geração dos mapas.



## CAPÍTULO 5

### ANÁLISE DE PADRÕES GRADIENTES

Neste capítulo descrevemos a técnica de análise de padrões gradientes (*Gradient Pattern Analysis - GPA*) e a sua aplicação para análise dos mapas simulados.

#### 5.1 Os Momentos Gradientes

Um padrão espacialmente gerado em duas dimensões  $(x, y)$  é representado pela matriz das amplitudes  $\mathcal{M} = \mathcal{L}^{\ell \times \ell} \{M(1, 1), \dots, M(i, j), \dots, M(\ell, \ell) \mid i, j \in I \text{ e } M \in \mathfrak{R}\}$ , essencialmente uma grade quadrada,  $\mathcal{L}$ , se as duas dimensões espaciais,  $x$  e  $y$ , estão discretizadas em  $\ell \times \ell$  pixels, com  $i = 1, \dots, \ell$  e  $j = 1, \dots, \ell$ . Assim, uma sucessão dinâmica de  $N$  grades,  $\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_N$ , está relacionada à visualização da evolução temporal de um envelope de amplitude  $\mathcal{M}_{x,y,t} \equiv \mathcal{E}(x, y, t)$ . Usualmente, cada intensidade da amplitude  $\mathcal{E}(i, j)$ , representa uma medida local de energia espacialmente distribuída (são exemplos a velocidade relativa, a taxa de concentração, intensidade de emissão, temperatura, etc). A flutuação espacial do padrão global  $\mathcal{E}(x, y)$ , para um dado instante  $t$ , pode ser caracterizado através do campo vetorial gradiente  $\mathcal{G}_t = \nabla[\mathcal{E}(x, y)]_t$ . Uma flutuação espacial local, entre um par instantâneo de intensidades, pertencentes ao padrão global, é caracterizada por seu vetor gradiente, definido entre cada par de pontos da grade bi-dimensional. Nesta representação, os valores relativos entre as amplitudes (que determinam a norma e a orientação de cada vetor) são dinamicamente mais relevantes do que os seus valores absolutos.

Dentro do formalismo GPA, um campo vetorial gradiente  $\mathcal{G}_t = \nabla[\mathcal{E}(x, y)]_t$ , composto por  $V$  vetores  $\mathbf{r}$ , onde cada vetor  $\mathbf{r}_{i,j}$ , localizado na posição  $(i, j)$  do campo gradiente está caracterizado por sua norma e fase ( $\mathbf{r}_{i,j} = (r, \phi)$ ). Dessa forma, um dado campo escalar de valores absolutos pode ser interpretado com um campo gradiente das flutuações das amplitudes locais e, esse campo gradiente, pode ser representado por um par de matrizes, uma das normas e a outra das fases. Uma representação subsequente é dada por uma matriz complexa, onde cada elemento é um número complexo  $z_{i,j}$ , representando cada vetor do padrão gradiente. Assim, um dado campo escalar matricial pode ser representado como a composição de quatro momentos gradientes:

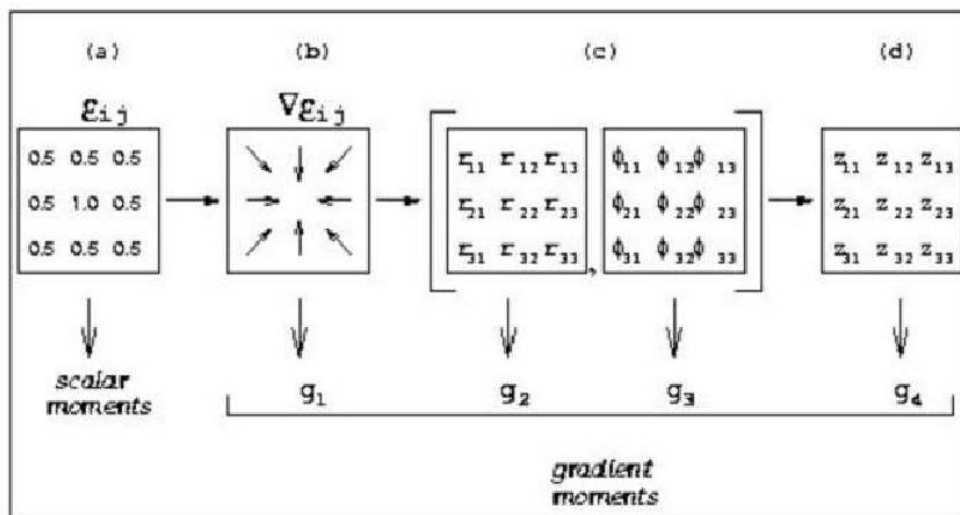
- o momento gradiente de primeira ordem,  $g_1^a$ , uma medida global da dis-



tribuição de todos os vetores, isto é, de todas as normas e suas respectivas fases localizadas no campo gradiente;

- o de segunda ordem,  $g_2$ , que calcula a desordem existente no módulo dos vetores;
- o terceira ordem,  $g_3$ , que calcula a desordem existente na fase dos vetores e o
- o quarto momento,  $g_4$ , que é a medida global da norma dos vetores (extraída da matriz composta por todas as normas locais) e da fase dos vetores (extraída da matriz composta por todas as respectivas fases locais).

Esses momentos estão apresentados graficamente na Figura 5.1.



**FIGURA 5.1** - Representação esquemática da Análise de Padrões Gradientes de um campo escalar matricial.

(a) um campo escalar arbitrário normalizado; (b) o correspondente padrão gradiente da amplitude das flutuações; (c) a norma e a fase das flutuações; (d) representação complexa das flutuações [Fonte: Rosa, *et al.* (ROSA *et al.*, 2003)].

A partir da definição de  $g_1^a$ ,  $g_2$ ,  $g_3$  e  $g_4$  é possível representar o campo gradiente  $G_t = \nabla[\epsilon(x, y)]_t$ , como sendo um conjunto de quatro momentos gradientes  $G_t = (g_1, g_2, g_3, g_4)$ .

Para a extração desses momentos são utilizados operadores computacionais. Assim, o

operador AAF (*Asymmetric Amplitude Fragmentation*) (ROSA *et al.*, 2003; ROSA *et al.*, 2000; ROSA *et al.*, 1999) baseado nas assimetrias dos vetores do campo gradiente é utilizado para calcular o valor do momento  $g_1^a$ . O momento  $g_4$  ( $|g_4|$  e  $\phi g_4$ ), é calculado pelo operador computacional CEF (*Complex Entropic Form*) (RAMOS *et al.*, 2000) e os momentos  $g_2$  e  $g_3$  ainda não possuem um operador formal, definido na literatura, para o seu cálculo.

## 5.2 O Primeiro Momento Gradiente para Assimetrias

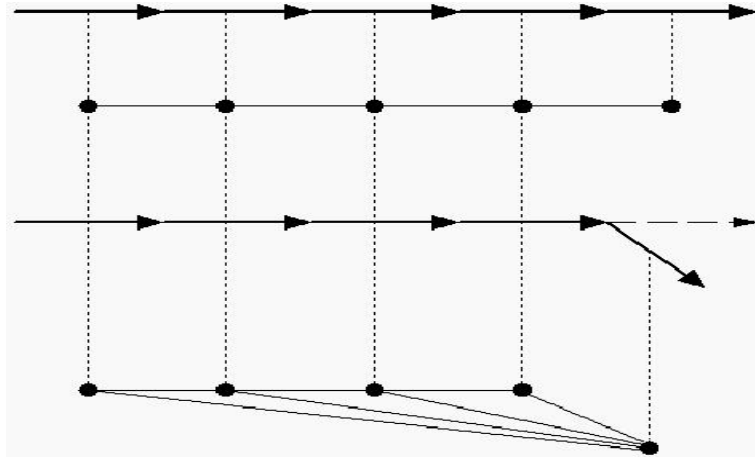
A medida de quebras de simetrias do campo gradiente,  $g_1^a$ , pode ser obtida por meio do operador computacional AAF, que mede o grau de fragmentação assimétrica das amplitudes. Padrões bidimensionais sem fragmentação espacial (por exemplo, aquele dado por um envelope Gaussiano) ou padrões fragmentados com simetria total (por exemplo, aquele dado por um envelope Besseliano) possuem momento gradiente  $g_1^a$  nulo (não há assimetria na distribuição). Este operador gera, computacionalmente, uma medida da assimetria global do padrão. No caso de um padrão espaço-temporal, a variável  $g_1^a(t)$ , quantifica, no tempo, as possíveis quebras de simetria ao longo da evolução do padrão.

A partir do campo gradiente,  $\nabla(\mathcal{M})$ , que representa as flutuações pixel a pixel, os pares de vetores simétricos (isto é, os pares de vetores que tem, para uma dada tolerância, o mesmo módulo mas direções opostas) são removidos, obtendo-se assim um campo formado somente por vetores assimétricos  $\nabla_A(\mathcal{M})$  (ROSA *et al.*, 1999). A medida de fragmentação espacial assimétrica  $g_1^a$  é definida como:

$$g_1^a \equiv \frac{(C - V_A)}{V_A} \quad (C \geq V_A > 0), \quad (5.1)$$

onde  $V_A$  é o número de vetores assimétricos e  $C$  o número de barras de correlação gerado por uma triangulação de Delaunay tomando o ponto médio de cada vetor assimétrico como vértice (veja Figura 5.2). A triangulação de Delaunay  $T_D(C, V_A)$ , neste contexto, é um campo fracionário com dimensão menor que a dimensão da grade (ROSA *et al.*, 1999). Portanto, variando no intervalo entre 1 e 2. Entretanto, devido a sua propriedade de sensibilidade assintótica (PSA) os valores de  $g_1^a$  tendem assintoticamente para o valor máximo (igual a 2, que corresponde a dimensão da grade) (ROSA *et al.*, 1999). Na Figura 5.2 mostramos como a triangulação de Dealunay no contexto do operador AAF, quantifica uma quebra de simetria através do aumento do número triângulos.

Quando não há nenhuma correlação assimétrica no padrão, o número total de vetores assimétricos é zero, e então, por definição, o momento gradiente  $g_1^a$  é nulo. Para uma determinada grade de tamanho  $l \times l$ , o padrão totalmente desordenado, em termos de assimetrias, gera o mais alto valor para  $g_1^a$ . Padrões compostos por estruturas regulares (ex. em forma de rolos e labirintos convectivos) apresentam valores específicos não-nulos para  $g_1^a$ . Como exemplo, na Figura 5.3, mostramos o resultado após a aplicação do AAF em uma sub-matriz 32x32 retirada de um mapa de RCF gerado com as ferramentas apresentadas nos capítulos anteriores.

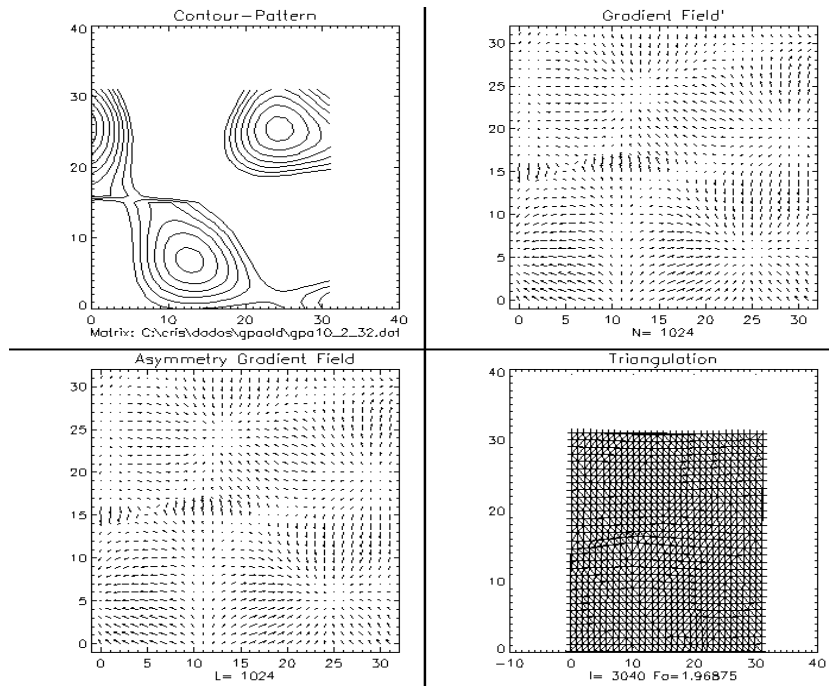


**FIGURA 5.2** - Triangulação de Delaunay no contexto do operador AAF.

Neste trabalho utilizamos o operador computacional AAF a fim de verificar se a técnica é sensível aos padrões de flutuações visualizados nos mapas para diferentes espectros de potência.

### 5.3 Caracterização dos Mapas por Assimétrias

Para caracterizar os padrões de flutuações dos mapas por meio dos padrões de assimetrias calculados pela técnica GPA ((ROSA *et al.*, 2003; ROSA *et al.*, 2000; ROSA *et al.*, 1999; RAMOS *et al.*, 2000)), simulamos 900 mapas, sendo 300 seguindo uma distribuição normal com média nula e variância dada pelo espectro de potência no modelo EdS (3.23). Outros 300 mapas com o espectro de potência dado por  $C_l = 1$  e 300 com espectro  $C_l = l(l + 1)$ . Para cada espectro, 100 mapas com  $L_{max} = 5$ , 100 com  $L_{max} = 10$  e 100 com  $L_{max} = 20$  e refinamento  $k = 5$ . Para cada mapa é escolhida a faixa do equador (32x192). Como a versão atual da técnica GPA (ROSA



**FIGURA 5.3** - Exemplo de saída do operador AAF.

*et al.*, 2003) é aplicada apenas em matrizes quadradas, a faixa do equador é dividida em 6 sub-matrizes (32x32), nas quais aplicamos o operador computacional AAF e extraímos o primeiro momento  $g_1^a$  para cada sub-matriz 32x32 de cada mapa e calculamos a média desses valores para cada sub-matriz.

Obtemos assim os seguintes resultados:

Na Tabela 5.1 encontramos os valores, estatisticamente representativos, para o primeiro momento gradiente, obtidos para uma escala fixa igual a 32x32, para diferentes matrizes caracterizadas pelo par  $(C_l, L_{max})$ . Nesse caso estamos interessados na inspeção da variação do primeiro momento gradiente. Na Tabela 5.2 mostramos os histogramas de todos os valores de  $g_1^a$ , obtidos para as escalas 32x32 de todos os mapas, em função dos pares  $(C_l, L_{max})$ . A forma de cada distribuição pode ser utilizada como um classificador das assimetrias características encontradas em cada classe  $(C_l, L_{max})$  de mapas. Podemos notar que, a menos dos desvios, todos os conjuntos de valores mais frequentes de  $g_1^a$  são diferentes entre si. Observamos que o valor mais freqüente de cada distribuição consegue distinguir os diferentes harmônicos ( $L_{max}$ ), porém não é uma medida tão robusta na distinção dos espectros ( $C_l$ ). Entretanto, em termos de valores absolutos, considerando os respectivos desvios de

**TABELA 5.1** - Valores médios de  $g_l^a$  e desvio padrão.

| Espectros                | $L_{max} = 5$ |        | $L_{max} = 10$ |        | $L_{max} = 20$ |        |
|--------------------------|---------------|--------|----------------|--------|----------------|--------|
|                          | Média         | Desvio | Média          | Desvio | Média          | Desvio |
| $C_l = \frac{1}{l(l+1)}$ | 1.9553        | 0.0275 | 1.9675         | 0.0131 | 1.9761         | 0.0069 |
|                          | 1.9553        | 0.0289 | 1.9680         | 0.0131 | 1.9763         | 0.0055 |
|                          | 1.9614        | 0.0292 | 1.9684         | 0.0133 | 1.9751         | 0.0054 |
|                          | 1.9502        | 0.0304 | 1.9679         | 0.0130 | 1.9756         | 0.0049 |
|                          | 1.9619        | 0.0276 | 1.9650         | 0.0138 | 1.9760         | 0.0064 |
|                          | 1.9569        | 0.0275 | 1.9699         | 0.0111 | 1.9758         | 0.0060 |
| $C_l = 1$                | 1.9557        | 0.0286 | 1.9671         | 0.0127 | 1.9762         | 0.0065 |
|                          | 1.9552        | 0.0290 | 1.9664         | 0.0120 | 1.9759         | 0.0058 |
|                          | 1.9573        | 0.0287 | 1.9703         | 0.0113 | 1.9767         | 0.0058 |
|                          | 1.9554        | 0.0303 | 1.9666         | 0.0137 | 1.9760         | 0.0053 |
|                          | 1.9569        | 0.0323 | 1.9682         | 0.0121 | 1.9759         | 0.0063 |
|                          | 1.9565        | 0.0296 | 1.9697         | 0.0112 | 1.9765         | 0.0063 |
| $C_l = l(l+1)$           | 1.9580        | 0.0261 | 1.9680         | 0.0115 | 1.9768         | 0.0063 |
|                          | 1.9531        | 0.0291 | 1.9695         | 0.0124 | 1.9770         | 0.0052 |
|                          | 1.9624        | 0.0279 | 1.9695         | 0.0115 | 1.9759         | 0.0052 |
|                          | 1.9515        | 0.0296 | 1.9700         | 0.0113 | 1.9765         | 0.0054 |
|                          | 1.9629        | 0.0256 | 1.9671         | 0.0126 | 1.9763         | 0.0061 |
|                          | 1.9567        | 0.0255 | 1.9711         | 0.0104 | 1.9773         | 0.0051 |

cada classe de medida mostrados na Tabela 5.1, concluímos que a faixa de variação das assimetrias não valida o primeiro momento gradiente como uma medida valida para a caracterização das flutuações observadas nas escalas 32x32 dos mapas gerados neste trabalho.

TABELA 5.2 - Histograma do primeiro momento gradiente  $g_1^a$ .

|                          | $L_{max} = 5$ | $L_{max} = 10$ | $L_{max} = 20$ |
|--------------------------|---------------|----------------|----------------|
| $C_l = \frac{1}{l(l+1)}$ |               |                |                |
| $C_l = 1$                |               |                |                |
| $C_l = l(l+1)$           |               |                |                |



## CAPÍTULO 6

### CONCLUSÃO

Neste trabalho desenvolvemos, utilizando o modelo cosmológico simples de Einstein-de Sitter, a simulação, visualização e análise computacional de mapas da radiação cósmica de fundo. Os mapas da anisotropia foram implementados a partir da técnica de pixelização Igloo em conjunto com a projeção Mollweide. Foram gerados cerca de 900 mapas para diferentes pares de espectros de potência e harmônicos esféricos. O espectro de potência para este modelo foi calculado pressupondo perturbações iniciais de densidade do tipo gaussiano com espectro de Harrison-Zeldovich.

Em geral a geração dos mapas apresenta um alto custo computacional <sup>1</sup> Neste trabalho mostramos que a metodologia adotada apresenta relativa facilidade na sua implementação computacional mostrando-se ser eficiente na geração de mapas da RCF para um modelo cosmológico simples. O trabalho de programação foi integralmente desenvolvido utilizando o Matlab.

Embora nossa motivação tenha sido a geração de mapas de anisotropia da RCF, a ferramenta desenvolvida pode também ser utilizada para simular mapas da distribuição de população global (TOBLER, 1992), da topografia da superfície terrestre (LEE; KAULA, 1967), do fluxo global de calor do interior no nosso planeta (CHAPMAN; POLLACK, 1975), etc.

Aplicamos a Análise de Padrões Gradientes (GPA) aos padrões de anisotropia, a fim de verificar se esta técnica computacional é capaz de distinguir as classes de mapas com diferentes espectros de potência e quantidade de harmônicos. Concluimos que a caracterização dos mapas por assimetrias não é absolutamente robusto e suficiente para essa tarefa.

Para os trabalhos futuros sugerimos os seguintes tópicos:

- Selecionar novas amostras de flutuação 64x64 dos mapas simulados;
- Testar como ferramentas de análise uma nova forma logarítmica do primeiro momento gradiente (DASILVA *et al.*, 2000) e também em medidas baseadas na métrica do padrão (por exemplo: área e contornos de

---

<sup>1</sup> ± 20 min. para gerar um mapa com  $L_{max} = 20$  em um computador Pentium III, 300 MHz e 390 KB



cobertura a partir da estimativa dos funcionais de Minkowsky ([MECKE, 2000](#));

- Gerar mapas com diferentes modelos cosmológicos;
- Reescrever os códigos feitos em C e paralelizá-los, a fim de tornar a simulação mais rápida;
- Reconstruir mapas de anisotropia, ou seja reconstruir os coeficientes da expansão  $a_{lm}$ , a partir de uma representação discretizada, e mesmo incompleta, na esfera pixelizada.
- Aplicar a técnica GPA e possivelmente, os funcionais de Minkowsky, nos mapas reconstruídos e comparar os resultados com resultados obtidos nos mapas reais gerados.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ARFKEN, G. **Mathematical methods for physicists**. New York: Academic Press, 1970. 1112 p. 31, 34
- BARDEEN, J. Gauge-invariant cosmological perturbations. **Physical Review D**, v. 22, n. 8, p. 1882–1905, out. 1980. 27
- BENNETT, C. L.; HALPERN, M.; HINSHAW, G.; JAROSIK, N.; KOGUT, A.; LIMON, M.; MEYER, S. S.; PAGE, L.; SPERGEL, D. N.; TUCKER, G. S.; WOLLACK, E.; WRIGHT, E. L.; BARNES, C.; GREASON, M. R.; HILL, R. S.; KOMATSU, E.; NOLTA, M. R.; ODEGARD, N.; PEIRIS, H. V.; VERDE, L.; WEILAND, J. L. First year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) observations: preliminary maps and basic results. **The Astrophysical Journal Supplement Series**, v. 148, n. 1, p. 1–27, set. 2003. 20, 21, 26
- BERSANELLI, M.; MAINO, D.; MENNELLA, A. Anisotropies of the Cosmic Microwave Background. **Rivista del Nuovo Cimento**, v. 25, n. 9, p. 1–82, set. 2002. 26
- BORRILL, J. The challenge of data analysis for future CMB observations. In: **3K cosmology, Proceedings of the EC-TMR Conference**. Italy: American Institute of Physics, 1999. v. 476, p. 277. 21
- CAMB - Code for Anisotropies in the Microwave Background. 2004. Disponível em: <http://camb.info>. Acesso em: 20 jul. 2004. 19
- CHAPMAN, D. S.; POLLACK, H. N. Global heat flow: A new look. **Earth and Planetary Science Letters**, v. 28, n. 1, p. 23–32, nov. 1975. 69
- CMBEASY. 2003. Disponível em: [www.cmbeasy.org](http://www.cmbeasy.org). Acesso em: 10 jun. 2003. 19
- CMBFASTG. 2002. Disponível em: <http://www.cmbfast.org>. Acesso em: 22 jun. 2003. 19
- COBLE, K.; DRAGOVAN, M.; KOVAC, J.; HALVERSON, N. W.; HOLZAPFEL, W. L.; KNOX, L.; DODELSON, S.; GANGA, K.; ALVAREZ, D.; PETERSON, J. B.; GRIFFIN, G.; NEWCOMB, M.; MILLER, K.; PLATT, S. R.; NOVAK, G. Anisotropy in the cosmic Microwave Background at degree angular scales: Python v results. **The Astrophysical Journal**, v. 519, n. 1, p. L5–L8, jul. 1999. 26

COSMICS - Cosmological initial conditions and microwave anisotropy codes. 2003. Disponível em: <http://arcturus.mit.edu/cosmics>. Acesso em: 22 jul. 2003. 19

COSMOS - National Cosmology Supercomputer. 2003. Disponível em: <http://www.damtp.cam.ac.uk/cosmos/Public/index.html>. Acesso em: 05 jul. 2003. 19

CRITTENDEN, R. G.; TUROK, N. G. **Exactly Azimutal Pixelizations of the Sky**. [S.l.], jun. 1998. Disponível em: [http://arxiv.org/PS\\_cache/astro-ph/pdf/9806/9806374.pdf](http://arxiv.org/PS_cache/astro-ph/pdf/9806/9806374.pdf). Acesso em: 06 jun. 2003. 38, 43

DASILVA, A. F.; ROSA, R. R.; ROMAN, L. S.; VEJE, E.; PEPE, I. Characterization of asymmetric fragmentation patterns in SFM images of porous silicon. **Solid State Communications**, v. 113, n. 12, p. 703–708, fev. 2000. 69

EDIRISINGHE, D.; BUDIARDJA, R.; CHAE, K.; EDIRISINGHE, G.; LINGERFELT, E.; GUIDRY, M. Applications of Java and vector graphics to astrophysical visualization. **Bulletin of the American Astronomical Society**, v. 34, p. 1256, dez. 2002. 19

EDIRISINGHE, G.; EDIRISINGHE, D.; MESSER, O.; GUIDRY, M. Genetic algorithms and neural networks applied to galaxy collisions. **Bulletin of the American Astronomical Society**, v. 34, p. 1256, dez. 2002. 19

FERNANDES, J. O. **Um processo otimizado de produção de mapas da radiação cósmica de fundo em microondas**. 97 p. Dissertação (Mestrado em Computação Aplicada) — Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, mar. 2003. 21

GÓRSKI, K. M. **The HEALPix Primer**. [S.l.], maio 1999. Disponível em: [http://br.arxiv.org/PS\\_cache/astro-ph/pdf/9905/9905275.pdf](http://br.arxiv.org/PS_cache/astro-ph/pdf/9905/9905275.pdf). Acesso em: 06 jun. 2003. 38

HALVERSON, N. W.; LEITCH, E. M.; PRYKE, C.; KOVAC, J.; CARLSTROM, J. E.; HOLZAPFEL, W. L.; DRAGOVAN, M.; CARTWRIGHT, J. K.; MASON, B. S.; PADIN, S.; PEARSON, T. J.; READHEAD, A. C. S.; SHEPHERD, M. C. Degree angular scale interferometer first results: a measurement of the Cosmic Microwave Background angular power spectrum. **The Astrophysical Journal**, v. 568, n. 1, p. 38–45, mar. 2002. 26

HOWELL, D.; WANG, L. Automated supernova classification. **Bulletin of the American Astronomical Society**, v. 34, p. 1256, dez. 2002. 19

IGLOO Pixelisation. 2001. Disponível em:

<http://www.mrao.cam.ac.uk/projects/cpac/igloo>. Acesso em: 02 jun. 2003. 38

ISLAM, J. **An introduction to mathematical cosmology**. New York: Cambridge University Press, 1992. 187 p. 20, 23, 24

LEE, A. T.; ADE, P.; BALBI, A.; BOCK, J.; BORRILL, J.; BOSCALERI, A.; CRILL, B. P.; BERNARDIS, P. de; CASTILLO, H. del; FERREIRA, P.; GANGA, K.; HANANY, S.; HRISTOV, V.; JAFFE, A. H.; LANGE, A. E.; MAUSKOPF, P.; NETTERFIELD, C. B.; OH, S.; PASCALE, E.; RABII, B.; RICHARDS, P. L.; RUHL, J.; SMOOT, G. F.; WINANT, C. D. MAXIMA: an experiment to measure temperature anisotropy in the Cosmic Microwave Background. In: . Italy: American Institute of Physics, 1999. v. 476, p. 224. 26

LEE, W. H. K.; KAULA, W. M. A spherical harmonic analysis of the Earth's topography. **Journal of Geophysical Research**, v. 72, n. 11, p. 753–758, jan. 1967. 69

LEVIN, J. **Topology and the Cosmic Microwave Background**. [S.l.], ago. 2001. Disponível em:

[http://xxx.if.usp.br/PS\\_cache/gr-qc/pdf/0108/0108043.pdf](http://xxx.if.usp.br/PS_cache/gr-qc/pdf/0108/0108043.pdf). Acesso em: 06 jan. 2003. 29

LINGERFELT, E.; HIX, W.; GUIDRY, M.; SMITH, M. Java analysis tools for element production calculations in computational astrophysics. **Bulletin of the American Astronomical Society**, v. 34, p. 1256, dez. 2002. 19

MALING, D. **Coordinate systems and map projections**. London: George Philip and Son Limited, 1973. 255 p. 77

MAUSKOPF, P. D.; ADE, P. A. R.; BERNARDIS, P. de; BOCK, J. J.; BORRILL, J.; BOSCALERI, A.; CRILL, B. P.; DEGASPERIS, G.; TROIA, G. D.; FARESE, P.; FERREIRA, P. G.; GANGA, K.; GIACOMETTI, M.; HANANY, S.; HRISTOV, V. V.; IACOANGELI, A.; JAFFE, A. H.; LANGE, A. E.; LEE, A. T.; MASI, S.; MELCHIORRI, A.; MELCHIORRI, F.; MIGLIO, L.; MONTROY, T.; NETTERFIELD, C. B.; PASCALE, E.; PIACENTINI, F.; RICHARDS, P. L.; ROMEO, G.; RUHL, J. E.; SCANNAPIECO, E.; SCARAMUZZI, F.; STOMPOR,

R.; VITTORIO, N. Measurement of a peak in the Cosmic Microwave Background power spectrum from the north american test flight of Boomerang. **The Astrophysical Journal**, v. 536, n. 2, p. L59–L62, jun. 2000. 26

MECKE, K. R. **Dietrich Stoyan Statistical physics and spatial statistics: the art of analysing and modeling spatial structures and pattern formation**. Germany: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2000. 416 p. 70

MEINHOLD, P. R.; BERSANELLI, M.; CHILDERS, J.; FIGUEIREDO, N.; GAIER, T. C.; HALEVI, D.; HUEY, G. G.; KANGAS, M.; LAWRENCE, C. R.; LEVY, A.; LUBIN, P. M.; MALASPINA, M.; MANDOLESI, N.; MARVIL, J.; MEJÍA, J.; NATOLI, P.; O'DWYER, I.; O'NEILL, H.; PARENDO, S.; PINA, A.; SEIFFERT, M. D.; STEBOR, N. C.; TELLO, C.; VILLA, F.; VILLELA, T.; WADE, L. A.; WANDELT, B. D.; WILLIAMS, B.; WUENSCH, C. A. **A map of the Cosmic Microwave Background from the BEAST experiment**. [S.l.], mar. 2003. Disponível em:

[http://xxx.if.usp.br/PS\\_cache/astro-ph/pdf/0302/0302034.pdf](http://xxx.if.usp.br/PS_cache/astro-ph/pdf/0302/0302034.pdf). Acesso em: 01 jun. 2003. 26

MUKHANOV, V.; FELDMAN, H.; BRANDENBERGER, R. Theory of cosmological perturbations. **Physics Reports**, v. 215, n. 5-6, p. 203–333, jun. 1992. 20, 26

NASA/IPAC Extragalactic Database. 2000. Disponível em:

<http://nedwww.ipac.caltech.edu>. Acesso em: 05 dec. 2003. 19

PADIN, S.; CARTWRIGHT, J. K.; MASON, B. S.; PEARSON, T. J.; READHEAD, A. C. S.; SHEPHERD, M. C.; SIEVERS, J.; UDOMPRASERT, P. S.; HOLZAPFEL, W. L.; MYERS, S. T.; CARLSTROM, J. E.; LEITCH, E. M.; JOY, M.; BRONFMAN, L.; MAY, J. First intrinsic anisotropy observations with the cosmic background imager. **The Astrophysical Journal**, v. 549, n. 1, p. L1–L5, mar. 2001. 26

PEACOCK, J. A. **Cosmological physics**. New York: Cambridge University Press, 1999. 702 p. 30

PERLMUTTER, S.; ALDERING, G.; GOLDHABER, G.; KNOP R., A.; NUGENT, P.; CASTRO, P. G.; DEUSTUA, S.; FABBRO, S.; GOOBAR, A.; GROOM, D. E.; HOOK, I. M.; KIM, A. G.; KIM, M. Y.; LEE, J. C.; NUNES,

N. J.; PAIN, R.; PENNYPACKER, C. R.; QUIMBY, R.; LIDMAN, C.; ELLIS, R. S.; IRWIN, M.; MCMAHON, R. G.; RUIZ-LAPUENTE, P.; WALTON, N.; SCHAEFER, B.; BOYLE, B. J.; FILIPPENKO, A. V.; MATHESON, T.; FRUCHTER, A. S.; PANAGIA, N.; NEWBERG, H. J. M.; COUCH, W. J.; PROJECT, T. S. C. Measurements of Omega and Lambda from 42 high-redshift supernovae. **The Astrophysical Journal**, v. 517, n. 2, p. 565–586, jun. 1999. 23

PLANCK - Home Page. 2004. Disponível em:

<http://www.rssd.esa.int/index.php?project=PLANCK>. Acesso em: 02 fev. 2004. 26

RAMOS, F.; ROSA, R.; NETO, C.; ZANANDREA, A. Generalized complex entropic form for gradient pattern analysis of spatio-temporal dynamics. **Physica A**, v. 283, n. 1-2, p. 171–174, ago. 2000. 63, 64

ROSA, R.; CAMPOS, M.; RAMOS, F.; VIJAYKUMAR, N.; FUJIWARA, S.; SATO, T. Gradient Pattern Analysis of structural dynamics: application to molecular system relaxation. **Brazilian Journal of Physics**, v. 33, n. 3, p. 605–610, set. 2003. 62, 63, 64, 65

ROSA, R.; PONTES, J.; CHRISTOV, C.; RAMOS, F.; NETO, C.; REMPEL, E.; WALGRAEF, D. Gradient Pattern Analysis of Swift-Hohenberg dynamics: phase disorder characterization. **Physica A**, v. 283, n. 1-2, p. 156–159, ago. 2000. 63, 64

ROSA, R.; SHARMA, A.; VALDIVIA, J. Characterization of asymmetric fragmentation patterns in spatially extended systems. **International Journal of Modern Physics B**, v. 10, n. 1, p. 147–163, fev. 1999. 63, 64

SMOOT, G. F.; BENNETT, C. L.; KOGUT, A.; WRIGHT, E. L.; AYMEN, J.; BOGGESS, N. W.; CHENG, E. S.; AMICI, G. de; GULKIS, S.; HAUSER, M. G.; HINSHAW, G.; JACKSON, P. D.; JANSSEN, M.; KAITA, E.; KELSALL, T.; KEEGSTRA, P.; LINEWEAVER, C.; LOEWENSTEIN, K.; LUBIN, P.; MATHER, J.; MEYER, S. S.; MOSELEY, S. H.; MURDOCK, T.; ROKKE, L.; SILVERBERG, R. F.; TENORIO, L.; WEISS, R.; WILKINSON, D. T. Structure in the COBE differential microwave radiometer first-year maps. **The Astrophysical Journal**, v. 396, n. 1, p. L1–L5, set. 1992. 20, 26

THE HEALPix Homepage. 2003. Disponível em:

<http://www.eso.org/science/healpix>. Acesso em: 02 jun. 2003. 38

TOBLER, W. Preliminary representation of world population by spherical harmonics. **Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America**, v. 89, n. 14, p. 6262–6264, jul. 1992. [69](#)

WHITE, R.; STEMWEDEL, S. W. The quadrilateralized spherical cube and quad-tree for all sky data. In: **ASP Conference Series: Astronomical Data Analysis Software and Systems I**. [S.l.]: Astronomical Society of the Pacific., 1992. v. 25, p. 379–381. ISBN 0-937707-44-9. [37](#)

## APÊNDICE A

### PROJEÇÃO MOLLWEIDE

Esta projeção foi desenvolvida por Mollweide em 1805, é conhecida também como projeção elíptica ou projeção equivalente homográfica e é do tipo pseudo-cilíndrica, ou seja, as linhas da latitude são retas paralelas e os meridianos são igualmente espaçados, mas todos os meridianos exceto o central são curvos. Na projeção Mollweide cada ponto  $(\theta, \varphi)$  da esfera é projetado no ponto  $(x, y)$  usando a transformação (MALING, 1973)

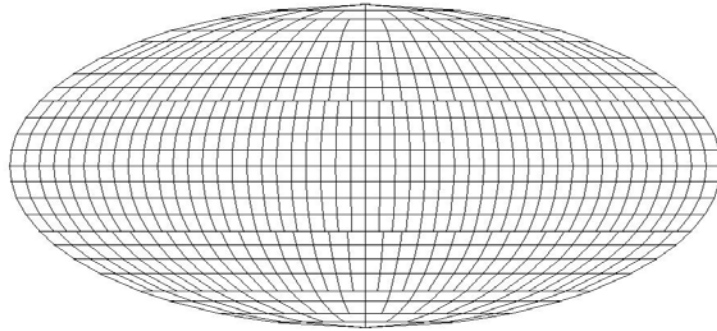
$$x = \frac{\sqrt{8}}{\pi} \varphi \cos \Psi , \quad (\text{A.1})$$

$$y = \sqrt{2} \sin \Psi , \quad (\text{A.2})$$

onde  $\Psi$  é um ângulo auxiliar obtido resolvendo a equação

$$\sin 2\Psi + 2\Psi = \pi \cos \theta . \quad (\text{A.3})$$

A Figura A mostra um exemplo da esfera pixelizada utilizando a projeção Mollweide



**FIGURA A.1** - Projeção Mollweide.

Para resolver a Equação A.3 é utilizado o método de Newton.

#### A.1 Algoritmo para Projeção Mollweide

Para o processo de construção da projeção Mollweide, é necessário fornecer para cada faixa, os limites da esquerda e direita ( $x_e$  e  $x_d$ ), os limites superior e inferior ( $y_s$



e  $y_i$ ) e  $N$  o número de pixels em cada faixa dado pela pixelização. Então, a estrutura de dados utilizada para uma faixa da projeção Mollweide é

$$FAIXAMOLL = [real, real, real, real, integer] ,$$

onde os elementos são respectivamente,  $y_s$ ,  $y_i$ ,  $x_e$ ,  $x_d$  e  $N$ . A função Moll gera a estrutura de dados utilizada na projeção Molweide. O parâmetro de entrada é o número máximo do refinamento  $m$ . A saída da função Moll é uma variável do tipo

$$PIXELSMOLL = \text{Dynamic List of } FAIXAMOLL .$$

onde o número de elementos de PIXELSMOLL é  $3 * 2^{k-1}$  com  $k$  sendo a ordem do refinamento.

O processo recursivo para construir a  $n$ -ésima faixa tem como valor inicial

$$Moll[0] = [sqrt(2), 0, 0, 0, Pix[k][1][3]] .$$

Com isso, a estrutura de dados das demais faixa é obtido da seguinte maneira

$$Moll[n] = [y_s^{(n)}, y_i^{(n+1)}, x_e^{(n)}, x_d^{(n+1)}, Pix[k][n][3]] ,$$

onde ( $x_e$  e  $x_d$ ) são obtidos a partir de (A.1) e ( $y_s$  e  $y_i$ ) de (A.2).

**function** Moll( $m$ )

**begin**

*// chamada a função de pixelização com o número máximo de refinamento*

Pix := Pixe(m);

*// variável auxiliar*

a := sqrt(8)/pi;

*// solução para calota, valor inicial de  $\psi$*

psi := pi/2-(10<sup>-1</sup>);

*// preenchendo a última posição da estrutura Moll com o valor de N (nro de divisoes em cada faixa)*

```

for  $r = 0 \dots \text{length}(\text{Pix}[m])$  do
    Moll[r][5] := Pix[m][r][3];
end

Moll[1][1] := sqrt(2);

for  $r = 1 \dots \text{length}(\text{Pix}[m])$  do
    pitheta:=pi*Pix[m][r][1];
    delta := 1; // método de newton para encontrar o melhor valor de  $\psi$ 

    while abs(delta)> (10-8) do
        delta := (sin(2*psi)+(2*psi)-pitheta)/(2*(cos(2*psi)+1));
        psi := psi - delta;
    end

    // completando a estrutura de dados Moll
    Moll[r][1] := sqrt(2)*sin(psi);
    Moll[r-1][2] := Moll[r][1];
    Moll[r][3] := a*cos(psi);
    Moll[r-1][4] := Moll[r][3];

end

Moll[r][2] := -sqrt(2); return Moll

```

## **PUBLICAÇÕES TÉCNICO-CIENTÍFICAS EDITADAS PELO INPE**

### **Teses e Dissertações (TDI)**

Teses e Dissertações apresentadas nos Cursos de Pós-Graduação do INPE.

### **Manuais Técnicos (MAN)**

São publicações de caráter técnico que incluem normas, procedimentos, instruções e orientações.

### **Notas Técnico-Científicas (NTC)**

Incluem resultados preliminares de pesquisa, descrição de equipamentos, descrição e ou documentação de programa de computador, descrição de sistemas e experimentos, apresentação de testes, dados, atlas, e documentação de projetos de engenharia.

### **Relatórios de Pesquisa (RPQ)**

Reportam resultados ou progressos de pesquisas tanto de natureza técnica quanto científica, cujo nível seja compatível com o de uma publicação em periódico nacional ou internacional.

### **Propostas e Relatórios de Projetos (PRP)**

São propostas de projetos técnico-científicos e relatórios de acompanhamento de projetos, atividades e convênios.

### **Publicações Didáticas (PUD)**

Incluem apostilas, notas de aula e manuais didáticos.

### **Publicações Seriadas**

São os seriados técnico-científicos: boletins, periódicos, anuários e anais de eventos (simpósios e congressos). Constam destas publicações o Internacional Standard Serial Number (ISSN), que é um código único e definitivo para identificação de títulos de seriados.

### **Programas de Computador (PDC)**

São a seqüência de instruções ou códigos, expressos em uma linguagem de programação compilada ou interpretada, a ser executada por um computador para alcançar um determinado objetivo. São aceitos tanto programas fonte quanto executáveis.

### **Pré-publicações (PRE)**

Todos os artigos publicados em periódicos, anais e como capítulos de livros.