

# Encontrando Pontos Fixos e Órbitas Periódicas em Sistemas Caóticos

Bruno A. F. Roth

Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais,  
Laboratório de Integração e Testes,  
Av. dos Astronautas, 1758. S.J.C. , SP,  
C.P. 515, 12227-010, Brasil.  
roth@lit.inpe.br

Elbert E. N. Macau

Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais,  
Laboratório de Integração e Testes,  
Av. dos Astronautas, 1758. S.J.C. , SP,  
C.P. 515, 12227-010, Brasil.  
elbert@lit.inpe.br

Maisa O. Terra

Instituto Tecnológico de Aeronáutica,  
Divisão de Ensino Fundamental,  
Praça Marechal Eduardo Gomes, 50. S.J.C.  
SP, 12228-900, Brasil.  
maisa@ief.ita.br

## Resumo

A determinação de órbitas periódicas de sistemas caóticos é de fundamental importância para a caracterização de sistemas dinâmicos. Quantidades que caracterizam o movimento caótico, tais como, dimensões, expoentes de Lyapunov e entropia topológica, podem ser calculados a partir do conjunto de órbitas periódicas que está densamente presente no invariante caótico. Neste artigo, alguns métodos de determinação de pontos fixos e periódicos instáveis em sistemas dinâmicos são explorados. A eficiência e aplicabilidade desses métodos são verificados.

**Palavras chave:** caos, órbitas periódicas instáveis, sistema dinâmico não-linear.

## 1. Introdução

Em sistemas dinâmicos em regime de evolução caótica, o movimento é organizado em torno de órbitas periódicas instáveis. Estas órbitas capturam o esqueleto topológico do movimento, no sentido de que toda órbita pode ser aproximadamente reconstituída através das órbitas periódicas instáveis de curto período. Podemos calcular quantidades que caracterizam o movimento caótico, tais como dimensões, expoentes de Lyapunov, entropia topológica, seguindo as órbitas periódicas instáveis do sistema [1].

O presente trabalho tem por objetivo explorar comparativamente os dois métodos de detecção de órbitas periódicas que são considerados os mais eficientes quando se conhece a descrição matemática do sistema dinâmico. São estes métodos Schmelcher e Diakonov (SD) [8] [9] e Davidchack e Lai (DL) [3] [4]. De fato, o segundo método é, de certa forma, uma evolução do primeiro. Seus autores afirmam, inclusive, que este método é poderoso o suficiente para determinar todos as órbitas periódicas existentes no invariante caótico. Entretanto, questões fundamentais merecem ser consideradas, em especial relacionadas a eficiência, facilidade de implementação e custo computacional. Em adição, faz-se ainda necessário entender exatamente o mecanismo que intermedia a evolução de um método ao outro.

A determinação das órbitas periódicas instáveis de um invariante caótico se justifica por vários motivos. No estu-

do de sistemas, frequentemente há interesse em se levantar grandezas estatísticas de longo prazo, tais como, médias, expoentes de Lyapunov, dimensões e outros invariantes, como a *medida natural* e densidade de *probabilidade*. Estas quantidades estatísticas são fisicamente significativas somente quando a medida que está sendo considerada é gerada por uma trajetória típica no espaço da fase. Esta *medida* é chamada *medida natural* [2] se é invariante em relação a evolução da dinâmica. Consequentemente, é de importância fundamental compreender e caracterizar a medida natural em termos de quantidades dinamicamente fundamentais. Não há nada mais fundamental do que expressar a medida natural em termos das órbitas periódicas embutidas no conjunto caótico invariante [5]. Uma aplicação importante da determinação de órbitas periódicas instáveis está no controle de caos [6], onde este é o passo essencial. Por estas razões muita atenção vem sendo dada a procura de métodos de detecção das órbitas periódicas instáveis nos modelos teóricos e dados experimentais.

Este trabalho se divide como se segue. Na seção seguinte, faremos a descrição do método *Schmelcher e Diakonov (SD)*. Na seção 3, enfocaremos o método *Davidchack e Lai (DL)*. Na seção 4 apresentaremos os resultados que fundamentam a comparação entre os métodos.

## 2. Método de Schmelcher e Diakonov (SD)

A idéia básica deste método consiste em partir do sistema dinâmico discreto N-dimensional em regime caótico e através de transformações lineares apropriadas, obter um sistema dinâmico transformado, tal que todos pontos fixos deste novo sistema sejam os mesmos do sistema original e com as mesmas localizações no espaço de fase. Entretanto as transformações lineares, apropriadamente escolhidas, mudam a estabilidade dos pontos fixos e órbitas periódicas, de tal forma que ao invés de instáveis, como no sistema original, passam a ser estáveis na nova dinâmica, sendo diferentes transformações lineares responsáveis pela estabilidade de diferentes conjuntos de pontos.

Vamos considerar um sistema dinâmico discreto comple-

tamente caótico  $N$ -dimensional dado por

$$U : \vec{r}_i + 1 = \vec{f}(\vec{r}_i). \quad (1)$$

Por  $U$  ser completamente caótico, ele apresenta apenas pontos fixos instáveis. Note que as órbitas periódicas de período  $p$  correspondem a termos  $f^p(\vec{r}_i)$  em lugar de  $f(\vec{r}_i)$  na Eq. (1) acima.

O objetivo proposto é o de construir a partir da Eq. (1) um sistema dinâmico  $S_k$  diferente contendo os mesmos pontos fixos (PF) de  $U$ . Utilizando a transformação  $L_k$  abaixo, os PF que eram instáveis passam a estáveis.

$$L_k : U \rightarrow S_k \quad (2)$$

Devido a estabilidade dos pontos fixos no sistema dissipativo  $S_k$ , toda trajetória de  $S_k$  depois de algumas iterações dirige-se para um ponto fixo  $\vec{r}_F$ , ou sai dos limites do invariante caótico do sistema original  $U$ . Por construção  $\vec{r}_F$  também é um ponto fixo do sistema  $U$ . Para cumprir a correspondência um a um entre os pontos fixos de  $U$  e  $S_k$ , a transformação  $L_k$  deve em geral ser linear. Portanto:

$$S_k : \vec{r}_{i+1} = \vec{r}_i + \Lambda_k(\vec{f}(\vec{r}_i) - \vec{r}_i), \quad (3)$$

onde  $\Lambda_k$  é uma matriz  $N \times N$  constante inversível. Reescrevemos  $\Lambda_k = \lambda C_k$ , tal que  $\lambda$  seja um parâmetro real,  $1 \gg \lambda > 0$ , e  $C_k$  matrizes ortogonais cujos elementos são apenas  $\{-1, 0, 1\}$ . O número destas matrizes é dado por  $2^n n!$ .

O método acima envolve o parâmetro  $\lambda$  que deve ser suficientemente pequeno a fim transformar pontos fixos instáveis, do sistema caótico original, para estáveis através das transformações  $L_k$ . Quanto maior for o período a ser encontrado menor deverá ser o parâmetro  $\lambda$ . Entretanto, o parâmetro não pode ser muito pequeno, pois a convergência na iteração das leis dinâmicas transformadas será muito lenta.

Há uma maneira simples de evitar o ajuste do parâmetro  $\lambda$ , tomando-se o limite  $\lambda \rightarrow 0$  o que nos leva a

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{(\vec{r}_{i+1} - \vec{r}_i)}{\lambda} = \dot{\vec{r}} = C_k(\vec{f}(\vec{r}_i) - \vec{r}_i). \quad (4)$$

Esta equação representa a formulação contínua da transformação do sistema dinâmico discreto Eq. (3).

As soluções da Eq. (4) não dependem do parâmetro  $\lambda$ , podendo ser facilmente resolvido usando um integrador de equações diferenciais ordinárias (ex: Runge-Kutta [7]).

Na preposição de (SD) as sementes (condições iniciais) para a formulação contínua devem ser obtidas ou pela determinação de uma grade sobre o atrator caótico ou por pontos aleatórios pertencentes a um certo limite do espaço de fase contendo o invariante caótico de interesse. A evolução temporal destas sementes para cada uma das matrizes  $C_k$  pode ou levar as proximidades da solução do ponto fixo ou pode divergir, saindo da região do espaço de fase que contém o atrator caótico.

### 3. Método de Davidchack e Lai (DL).

Este método usa um esquema iterativo baseado no método semi-implícito de Euler [7], e tem as seguintes propriedades favoráveis: Perto de um ponto da órbita periódica exibe uma convergência rápida e similar a do método tradicional de Newton-Raphson NR [7]; Quando afastado dos pontos da órbita é similar ao método do SD (Schemelcher, 1998) e, conseqüentemente, apresenta convergência.

Este método DL combina os métodos SD e NR como podemos observar na Tabela (1). Nas proximidades do ponto fixo,  $\|g(\vec{r}_i)\| = \sqrt{\sum_k (f_k^p(\vec{r}_i) - r_k)^2} \rightarrow 0$ , e a convergência quadrática do NR [7] é preservada pelo método e quando afastado do ponto fixo e valores grandes de  $\beta$ , o método preserva quase que total a propriedade de convergência global característica do SD.

**Tabela 1: Representação esquemática comparativa das prescrições dos métodos SD, NR, DL. Na primeira linha estão as prescrições originais dos métodos SD e NR. Na segunda linha, com o propósito de expressar os distintos métodos em termos de variáveis equivalentes, são apresentadas definições utilizados por DL. Nas linhas finais estão as prescrições dos três métodos, expressos de forma a facilitar análises comparativas.**

	SD	NR
<i>Original:</i>	$\mathbf{r}_{i+1} = \mathbf{r}_i + \Lambda_k(\mathbf{f}(\mathbf{r}_i) - \mathbf{r}_i)$	$\mathbf{f}(\mathbf{r}_i) - \mathbf{r}_i = -J(\mathbf{r}_i)\delta(\mathbf{r}_i)$
<i>Equivalências:</i>	$g(\mathbf{r}_i) \equiv \mathbf{f}(\mathbf{r}_i) - \mathbf{r}_i$ $\delta(\mathbf{r}_i) \equiv \mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i$ $\Lambda_k \equiv \lambda C_k$ $\frac{1}{\lambda} \equiv \beta  g(\mathbf{r}_i) $ (Definição de DL)	$g(\mathbf{r}_i) \equiv \mathbf{f}(\mathbf{r}_i) - \mathbf{r}_i$
<i>SD &amp; NR:</i>	$\boxed{\beta  g(\mathbf{r}_i)  \delta(\mathbf{r}_i)} = C_k g(\mathbf{r}_i)$	$\boxed{-C_k J(\mathbf{r}_i) \delta(\mathbf{r}_i)} = C_k g(\mathbf{r}_i)$
<i>DL:</i>	$\boxed{\beta  g(\mathbf{r}_i) } \boxed{-C_k J(\mathbf{r}_i) \delta(\mathbf{r}_i)} = C_k g(\mathbf{r}_i)$	

Resolvendo-se o sistema de equações lineares obtemos  $\delta(\vec{r})$  e iteramos nossas variáveis por  $\vec{r}_{n+1} = \vec{r}_n + \delta(\vec{r}_n)$ .

Para encontrar pontos fixos ou pontos de período 2, tanto uma grade fina de pontos definida sobre o atrator ou uma grade de pontos aleatórios contidos na região do atrator caótico podem ser utilizadas como semente para iteração do algoritmo de DL.

Para períodos  $p > 2$ , os autores deste método afirmam que os pontos periódicos de períodos inferiores a  $p$  são suficientes para iniciar a busca de pontos de órbitas de período  $p$ , o que é muito mais efetivo do que usar pontos aleatórios selecionados no espaço da fase ou no atrator. Na maio-

ria dos casos é suficiente usar apenas pontos das órbita de período  $p - 1$  a fim de detectar todas as órbitas periódicas instáveis de período  $p$ .

#### 4. Resultados

Nesta seção apresentamos resultados de nossa análise comparativa entre os dois métodos descritos. Procuramos nesta análise verificar a eficácia do método em localizar todos os pontos periódicos existentes para cada período, a precisão das respostas fornecidas, tempo de processamento, eficiência para buscas de órbitas de períodos longos e possíveis alterações e otimizações aplicáveis a cada um dos métodos. Os testes foram realizados a partir da integração numérica da descrição contínua de SD dada por

$$\vec{r}_{i+1} = C_k(\vec{f}(\vec{r}_i) - \vec{r}_i) \quad (5)$$

e pela iteração do algoritmo de DL que baseia-se na solução do sistema linear dado por

$$[\mathbf{1}\beta ||g(\vec{r}_i)|| - C_k J(\vec{r}_i)]\delta(\vec{r}_i) = C_k g(\vec{r}_i). \quad (6)$$

Ambos foram aplicados à busca de PF e soluções periódicas do Mapa de Ikeda definido por

$$f(x, y) = (A + B(x \cos(\omega) - y \sin(\omega)), B(x \sin(\omega) + y \cos(\omega))), \quad (7)$$

onde  $\omega = K - \frac{E}{1+x^2+y^2}$ ,  $(x, y)$  são as duas variáveis dinâmicas e os valores adotados para os quatro parâmetros são  $A = 1.0$ ,  $B = 0.9$ ,  $K = 0.4$  e  $E = 6.0$ .

Os parâmetros numéricos do método de SD são passo inicial do algoritmo de *Runge-Kutta* de quarta ordem de passo variável, número máximo de iterações por condição inicial, tolerância exigida e tolerância que diferencia soluções distintas. Todos fixos conforme prescrição dos autores. Já para o segundo método, utilizamos dois valores para o parâmetro  $\beta$ , valores estes definidos de acordo com o período das soluções procuradas. Por sua vez, o número máximo de iterações permitidas foi definido como função linear de  $\beta$  dada por  $100 + 2\beta$ .

Para período 1 e 2, são utilizadas 10000 condições iniciais sobre os limites do espaço de fase definidos por  $\{-1.0, 2.0; -3.0, 1.5\}$ . Obtivemos como resposta os pontos fixos da Tab. (2). Como se pode observar, com ambos os métodos encontramos os mesmos pontos fixos, porém com precisões bem distintas. Para facilitar a inspeção visual, na Tab. (2) representamos em negrito os algarismos decimais iguais entre soluções dos dois métodos.

Para busca de pontos fixos de período 3, utilizamos como semente de ambos métodos apenas as respectivas soluções de períodos 1 e 2 que cada um dos métodos forneceu. A Tab. (2) apresenta um sumário das soluções finais obtidas a partir de cada um dos dois pontos fixos de período 1 ( $p1a$  e  $p1b$ ) e

**Tabela 2:** Pontos fixos de período 1 ( $p1a, p1b$ ) e 2 ( $p2a, p2b$ ) utilizando-se  $C_1$  a  $C_8$  e  $N = 1000$  condições iniciais aleatórias sobre o atrator, onde: *ID* é o identificador do ponto, *Matriz* é a matriz que utilizada para obter a resposta e *It. Total* é o total de iterações dos métodos.

<i>Schmelcher e Diakonov</i>				
<i>ID</i>	<i>Ponto Fixo</i>	<i>Erro</i>	<i>Matriz</i>	<i>It. Total</i>
<i>p1a</i>	( <b>5,327546</b> 1567080828e-01, <b>2,4689677</b> 971143178e-01)	1,3e-08	0	1430
<i>p1b</i>	( <b>1,1142696</b> 206308961e+00, <b>-2,2856944</b> 708426469e+00)	9,8e-09	4	3381
<i>p2a</i>	( <b>5,0983725</b> 187133943e-01, <b>-6,0836992</b> 383699550e-01)	9,2e-09	0	1604
<i>p2b</i>	( <b>6,2160432</b> 660079445e-01, <b>6,0593364</b> 353714274e-01)	1,0e-08	6	1511
<i>Davidchack e Lai</i>				
<i>p1a</i>	( <b>5,3275462</b> 294079023e-01, <b>2,4689677</b> 271101312e-01)	0,0e-00	0	1474
<i>p1b</i>	( <b>1,1142696</b> 145814104e+00, <b>-2,2856944</b> 609861602e+00)	0,0e-00	1	1001
<i>p2a</i>	( <b>5,0983725</b> 038942518e-01, <b>-6,0836992</b> 864917161e-01)	1,4e-16	0	714
<i>p2b</i>	( <b>6,2160432</b> 324652726e-01, <b>6,0593364</b> 761281554e-01)	2,4e-16	2	731

dos dois pontos de período 2 ( $p2a$  e  $p2b$ ) mediante a aplicação dos métodos usando cada uma das oito matrizes  $C_k$ . Os estados finais atingidos foram: alguma solução de período 1 ou 3, divergência para fora da região do atrator caótico do Mapa do Ikeda e mesmo ponto inicial (estacionaridade observada para alguns casos de ponto fixo de período 1). Já na Fig. (3), apresentamos as trajetórias obtidas no espaço de fase  $(x, y)$ . A primeira e terceira coluna referem-se ao método de SD, enquanto a segunda e quarta ao método de DL. Diferentes matrizes  $C_k$  correspondem aos diferentes gráficos. Em cada um deles, apresentamos as trajetórias iteradas para cada uma das quatro condições iniciais utilizando-se uma das matrizes  $C_k$  conforme indicado.

#### Referências

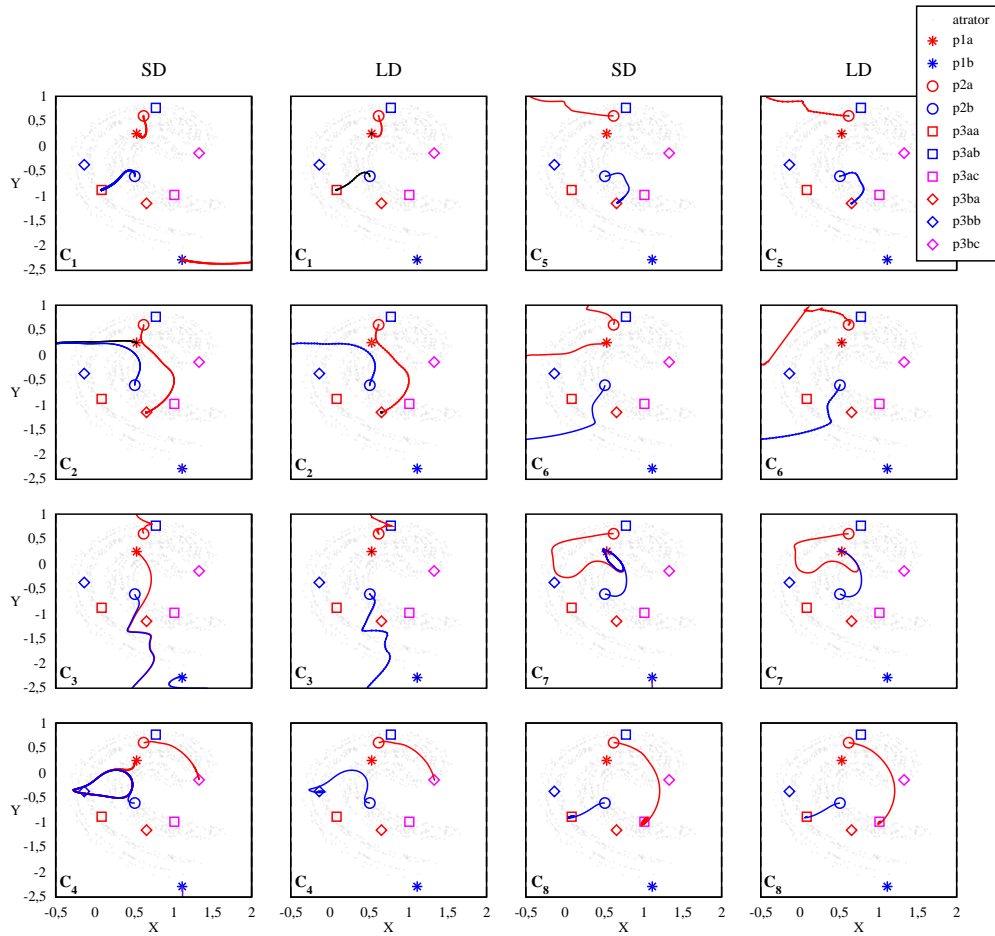
- [1] D. Auerbach, P. Cvitanovic, J. Eckmann, G. Gunaratne, I. Procaccia, Exploring Chaotic Motion Through Periodic Orbits, *Physical Review Letters*, v.58, n. 23, p. 2387-2389, Jun. 1987.
- [2] R. Bowen, D. Ruelle, *Invent. Math.*, v. 79 p. 181, 1975.
- [3] R.L. Davidchack, Y. Lai, Efficient algoritmo for detecting unstable periodic orbits in chaotic systems, *Physical Review E*, v. 60, n. 5, p. 6172-6175, Nov., 1999.
- [4] R.L. Davidchack, Y. Lai, E.M. Bollt, M. Dhamala. Estimating generating partitions of chaotic systems by

unstable periodic orbits. *Physical Review E*, v.61, n. 2, p. 1353-1356, Feb. 2000.

- [5] Y. Lai, Y. Nagai, C. Grebogi C. Characterization of the Natural Measure by Unstable Periodic Orbits in Chaotic Attractors. *Physical Review Letters*, v. 79, n. 4, p. 649-652, Jul. 1997.
- [6] E. Ott, C. Grebogi, J.A. Yorke, Controlling Chaos. *Physical Review Letters*, v. , n. 64 p. 1196, Oct. 1990.
- [7] W.H. Press, S.A. Teukolsky, *Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing*. 2.ed. Cambridge: Press Syndicate, 1992. 994 p.
- [8] P. Schmelcher, F.K. Diakonov, Detecting Unstable Periodic Orbits of Chaotic Dynamical Systems, *Physical Review Letter*, v. 78, n. 25, p.4733-4736, Jun. 1997.
- [9] P. Schmelcher, F.K. Diakonov, General approach to the localization of unstable periodic orbits in chaotic dynamical system, *Physical Review E*, v. 57, n. 3, p. 2739-2746, Mar. 1998.

**Tabela 3: Soluções finais obtidas pelas iterações dos métodos de *Schmelcher e Diakonov* e *Davidchack e Lai* utilizando-se todas matrizes  $C_k$  e partindo de pontos fixos de período 1 e 2 como condições iniciais.**

Ponto Fixo	SD								DL							
	Matrizes $C_k$															
	$d =$ divergência para fora do invariante caótico $e =$ comportamentos estáticos															
	$l =$ laços (ciclos limites)															
símbolos restantes referem-se aos rótulos adotados para cada ponto fixo (vide Figura (4))																
	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$	$C_5$	$C_6$	$C_7$	$C_8$	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$	$C_5$	$C_6$	$C_7$	$C_8$
$p1a$	e	d	d	l	e	d	e	e	e	e	e	e	e	e	e	e
$p1b$	d	e	d	d	e	e	d	e	e	e	e	e	e	e	e	e
$p2a$	1a	3ba	d	3bc	d	d	l	3ac	1a	3ba	d	3bc	d	d	1a	3ac
$p2b$	3aa	d	d	l	3ba	d	l	3aa	3aa	d	d	3bb	3ba	d	1a	3aa



**Figura 1: Trajetórias obtidas pela busca de PF de período 3 com a iteração dos dois métodos utilizando as 8 matrizes  $C_k$  e partindo de condições iniciais de período 1 e 2.**