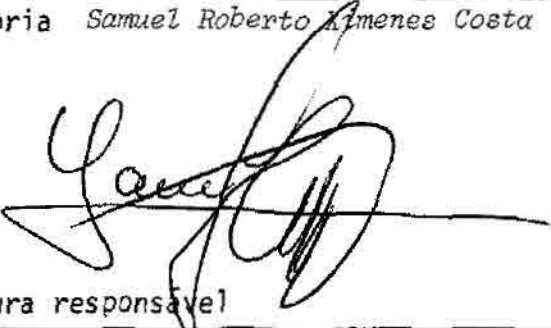

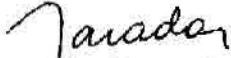
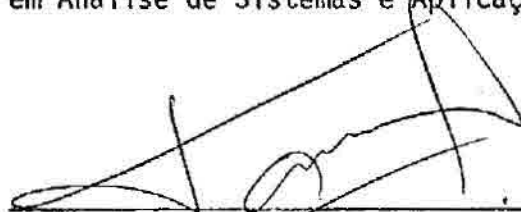


1. Publicação nº <i>INPE-3197-TDL/173</i>	2. Versão	3. Data <i>Julho, 1984</i>	5. Distribuição <input type="checkbox"/> Interna <input checked="" type="checkbox"/> Externa <input type="checkbox"/> Restrita
4. Origem <i>DRH-DIN</i>	Programa <i>FRH/ANS</i>		
6. Palavras chaves - selecionadas pelo(s) autor(es) <i>SISTEMAS DE MANUTENÇÃO</i> <span style="float:right"><i>NÚMERO VARIÁVEL DE SERVIDORES</i></span> <i>POLÍTICA ÓTIMA</i> <span style="float:right"><i>MODELOS SEMIMARKOVIANOS DE DECISÃO</i></span> <i>CUSTO MÉDIO POR UNIDADE DE TEMPO</i>			
7. C.D.U.: <i>519.874.4</i>			
8. Título <i>INPE-3197-TDL/173</i>  <i>UM PROBLEMA DE DETERMINAÇÃO DE POLÍTICA ÓTIMA PARA SISTEMAS DE MANUTENÇÃO COM MÁQUINAS DE RESERVA E NÚMERO VARIÁVEL DE SERVIDORES</i>		10. Páginas: <i>74</i>	
9. Autoria <i>Samuel Roberto Amenes Costa</i>		11. Última página: <i>A.11</i>	
Assinatura responsável 		12. Revisada por	
		13. Autorizada por  <i>Paulo Renato de Moraes</i>	
14. Resumo/Notas  <p><i>Este trabalho considera um sistema de manutenção em que o número de servidores alocados pode ser alterado tanto em instantes de chegada de máquinas como em instantes de término de reparo. O sistema de produção possui um número finito de máquinas idênticas que falham após um tempo com distribuição exponencial e um número finito de máquinas de reserva. Após a falha, a máquina quebrada é substituída por uma de reserva, se há alguma disponível, e enviada para a oficina de reparo. Esta possui um número finito de servidores independentes em disponibilidade, cada um com tempo de serviço exponencial. A estrutura de custos inclui um custo de perda de produção, um custo de espera, um custo de reparo e um custo de alteração no número de servidores alocados. Este problema de controle é representado por um modelo de decisão semimarkoviano. O critério de otimalidade considerado é o custo médio por unidade de tempo a longo prazo. Um algoritmo de iteração de políticas é usado para determinar os parâmetros da política de controle ótima dentro de uma subclasse particular da classe das políticas estacionárias. Resultados numéricos são apresentados para o caso de dois servidores disponíveis.</i></p>		13. Autorizada por  <i>Nelson de Jesus Parada</i> Diretor Geral	
15. Observações <i>Dissertação de Mestrado em Análise de Sistemas e Aplicações, aprovada em 23 de março de 1984.</i>			



Aprovada pela Banca Examinadora  
em cumprimento a requisito exigido  
para a obtenção do Título de Mestre  
em Análise de Sistemas e Aplicações

Dr. Horácio Hideki Yanasse



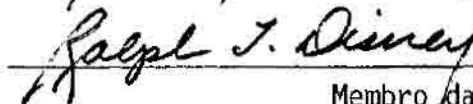
Presidente

Dr. Paulo Renato de Moraes



Orientador

Dr. Ralph L. Disney



Membro da Banca  
-convidado-

Dr. Michal Gartenkraut



Membro da Banca  
-convidado-

Dr. Oscar Pereira Dias



Membro da Banca

Condidato: Samuel Roberto Ximenes Costa

São José dos Campos, 23 de março de 1984



## AGRADECIMENTOS

Ao Instituto de Pesquisas Espaciais - INPE - através do Departamento de Informática pela disponibilidade de cursos, material e equipamentos.

Ao Dr. Paulo Renato de Moraes pela orientação segura que em muito facilitou a execução deste trabalho.

Aos amigos do Departamento de Informática pelo incentivo e ajuda.

Aos meus pais pelo estímulo em todos os momentos.

Aos membros da banca examinadora pelas contribuições dadas a este trabalho através das sugestões.

A todos os demais amigos que contribuíram direta ou indiretamente para a consecução deste trabalho.



### ABSTRACT

*This paper considers a maintenance system in which the number of operating servers can be adjusted both at arrival and repair completion epochs. The production system has a finite number of identical machines, each having an exponentially distributed lifetime, and a finite number of spares. After failure, a machine is replaced by a spare, if there is any available, and is sent to the repair facility. The repair facility has a finite number of independent servers available, each having a exponentially distributed service time. The cost structure includes a cost due to lost production, a holding cost, a repair cost, and a switch-over cost when the number of operating servers is adjusted. This control problem is represented by a semi-Markov decision model. The optimality criterion considered is the long-run average cost per unit time. A policy-iteration algorithm is used to compute the parameters of the optimal control policy within a particular subclass of the class of all stationary policies. Numerical results are given for the two-server case.*





## SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
LISTA DE FIGURAS .....	ia
LISTA DE TABELAS .....	xi
LISTA DE SÍMBOLOS .....	xiii
<u>CAPÍTULO 1 - PRELIMINARES</u> .....	1
1.1 - Introdução .....	1
1.2 - Organização do trabalho .....	2
1.3 - Descrição do modelo .....	3
1.4 - Revisão bibliográfica .....	8
<u>CAPÍTULO 2 - ANÁLISE DE UM SISTEMA DE MANUTENÇÃO COM M MÁQUINAS NA LINHA DE PRODUÇÃO, R MÁQUINAS DE RESERVA E C SERVIDORES</u> .....	11
2.1 - Introdução .....	11
2.2 - Resultados teóricos .....	11
2.3 - O algoritmo de iteração de políticas .....	15
<u>CAPÍTULO 3 - RESULTADOS NUMÉRICOS</u> .....	19
3.1 - Introdução .....	19
3.2 - Um exemplo de política ótima .....	19
3.3 - Resultados para $M = 3$ , $R = 1$ e $C = 2$ .....	25
3.4 - Comparação dos resultados deste trabalho com os do modelo de duas taxas de reparo .....	33
3.5 - Resultados para $M = 3$ , $R = 2$ e $C = 2$ .....	38
<u>CAPÍTULO 4 - COMENTÁRIOS FINAIS</u> .....	45
4.1 - Conclusões .....	45
4.2 - Sugestões para estudos futuros .....	45
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	49
APÊNDICE A - LISTAGEM DO PROGRAMA	



## LISTA DE FIGURAS

	<u>Pág.</u>
1.1 - Sistema de Manutenção .....	3
1.2 - Instantes de observação do sistema .....	5
3.1 - Mudanças de estado possíveis .....	26
3.2 - Mudanças de estado possíveis .....	39



## LISTA DE TABELAS

	<u>Pág.</u>
3.1 - Testes de coerência - Políticas iniciais distintas .....	28
3.2 - Variação da política ótima em função do custo de espera na fila de reparo, H .....	29
3.3 - Número de servidores alocados para uma simulação do tamanho da fila de reparo .....	30
3.4 - Variação da política ótima em função do custo de reparo, W .....	30
3.5 - Número de servidores alocados para uma simulação do tamanho da fila de reparo .....	31
3.6 - Variação da política ótima em função do custo de alocação de servidores, K .....	32
3.7 - Número de servidores alocados para uma simulação do tamanho de fila de reparo .....	32
3.8 - Variação do número de máquinas de reserva (R) .....	33
3.9 - Comparação entre o modelo de duas taxas e o modelo de dois servidores .....	36
3.10- Comparação entre o modelo de duas taxas e o modelo de dois servidores .....	37
3.11- Comparação entre o modelo de duas taxas e o modelo de dois servidores .....	38
3.12- Testes de coerência - Políticas iniciais distintas .....	41
3.13- Efeito da variação do custo de espera na fila, H, na política ótima .....	42
3.14- Número de servidores alocados para uma simulação do tamanho da fila de reparo .....	42
3.15- Efeito da variação do custo de reparo, W, na política ótima .....	43
3.16- Número de servidores alocados para uma simulação do tamanho da fila de reparo .....	43
3.17- Efeito da variação dos custos de alocação, $K^-$ e $K^+$ , na política ótima .....	44
3.18- Número de servidores alocados para uma simulação do tamanho da fila de reparo .....	44



## LISTA DE SÍMBOLOS

- a - Ação a ser tomada pelo decisor.
- A - Espaço de ações do sistema.
- C - Número disponível de servidores.
- $c(i,s,a)$  - Custo esperado incorrido até o próximo instante de decisão, dado que o sistema está no estado  $(i,s)$  e a ação tomada é  $a$ .
- CP - Custo de perda de produção por máquina e por unidade de tempo.
- $f(i,s)$  - Ação a ser tomada no estado  $(i,s)$  quando a política  $f$  está sendo utilizada.
- $F_0$  - Classe de políticas admissíveis.
- g - Custo médio por unidade de tempo a longo prazo.
- H - Custo de espera na fila de reparo por máquina e por unidade de tempo.
- i - Tamanho da fila de reparo.
- I - Espaço de estados do sistema.
- $K(a,b)$  - Custo de alocação quando o número de servidores alocados é ajustado de  $a$  para  $b$ .
- M - Número de máquinas na linha de produção.
- $P(i,s;j,a)$  - Probabilidade de que no próximo instante de decisão o estado do sistema seja  $(j,a)$ , dado que está no estado  $(i,s)$  e a ação  $a$  é tomada.
- R - Número de máquinas de reserva.
- s - Número de servidores alocados.
- Número de servidores a serem alocados no instante de decisão .

- $s(i)$  ]  
 $S(i)$  ] - Parâmetros que definem os níveis da política em função  
 $T(i)$  ] do tamanho da fila de reparo  $i$ .  
 $t(i)$  ]
- $TP(i,s,a,f)$  - Quantidade de melhoria da política.
- $T(i,s,f)$  - Tempo esperado de transição até o próximo instante de decisão, dado que o sistema está no estado  $(i,s)$  e é tomada a ação  $a$ .
- $w(i,s,a)$  - Custo relativo.
- $W$  - Custo de reparo por servidor alocado por unidade de tempo.
- $\lambda$  - Parâmetro da distribuição exponencial do tempo entre quebras de máquina.
- $\mu$  - Parâmetro da distribuição exponencial do tempo de reparo.



## CAPÍTULO 1

### PRELIMINARES

#### 1.1 - INTRODUÇÃO

Este trabalho estuda um sistema de manutenção onde se controla o número de servidores com o objetivo de minimizar o custo médio por unidade de tempo do sistema a longo prazo.

A situação analisada aqui considera que as máquinas que compõem a linha de produção estão sujeitas a quebra, o que ocasiona uma perda de produção. Com o objetivo de diminuir esta perda, máquinas de reserva podem substituir as quebradas, que vão para a oficina de reparo.

A oficina de reparo dispõe de um número finito de servidores que pode variar em função do número de máquinas quebradas e do número de servidores já alocados, isto é, o decisor (gerente de manutenção, chefe da oficina de reparo, etc.) designa o número conveniente de servidores para o atendimento das máquinas quebradas.

A medida que máquinas quebradas chegam ao sistema de manutenção, passam a integrar uma fila de reparo e incorrer num custo de espera nesta fila e num custo de perda de produção caso o número de máquinas quebradas seja maior do que o número de máquinas de reserva.

Por outro lado, a medida que servidores são alocados, a oficina de reparo incorre em um custo de alocação e em um custo de reparo.

Este trabalho visa fornecer ao decisor um conjunto de ações (decisões) que minimize o custo médio por unidade de tempo do sistema a longo prazo.

Um outro objetivo importante deste trabalho é possibilitar uma comparação com o modelo de controle adotado por Vakulathil (1983) para tratar este mesmo problema. No modelo adotado por Vakulathil, o controle é efetuado sobre a taxa de reparo, isto é, as ações referem-se à velocidade em que o servidor deve trabalhar.

## 1.2 - ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

Na próxima seção descreve-se de maneira detalhada o modelo adotado neste trabalho.

Na Seção 1.4 apresenta-se uma revisão bibliográfica que enfoca trabalhos que precederam este estudo e que a ele estão relacionados.

No Capítulo 2 realiza-se uma análise de um sistema de manutenção com  $M$  máquinas na linha de produção,  $R$  máquinas de reserva e  $C$  servidores disponíveis no sistema de manutenção. Na Seção 2.2 calculam-se as probabilidades de transição e os tempos e custos esperados entre transições e apresentam-se os resultados obtidos por Tijms (1980), os quais são utilizados neste trabalho. Na Seção 2.4 apresenta-se o algoritmo de iteração de políticas, que é uma adaptação do proposto por Tijms (1980).

No Capítulo 3 apresentam-se alguns resultados numéricos. Na Seção 3.2 mostra-se um exemplo detalhado de como se obtém uma política ótima. Na Seção 3.3 apresentam-se testes de coerência do algoritmo para o caso de três máquinas na linha de produção, uma máquina de reserva e dois servidores disponíveis. Na Seção 3.4 apresentam-se os resultados da comparação entre o modelo adotado por Vakulathil (1983) e o modelo adotado neste trabalho para o caso da Seção 3.3. Na Seção 3.5 apresentam-se os testes de coerência do algoritmo para o caso de três máquinas na linha de produção, duas máquinas de reserva e dois servidores disponíveis.

No Capítulo 4 apresentam-se os comentários finais, en focando principalmente a comparação entre o modelo de vários servidos e o de várias taxas de reparo.

No Apêndice A apresenta-se o programa computacional implementado com o algoritmo de iteração de políticas, bem como instruções para sua utilização.

### 1.3 - DESCRIÇÃO DO MODELO

O sistema de manutenção enfocado neste trabalho é constituído por dois subsistemas: o subsistema produtivo e o subsistema de reparo (Figura 1.1).

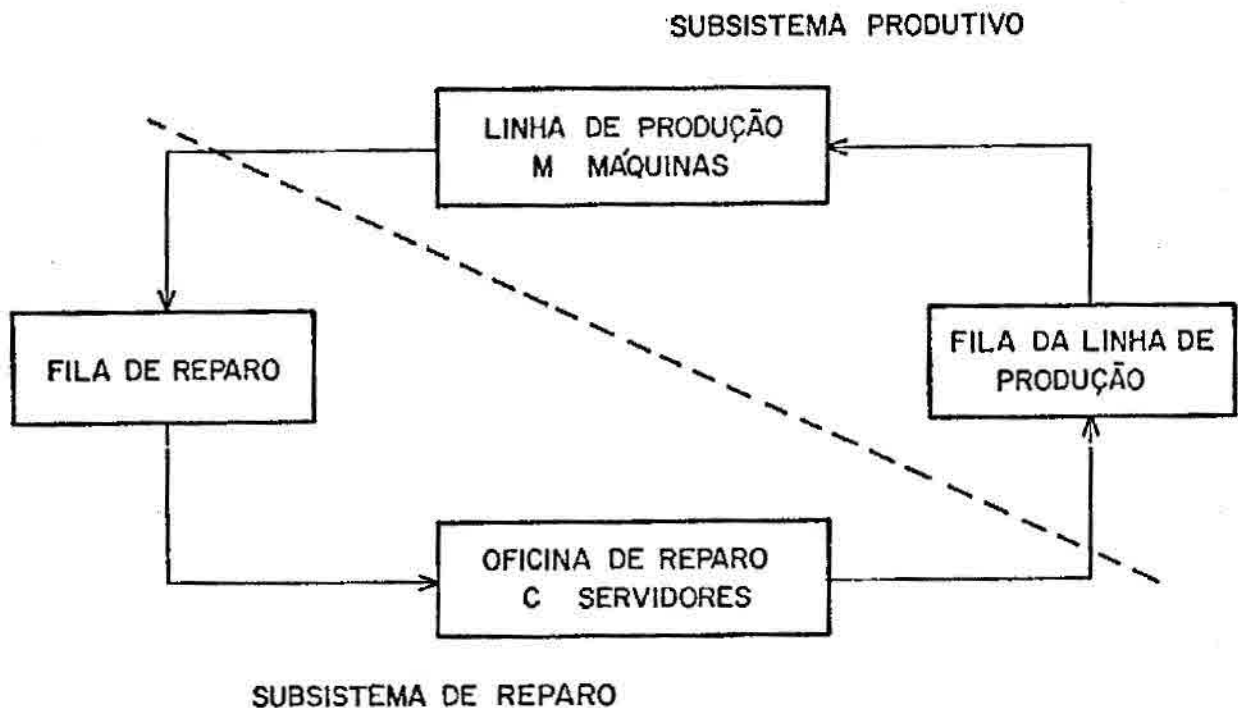


Fig. 1.1 - Sistema de manutenção.

O subsistema produtivo é composto por  $M+R$  máquinas idênticas -  $M$  máquinas na linha de produção e  $R$  máquinas de reserva - e por uma fila da linha de produção. Os intervalos entre quebras de cada máquina são independentes e identicamente distribuídos com distribuição exponencial com tempo médio entre falhas igual a  $1/\lambda$ . As máquinas de reserva não falham enquanto não entrarem na linha de produção. A linha de produção continuará a operar com menos de  $M$  máquinas se houver pelo menos uma máquina em boas condições.

Quando ocorre a quebra de uma máquina, esta é enviada para o subsistema de reparo e é substituída por uma das máquinas de reserva.

O subsistema de reparo é composto por uma oficina de reparo (que pode conter no máximo  $C$  servidores) e por uma fila de reparo. Cada máquina quebrada é atendida por um único servidor; os tempos de reparo de cada máquina pelos servidores são independentes e identicamente distribuídos com distribuição exponencial com tempo médio de reparo igual a  $1/\mu$ , e são independentes dos intervalos entre quebras. Não há prioridade de atendimento e utiliza-se a disciplina "FIFO" (a primeira a chegar é a primeira a ser atendida).

O estado do sistema é definido por um par de valores  $(i,s)$  que são o número de máquinas na fila de reparo e o número de servidores alocados, respectivamente. Este estado é observado sempre que ocorre uma quebra de máquina ou um término de reparo. Neste último caso a máquina consertada é enviada para o subsistema de produção, entrando ou não imediatamente em ação, dependendo de a linha de produção estar incompleta ou não. A Figura 1.2 mostra um gráfico do número de máquinas quebradas em função do tempo e os instantes em que o sistema é observado, isto é, os instantes de término de reparo e de quebra de máquina.

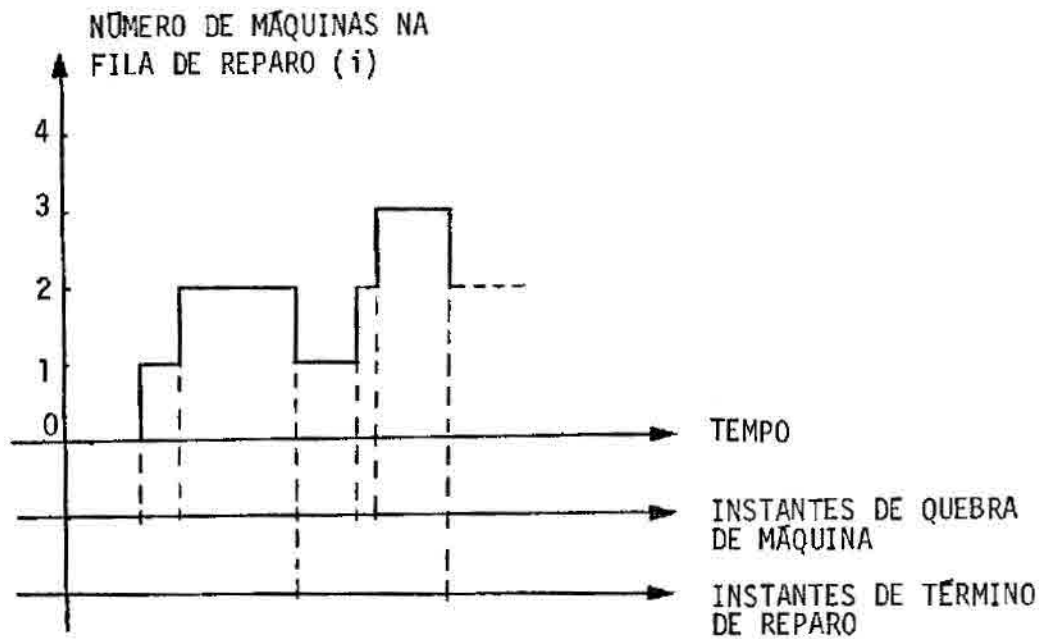


Fig. 1.2 - Instantes de observação do sistema.

Observado o estado do sistema, uma ação deve ser tomada. Esta ação pode ser aumentar, manter ou diminuir o número de servidores alocados na tarefa de reparar as máquinas. Para cada estado do sistema uma ação deve ser adotada; o conjunto destas ações constitui uma política de manutenção.

A estrutura de custos inclui um custo de perda de produção  $CP > 0$  por máquina em falta na linha de produção por unidade de tempo, um custo de espera na fila de reparo de  $H > 0$  por máquina por unidade de tempo, um custo de reparo de  $W > 0$  por servidor alocado por unidade de tempo e um custo de alocação de  $K(a,b)$  quando o número de servidores alocados é ajustado de  $a$  para  $b$ , onde

$$K(a,a) = 0$$

e

$$K(a,b) = \begin{cases} k^+ + K^+ (b-a) & \text{para } b > a, \\ k^- + K^- (a-b) & \text{para } b < a, \end{cases}$$

com  $k^-, k^+, K^-, K^+ \geq 0$ .

Este problema de controle pode ser representado por um modelo de decisão semimarkoviano no qual os instantes de decisão são os instantes de quebra de máquinas e de término de reparo.

Em qualquer instante de decisão o sistema pode ser classificado em um dos estados do espaço de estados finito:

$$I = \{(i,s) \mid i = 0,1, \dots (M+R); s=0,1, \dots C\},$$

onde o estado  $(i,s)$  corresponde à situação em que  $i$  máquinas estão na fila de reparo e  $s$  servidores estão alocados. Para qualquer estado  $(i,s) \in I$  o conjunto das possíveis ações é  $A = \{0,1, \dots C\}$ , onde a ação  $a \in A$  significa ajustar o número de servidores alocados para  $a$ . A seguir define-se a classe de políticas admissíveis.

Define-se uma política estacionária denotada por  $f$  como uma regra de controle que sempre escolhe a ação  $f(i,s) \in A$  quando o estado do sistema é  $(i,s) \in I$ . A classe das políticas admissíveis denotada por  $F_0$  é um subconjunto do conjunto das políticas estacionárias que tem a seguinte forma simples: caracteriza-se qualquer política admissível  $f \in F$  por números inteiros  $s(i)$ ,  $S(i)$ ,  $T(i)$  e  $t(i)$  para  $i = 0,1, \dots$ , de modo que:

a)  $-1 \leq s(i) < S(i) \leq T(i) < t(i) \leq C+1$  para  $i \geq 0$ ,  
 onde  $s(M+R) = C-1$  e  $t(M+R) = C+1$ ;

b)  $s(i) \leq s(i+1)$  e  $t(i) \leq t(i+1)$  para  $i \geq 0$ .

Se num instante de decisão existem  $i$  máquinas na fila de reparo e  $s$  servidores alocados, então sob esta política  $f = (s(i), S(i), T(i), t(i))$  ajusta-se o número de servidores para cima para o valor  $S(i)$  quando  $s \leq s(i)$ , o qual é mantido inalterado quando  $s(i) < s < t(i)$  e ajustado para baixo para o valor  $T(i)$  quando  $s \geq t(i)$ . Observe que sob qualquer política da classe  $F_0$  todos os  $C$  servidores são alocados ou permanecem alocados quando  $M+R$  máquinas estão na fila de reparo.

Para melhor visualização de como se determina a ação a ser tomada sob uma dada política desta classe, considere a política abaixo, para o caso em que  $M = 2$ ,  $R = 1$  e  $C = 2$ :

$i$	$s(i)$	$S(i)$	$T(i)$	$t(i)$
0	-1	0	0	1
1	0	1	1	2
2	0	1	2	3
3	1	2	2	3

Se o estado do sistema é  $(i, s) = (2, 1)$ , tem-se que:  $s(2) = 0$ ,  $S(2) = 1$ ,  $T(2) = 2$  e  $t(2) = 3$  e toma-se a ação  $a = 1$ , ou seja, mantém-se inalterado o número de servidores. Se o estado do sistema é  $(i, s) = (3, 0)$ , tem-se que:  $s(3) = 1$ ,  $S(3) = 2$ ,  $T(3) = 2$ ,  $t(3) = 3$  e toma-se a ação  $a = 2$ , ou seja, aumenta-se o número de servidores de zero para 2.

O interesse deste trabalho é calcular uma política admissível ótima com custo médio mínimo por unidade de tempo dentro da classe  $F_0$ . Isso é feito através de um algoritmo de iteração de políticas cuja descrição encontra-se no capítulo seguinte.

#### 1.4 - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Muitos estudos têm sido realizados na área de sistemas de filas e alguns deles aplicados a sistemas de manutenção. Em sistemas de filas admite-se que cada chegada ocorre a partir de uma população infinita e pode ou não haver um limite no número de clientes esperando para serem atendidos. Estes sistemas permitem ainda considerar um número infinito de servidores no centro de atendimento. No caso de sistemas de manutenção, admite-se que a população da qual as chegadas provêm é finita; então a probabilidade de ocorrência de chegadas é função do comportamento passado de tal sistema.

Para um resumo de trabalhos sobre controle de filas, ver Crabill et alii (1977) e Costa (1983). O trabalho aqui desenvolvido baseia-se em Tijms (1980), que analisou um sistema de filas com número variável de servidores. A decisão quanto ao número de servidores a serem alocados baseia-se no tamanho da fila e no número de servidores que estavam alocados. A política de alteração do número de servidores considerada por Tijms caracteriza-se por quatro níveis:  $s(i)$ ,  $S(i)$ ,  $T(i)$  e  $t(i)$ . Se num instante de decisão existem  $i$  máquinas na fila e  $s$  servidores alocados (o estado do sistema é  $(i,s)$ ), então sob esta política  $f = (s(i), S(i), T(i), t(i))$  ajusta-se o número de servidores alocados para  $S(i)$  quando  $s \leq s(i)$ , o qual é mantido inalterado quando  $s(i) < s < t(i)$  e ajustado para  $T(i)$  quando  $s \geq t(i)$ . A estrutura de custos do sistema de filas analisado por Tijms, contém um custo de espera na fila, um custo de reparo e um custo de ajuste no número de servidores alocados. Dentro destas especificações Tijms analisou um sistema de filas M/M/C. Ele desenvolveu um algoritmo de iteração de política para computar os valores ótimos  $s^*(i)$ ,  $S^*(i)$ ,  $T^*(i)$  e  $t^*(i)$  que minimizam o custo médio por unidade de tempo do sistema a longo prazo.

Com relação a sistemas de manutenção, destacam-se os seguintes trabalhos.



Crabill (1974) estudou um sistema de manutenção com um estoque de segurança de máquinas. Em seu modelo de taxa de reparo variável, Crabill considerou M+R máquinas e uma estrutura de custos que contava com um custo por unidade de tempo de operar o sistema com determinada taxa de reparo e com um custo de perda de produção. Usando a Teoria de Decisão Markoviana, Crabill apresentou condições suficientes para a exclusão de algumas taxas de reparo que não são ações ótimas para alguns estados. Além disso, apresentou condições suficientes que asseguram que a taxa de reparo ótima é uma função não-crescente do estado do sistema.

Winston (1977) analisou o controle de um sistema de manutenção com um estoque de segurança de máquinas. A oficina de reparo com um único servidor pode usar diferentes taxas de serviço. Ele deduziu condições que asseguram que, para um sistema de manutenção em tempo discreto, a taxa de serviço ótima é uma função não-crescente do número de máquinas em boas condições. Considerando um sistema de manutenção em tempo contínuo como o limite de uma sequência de sistemas de manutenção em tempo discreto, ele deduziu condições análogas que asseguram que a taxa de reparo ótima é uma função não-crescente do número de máquinas em boas condições.

Recentemente Vakulathil (1983) estudou um sistema de manutenção com taxa de reparo variável, em função do tamanho da fila na oficina de reparo, e com custo de troca da taxa de reparo. Neste estudo considerou-se uma oficina de reparo com um único servidor, onde as máquinas quebradas chegam de uma linha de produção com M máquinas idênticas e independentes e com uma máquina de reserva. A distribuição do tempo de quebra das máquinas é exponencial, com parâmetro  $\lambda$ . Repara-se cada máquina usando uma das duas taxas de reparo disponíveis. Em qualquer instante de término de reparo, uma das duas taxas de reparo tem de ser escolhida para ser utilizada no próximo reparo. Admitiu-se que o tempo de reparo de cada máquina tem uma função de distribuição geral  $F_k$ , com média  $1/\mu_k$ ,  $k = 1,2$ . Vakulathil adotou uma estrutura de custos que contém um custo de reparo, um custo de espe

ra na fila de reparo e um custo de troca da taxa de reparo. Para cálculo da política de operação do sistema de manutenção acima descrito, adaptou-se um algoritmo de iteração de políticas desenvolvido por Tijms (1980).

## CAPÍTULO 2

### ANÁLISE DE UM SISTEMA DE MANUTENÇÃO COM M MÁQUINAS NA LINHA DE PRODUÇÃO, R MÁQUINAS DE RESERVA E C SERVIDORES

#### 2.1 - INTRODUÇÃO

Os objetivos deste capítulo são: apresentar as expressões para o cálculo das probabilidades de transição e dos tempos e custos esperados entre transições; apresentar os resultados teóricos obtidos por Tijms (1980), que são utilizados na elaboração de um algoritmo de iteração de políticas; e finalmente apresentar o algoritmo utilizado.

Considera-se um sistema de manutenção geral que possui M máquinas na linha de produção, R máquinas de reserva e C servidores disponíveis na oficina de reparo.

#### 2.2 - RESULTADOS TEÓRICOS

Nesta seção o objetivo é obter as expressões para o cálculo das probabilidades de transição e dos tempos e custos esperados entre transições, bem como apresentar os resultados obtidos por Tijms (1980), que são utilizados na elaboração de um algoritmo de iteração de políticas.

Dado que no instante zero o sistema está no estado  $(i,s) \in I$  e adota-se a ação  $a \in A$ , definem-se as seguintes quantidades:

$P(i,s;j,a)$  = probabilidade de que no próximo instante de decisão o estado do sistema seja  $(j,a)$ .

$T(i,s,a)$  = tempo esperado de transição até o próximo instante de decisão.

$c(i,s,a)$  = custo esperado incorrido até o próximo instante de decisão.

Primeiramente deduzem-se as expressões para o cálculo das probabilidades de transição.

Em determinado momento em que uma máquina quebra ou termina um reparo, observa-se o estado do sistema; seja  $(i,s)$  o estado nesse instante. Se  $i < R$  e adota-se a decisão  $a \leq i$  significa que existem  $M$  máquinas na linha de produção e todos os  $a$  servidores alocados estão trabalhando. Então a probabilidade de que no próximo instante de decisão o estado seja  $(i-1,a)$  é a probabilidade de que ocorra um término de reparo antes que quebre uma máquina. Assim:

$$P(i,s;i-1,a) = \Pr[\min(T_1, T_2, \dots, T_a) < \min(Q_1, Q_2, \dots, Q_M)] ,$$

onde  $T_k$  representa o tempo de reparo do  $R$ -ésimo servidor,  $k=1,2,\dots$ ,  $a$  e  $Q_k$  representa o intervalo entre quebras da  $R$ -ésima máquina  $k=1, 2, \dots, M$ . Tem-se que o mínimo entre  $n$  variáveis aleatórias independentes com distribuição exponencial e parâmetro  $\lambda$  tem uma distribuição exponencial com parâmetro  $n\lambda$ . Assim:

$$Q_{\min} = \min(Q_1, Q_2, \dots, Q_M) \sim \text{Exp}(M\lambda),$$

$$T_{\min} = \min(T_1, T_2, \dots, T_a) \sim \text{Exp}(a\mu).$$

Finalmente:

$$\begin{aligned} P(i,s;i-1,a) &= \Pr(T_{\min} < Q_{\min}) \\ &= 1 - \Pr(T_{\min} \geq Q_{\min}) \\ &= 1 - \int_0^{\infty} \Pr(T_{\min} > Q_{\min} | Q_{\min} = y) M\lambda e^{-M\lambda y} dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 1 - \int_0^{\infty} P(T_{\min} > y) M\lambda e^{-M\lambda y} dy \\
 &= 1 - \int_0^{\infty} e^{-a\mu y} M\lambda e^{-M\lambda y} dy \\
 &= 1 - M\lambda / (a\mu + M\lambda) \\
 &= a\mu / (a\mu + M\lambda), \quad \text{se } i \leq R \text{ e } a \leq i.
 \end{aligned}$$

Analogamente obtêm-se as seguintes probabilidades de transição:

$$P(i, s; i-1, a) = \begin{cases} i\mu / (i\mu + M\lambda), & \text{se } i \leq R \text{ e } a > i; \\ a\mu / (a\mu + (M+R-i)\lambda), & \text{se } i > R \text{ e } a \leq i; \\ i\mu / (i\mu + (M+R-i)\lambda), & \text{se } i > R \text{ e } a > i; \end{cases}$$

Notando que  $P(i, s; i+1, a) = 1 - P(i, s; i-1, a)$  e que  $P(i, s; j, a) = 0$  se  $j \neq i-1, i+1$ , verifica-se que todas as probabilidades de transição foram calculadas.

Considerem-se agora os tempos esperados entre transições. Se  $i \leq R$  e  $a \leq i$ , a próxima transição ocorre quando quebra uma das  $M$  máquinas da linha de produção ou quando um dos  $a$  servidores termina um reparo. Então a distribuição do tempo entre transições é a distribuição do mínimo entre  $M$  intervalos entre quebras e tempos de reparo. Como todas as variáveis aleatórias envolvidas têm distribuição exponencial e são independentes, essa distribuição é exponencial com parâmetro  $a\mu + M\lambda$ ; assim:

$$T(i, s, a) = 1 / (a\mu + M\lambda), \quad \text{se } i \leq R \text{ e } a \leq i.$$

Analogamente obtêm-se os demais tempos esperados entre transições:

$$T(i,s,a) = \begin{cases} 1/(i\mu + M\lambda), & \text{se } i \leq R \text{ e } a > i; \\ 1/(a\mu + (M+R-i)\lambda), & \text{se } i > R \text{ e } a \leq i; \\ 1/(i\mu + (M+R-i)\lambda), & \text{se } i > R \text{ e } a > i. \end{cases}$$

Com a estrutura de custos definida na Seção 1.3, a expressão para o cálculo do custo esperado incorrido entre transições é:

$$c(i,s,a) = \begin{cases} T(i,s,a)(Hi+Wa+ [i-R]^+ CP), & \text{se } a=s; \\ T(i,s,a)(Hi+Wa+ [i-R]^+ CP) + k^+ + K^+ (a-s), & \text{se } a>s; \\ T(i,s,a)(Hi+Wa+ [i-R]^+ CP) + k^- + K^- (s-a), & \text{se } a<s; \end{cases}$$

onde

$$[i-R]^+ = \begin{cases} i-R & \text{se } i > R, \\ 0 & \text{se } i \leq R. \end{cases}$$

Determinadas as expressões para o cálculo das probabilidades de transição e dos tempos e custos esperados entre transições, apresenta-se a seguir o teorema que fornece o resultado teórico para elaboração do algoritmo de iteração de políticas. A prova deste teorema encontra-se em Tijms (1980).

TEOREMA: Para quaisquer  $(i,s) \in I$  e  $f \in F_0$

$$w(i,s,f) = c(i,s,f(i,s)) - g(f)T(i,s,f(i,s)) + \sum_{j=0}^{M+R} P(i,s;j,f(i,s))w(j,f(i,s),f), \quad (2.1)$$

onde  $g(f)$  é o custo médio por unidade de tempo a longo prazo, sob a política  $f$ , e  $w(i,s,f)$  é a função de custo relativo.

### 2.3 - ALGORITMO DE ITERAÇÃO DE POLÍTICAS

A seguir apresenta-se o algoritmo de iteração de políticas. Este algoritmo foi desenvolvido por Tijms (1980) para sistemas de filas e adaptado neste trabalho para sistemas de manutenção.

Os parâmetros de entrada são as probabilidades de transição, os custos e tempos esperados entre transições e uma política inicial,  $f \in F_0$ , qualquer.

As adaptações foram as seguintes:

- 1) No Passo 1 o sistema de equações lineares a ser resolvido tem  $(M+R+1).(C+1)-1$  equações e  $(M+R+1).(C+1)$  incógnitas. Portanto arbitra-se uma incógnita  $w(i,s,a)$ .
- 2) No Passo 2a determinam-se os valores de  $S(i)$  e  $T(i)$  para qualquer  $i = 0, 1, \dots, (M+R-1)$ .
- 3) No Passo 2b determinam-se os valores de  $s(i)$  e  $t(i)$  para qualquer  $i = 0, 1, \dots, (M+R-1)$ .

PASSO 1: Determinação das quantidades  $s(f)$  e  $w(i,s,f)$ .

Seja  $f = (s(i), S(i), T(i), t(i)) \in F_0$  uma política inicial qualquer. Calcule as quantidades  $g(f)$  e  $w(i,s,f)$  para  $(i,s) \in I$ , resolvendo o Sistema de Equações Lineares 2.1 e arbitrando um dos  $w(i,s,f)$ .

Antes de passar ao Passo 2 define-se a seguir a quantidade de melhoria de política, que é ali utilizada. Para  $(i,s) \in I$ ,  $a \in A$  e  $f \in F_0$ , define-se:

$$TP(i,s,a,f) = c(i,s,a) - g(f)T(i,s,a) + \sum_{j=0}^{M+R} P(i,s;j,a)w(j,a,f).$$

PASSO 2 : Melhoria da política

a) Para qualquer  $i=0,1,\dots,(M+R+1)$  determine  $S'(i)$  como o menor inteiro que minimiza  $[K(0,a)+w(i,a,f)]$  para  $s(i) < a < t(i)$  e determine  $T'(i)$  como o maior inteiro que minimiza  $[K(c,a)+w(i,a,f)]$  para  $s(i) < a < t(i)$ .

b) Sucessivamente para  $i = 0,1,\dots,(M+R-1)$  determine  $s'(i)$  e  $t'(i)$  como se segue, onde se definem  $s(-1) = -1$  e  $t(-1) = 0$ . Defina  $s'(i)$  como o maior inteiro  $d$  de modo que  $s(i)+1 \leq d < \min[S'(i)-1, s(i+1)]$  e  $K(s,S'(i))+w(i,S'(i),f) < w(i,s,f)$  para todo  $s(i) < s \leq d$  se tal inteiro existir; caso contrário, faça  $s'(i)$  igual a  $\ell-1$ , onde  $\ell$  é o menor inteiro de modo que  $\min[0, s(i-1)+1] \leq \ell \leq s(i)$  e  $TP(i,s,s,f) \leq K(s,S'(i),f)$  para todo  $\ell \leq s \leq s(i)$  se tal inteiro existir; caso contrário, faça  $s'(i) = s(i)$ . Defina  $t'(i)$  como o menor inteiro  $d'$  de modo que  $\max[T'(i)+1, t(i-1)] \leq d' < t(i)$  e  $K(s,T'(i))+w(i,T'(i),f) < w(i,s,f)$  para todo  $d' \leq s < t(i)$  se tal inteiro  $d'$  existir; caso contrário, faça  $t'(i)$  igual a  $\ell'+1$ , onde  $\ell'$  é o maior inteiro de modo que  $t(i) \leq \ell' < \min[t(i+1)-1, C]$  e  $TP(i,s,s,f) \leq K(s,T'(i))+w(i,T'(i),f)$  para todo  $t(i) \leq s \leq \ell'$  se tal inteiro  $\ell'$  existir; caso contrário, faça  $t'(i) = t(i)$ .

PASSO 3: Comparação das políticas

Seja  $f' = (s'(i), S'(i), T'(i), t'(i))$ . Se  $f' = f$ , então pare; caso contrário, retorne ao Passo 1 com  $f$  substituído por  $f'$ .

Segundo Tijms, este algoritmo gera uma sequência de políticas melhoradas dentro da classe  $F_0$ , onde a questão de convergên



cia para a política ótima contudo permanece por ser resolvida. A condição de otimalidade abaixo foi fornecida por Tijms e verificada numericamente para as políticas ótimas obtidas neste trabalho.

CONDIÇÃO DE OTIMALIDADE: Se para algum  $f_0 \in F_0$ ,  $\min_{a \in A} TP(i, s, a, f_0) = w(i, s, f_0)$  para todos  $(i, s) \in I$ , então  $g(f_0) < g(f)$  para todo  $f \in F_0$ , isto é,  $f_0$  é a política de custo médio mínimo dentro da classe  $F_0$ .



## CAPÍTULO 3

### RESULTADOS NUMÉRICOS

#### 3.1 - INTRODUÇÃO

Com os resultados obtidos no capítulo anterior implementou-se um programa computacional (Apêndice A). Neste capítulo realizam-se testes de coerência do algoritmo de iteração de políticas e comparações entre os resultados obtidos neste trabalho e os obtidos com o modelo de duas taxas de reparo adotado por Vakulathil (1983).

#### 3.2 - UM EXEMPLO DE POLÍTICA ÓTIMA

Considere-se o seguinte exemplo numérico, caracterizado pelo seguinte conjunto de valores dos parâmetros:

$M = 2$ ;	$W = 100$ ;
$R = 1$ ;	$CP = 0$ ;
$C = 2$ ;	$K^+ = 50$ ;
$\mu = 5$ ;	$k^+ = 0$ ;
$\lambda = 9,5$ ;	$K^- = 50$ ;
$H = 10$ ;	$k^- = 0$ .

Admite-se a política abaixo como política inicial ( $f_1$ ):

$$\begin{aligned} s(0) &= 0, S(0) = 1, T(0) = 1, t(0) = 2; \\ s(1) &= 0, S(1) = 1, T(1) = 1, t(1) = 2; \\ s(2) &= 1, S(2) = 2, T(2) = 2, t(2) = 3; \\ s(3) &= 1, S(3) = 2, T(3) = 2, t(3) = 3. \end{aligned}$$

As probabilidades de transição são dadas abaixo:

$$\begin{aligned}P(0,1;1,1) &= 1; \\P(1,0;0,1) &= \mu/(\mu + 2\lambda) = 0,21; \\P(1,0;2,1) &= 2\lambda/(\mu + 2\lambda) = 0,79; \\P(1,1;0,1) &= \mu/(\mu + 2\lambda) = 0,21; \\P(1,1;2,1) &= 2\lambda/(\mu + 2\lambda) = 0,79; \\P(2,1;1,2) &= 2\mu/(2\mu + \lambda) = 0,51; \\P(2,1;3,2) &= \lambda/(2\mu + \lambda) = 0,49; \\P(1,2;0,1) &= \mu/(\mu + 2\lambda) = 0,21; \\P(1,2;2,1) &= 2\lambda/(\mu + 2\lambda) = 0,79; \\P(3,2;2,2) &= 1; \\P(2,2;1,2) &= 2\mu/(2\mu + \lambda) = 0,51; \\P(2,2;3,2) &= \lambda/(2\mu + \lambda) = 0,49.\end{aligned}$$

Os tempos esperados entre transições são:

$$\begin{aligned}T(0,1,1) &= 1/(2\lambda) = 0,0526; \\T(1,1,1) &= 1/(\mu + 2\lambda) = 0,0417; \\T(2,1,2) &= 1/(2\mu + \lambda) = 0,0513; \\T(1,2,1) &= 1/(\mu + 2\lambda) = 0,0417; \\T(3,2,2) &= 1/(2\mu) = 0,1000; \\T(2,2,2) &= 1/(2\mu + \lambda) = 0,0513.\end{aligned}$$

De posse destes valores, inicia-se o PASSO 1 do algoritmo resolvendo o seguinte sistema de equações lineares para determinar os valores de  $w(i,s,f)$  e  $g(f)$  para  $(i,s) \in I$  e  $f = f_1$  :

$$\begin{aligned}w(0,1,1) &= c(0,1,1) - g(1)T(0,1,1) + P(0,1;1,1)w(1,1,1); \\w(0,2,1) &= c(0,2,1) - g(1)T(0,2,1) + P(0,2;1,1)w(1,1,0); \\w(1,0,1) &= c(1,0,1) - g(1)T(1,0,1) + P(1,0;0,1)w(0,1,1) + \\&\quad P(1,0;2,1)w(2,1,1); \\w(1,1,1) &= c(1,1,1) - g(1)T(1,1,1) + P(1,1;0,1)w(0,1,1) + \\&\quad P(1,1;2,1)w(2,1,1);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}w(1,2,1) &= c(1,2,1) - g(1)T(1,2,1) + P(1,2;0,1)w(0,1,1) + \\ &\quad P(1,2;2,1)w(2,1,1); \\ w(2,0,1) &= c(2,0,2) - g(1)T(2,0,2) + P(2,0;1,2)w(1,2,1) + \\ &\quad P(2,0;3,2)w(3,2,1); \\ w(2,1,1) &= c(2,1,2) - g(1)T(2,1,2) + P(2,1;1,2)w(1,2,1) + \\ &\quad P(2,1;3,2)w(3,2,1); \\ w(2,2,1) &= c(2,2,2) - g(1)T(2,2,2) + P(2,2;1,2)w(1,2,1) + \\ &\quad P(2,2;3,2)w(3,2,1); \\ w(3,0,1) &= c(3,0,2) - g(1)T(3,0,2) + P(3,0;2,2)w(2,2,1); \\ w(3,1,1) &= c(3,1,2) - g(1)T(3,1,2) + P(3,1;2,2)w(2,2,1); \\ w(3,2,1) &= c(3,2,2) - g(1)T(3,2,2) + P(3,2;2,2)w(2,2,1).\end{aligned}$$

Dado que o sistema acima possui onze equações e doze incógnitas, faz-se  $w(0,1,1) = \text{zero}$  e obtêm-se:

$$\begin{aligned}w(0,2,1) &= 50,00; & w(2,2,1) &= 6,36; \\ w(1,0,1) &= 75,14; & w(3,0,1) &= 71,60; \\ w(1,1,1) &= 25,14; & w(3,1,1) &= 21,60; \\ w(1,2,1) &= 75,14; & w(3,2,1) &= 28,40 \\ w(2,0,1) &= 106,36; & g(1) &= 577,57. \\ w(2,1,1) &= 56,36;\end{aligned}$$

Note-se que qualquer outra das incógnitas  $w$  poderia ter sido arbitrada. Os valores relativos de  $w$  seriam alterados, mas o valor de  $g(1)$  seria o mesmo.

Em seguida executa-se o PASSO 2 para determinar uma política melhorada. O resultado é o seguinte ( $f_2$ ):

$$\begin{aligned}s(0) &= -1, S(0) = 1, T(0) = 1, t(0) = 2; \\ s(1) &= -1, S(1) = 1, T(1) = 1, t(1) = 3; \\ s(2) &= -1, S(2) = 2, T(2) = 2, t(2) = 3; \\ s(3) &= 1, S(3) = 2, T(3) = 2, t(3) = 3.\end{aligned}$$

No PASSO 3 compara-se  $f_1$  com  $f_2$ . Como são diferentes, substitui-se  $f_1$  por  $f_2$  e executa-se o PASSO 1 novamente. O novo sistema de equações fica então:

$$\begin{aligned}w(0,1,2) &= c(0,1,1)-g(2)T(0,1,1)+P(0,1;1,1)w(1,1,2); \\w(0,2,2) &= c(0,2,1)-g(2)T(0,2,1)+P(0,2;1,1)w(1,1,2); \\w(1,0,2) &= c(1,0,1)-g(2)T(1,0,1)+P(1,0;2,0)w(2,0,1); \\w(1,1,2) &= c(1,1,1)-g(2)T(1,1,1)+P(1,1;0,1)w(0,1,2)+ \\&\quad P(1,1;2,1)w(2,1,2); \\w(1,2,2) &= c(1,2,2)-g(2)T(1,2,2)+P(1,2;0,2)w(0,2,2)+ \\&\quad P(1,2;2,2)w(2,2,2); \\w(2,0,2) &= c(2,0,0)-g(2)T(2,0,0)+P(2,0;3,0)w(3,0,2); \\w(2,1,2) &= c(2,1,1)-g(2)T(2,1,1)+P(2,1;1,1)w(1,1,2)+ \\&\quad P(2,1;3,1)w(3,1,2); \\w(2,2,2) &= c(2,2,2)-g(2)T(2,2,2)+P(2,2;1,2)w(1,2,2)+ \\&\quad P(2,2;3,2)w(3,2,2); \\w(3,0,2) &= c(3,0,2)-g(2)T(3,0,2)+P(3,0;2,2)w(2,2,2); \\w(3,1,2) &= c(3,1,2)-g(2)T(3,1,2)+P(3,1;2,2)w(2,2,2); \\w(3,2,2) &= c(3,2,2)-g(2)T(3,2,2)+P(3,2;2,2)w(2,2,2); \end{aligned}$$

que, resolvido, leva aos seguintes valores:

$$\begin{aligned}w(0,1,2) &= 0; & w(2,1,2) &= 19,77; \\w(0,2,2) &= 50,00; & w(2,2,2) &= -4,68; \\w(1,0,2) &= 51,22; & w(3,0,2) &= 91,28; \\w(1,1,2) &= 8,97; & w(3,1,2) &= 41,28; \\w(1,2,2) &= 4,20; & w(3,2,2) &= -8,72; \\w(2,0,2) &= 64,93; & g(2) &= 270,39. \end{aligned}$$

Com estes novos valores para  $g(f)$  e  $w(i,s,f)$  executa-se o PASSO 2, que resulta na política ( $f_3$ ):

$$s(0) = -1, S(0) = 0, T(0) = 1, t(0) = 3;$$

$$s(1) = -1, S(1) = 0, T(1) = 2, t(1) = 3;$$

$$s(2) = -1, S(2) = 0, T(2) = 2, t(2) = 3;$$

$$s(3) = 1, S(3) = 2, T(3) = 2, t(3) = 3.$$

que é diferente de  $f_2$  (PASSO 3). Logo, substitui-se  $f_2$  por  $f_3$  e executa-se o PASSO 1 novamente. O novo sistema de equações é:

$$w(0,1,3) = c(0,1,1) - g(3)T(0,1,1) + P(0,1;1,1)w(1,1,1);$$

$$w(0,2,3) = c(0,2,2) - g(3)T(0,2,2) + P(0,2;1,2)w(1,2,3);$$

$$w(1,0,3) = c(1,0,0) - g(3)T(1,0,0) + P(1,0;2,0)w(2,0,3);$$

$$w(1,1,3) = c(1,1,1) - g(3)T(1,1,1) + P(1,1;0,1)w(0,1,3) + P(1,1;2,1)w(2,1,1);$$

$$w(1,2,3) = c(1,2,2) - g(3)T(1,2,2) + P(1,2;0,2)w(0,2,3) + P(1,2;2,2)w(2,2,3);$$

$$w(2,0,3) = c(2,0,0) - g(3)T(2,0,0) + P(2,0;3,0)w(3,0,3);$$

$$w(2,1,3) = c(2,1,1) - g(3)T(2,1,1) + P(2,1;1,1)w(1,1,3) + P(2,1;3,1)w(3,1,3);$$

$$w(2,2,3) = c(2,2,2) - g(3)T(2,2,2) + P(2,2;1,2)w(1,2,3) + P(2,2;3,2)w(3,2,3);$$

$$w(3,0,3) = c(3,0,2) - g(3)T(3,0,2) + P(3,0;2,2)w(2,2,2);$$

$$w(3,1,3) = c(3,1,2) - g(3)T(3,1,2) + P(3,1;2,2)w(2,2,2);$$

$$w(3,2,3) = c(3,2,2) - g(3)T(3,2,2) + P(3,2;2,2)w(2,2,2);$$

que, resolvido, leva aos seguintes valores:

$$w(0,1,3) = 0;$$

$$w(2,1,3) = 13,83;$$

$$w(0,2,3) = -24,51;$$

$$w(2,2,3) = -22,58;$$

$$w(1,0,3) = 46,17;$$

$$w(3,0,3) = 78,36;$$

$$w(1,1,3) = 6,35;$$

$$w(3,1,3) = 28,36;$$

$$w(1,2,3) = -23,42;$$

$$w(3,2,3) = -21,64;$$

$$w(2,0,3) = 57,25;$$

$$g(3) = 220,56.$$

Com estes novos valores de  $g(f)$  e  $w(i,s,f)$  executa-se o PASSO 2, que resulta na política  $f_4$ :

$$s(0) = -1, S(0) = 0, T(0) = 2, t(0) = 3;$$

$$s(1) = -1, S(1) = 0, T(1) = 2, t(1) = 3;$$

$$s(2) = -1, S(2) = 0, T(2) = 2, t(2) = 3;$$

$$s(3) = 1, S(3) = 2, T(3) = 2, t(3) = 3;$$

que é diferente de  $f_3$ . Portanto, substitui-se  $f_3$  por  $f_4$  e novamente retorna-se ao PASSO 1. O novo sistema de equações é:

$$w(0,1,4) = c(0,1,1) - g(4)T(0,1,1) + P(0,1;1,1)w(1,1,4);$$

$$w(0,2,4) = c(0,2,2) - g(4)T(0,2,2) + P(0,2;1,2)w(1,2,4);$$

$$w(1,0,4) = c(1,1,0) - g(4)T(1,0,0) + P(1,0;2,0)w(2,-,4);$$

$$w(1,1,4) = c(1,1,1) - g(4)T(1,1,1) + P(1,1;0,1)w(0,1,4) + P(1,1;2,1)w(2,1,4);$$

$$w(1,2,4) = c(1,2,4) - g(4)T(1,2,2) + P(1,2;0,2)w(0,2,4) + P(1,2;2,2)w(2,2,4);$$

$$w(2,0,4) = c(2,0,0) - g(4)T(2,0,0) + P(2,0;3,0)w(3,0,4);$$

$$w(2,1,4) = c(2,1,1) - g(4)T(2,1,1) + P(2,1;1,1)w(1,1,4) + P(2,1;3,1)w(3,1,4);$$

$$w(2,2,4) = c(2,2,2) - g(4)T(2,2,2) + P(2,2;1,2)w(1,2,4) + P(2,2;3,2)w(3,2,4);$$

$$w(3,0,4) = c(3,0,2) - g(4)T(3,0,2) + P(3,0;2,2)w(2,2,4);$$

$$w(3,1,4) = c(3,1,2) - g(4)T(3,1,2) + P(3,1;2,2)w(2,2,4);$$

$$w(3,2,4) = c(3,2,2) - g(4)T(3,2,2) + P(3,2;2,2)w(2,2,4);$$

que resolvido leva aos seguintes valores:

$$w(0,1,4) = 0;$$

$$w(2,1,4) = 13,83;$$

$$w(0,2,4) = -24,51;$$

$$w(2,2,4) = -22,58;$$

$$w(1,0,4) = 46,17;$$

$$w(3,0,4) = 78,36;$$

$$w(1,1,4) = 6,35;$$

$$w(3,1,4) = 28,36;$$

$$w(1,2,4) = -23,42;$$

$$w(3,2,4) = -21,64;$$

$$w(2,0,4) = 57,25;$$

$$g(4) = 220,56.$$



Com estes novos valores de  $g(f)$  e  $w(i,s,f)$  executa-se o PASSO 2, que resulta na política  $f_5$  :

$$\begin{aligned} s(0) &= -1, S(0) = 0, T(0) = 2, t(0) = 3; \\ s(1) &= -1, S(1) = 0, T(1) = 2, t(1) = 3; \\ s(2) &= -1, S(2) = 0, T(2) = 2, t(2) = 3; \\ s(3) &= 1, S(3) = 2, T(3) = 2, t(3) = 3; \end{aligned}$$

que é idêntica à política  $f_4$ . Portanto,  $f$  é a política ótima, e o custo médio mínimo por unidade de tempo a longo prazo é  $g(f_4) = 220,56$ .

### 3.3 - RESULTADOS PARA M = 3, R = 1 E C = 2

Nesta seção apresentam-se os resultados do estudo realizado para um sistema de manutenção onde a linha de produção contém três máquinas ( $M = 3$ ), o número de máquinas de reserva é um ( $R = 1$ ) e a oficina de reparo contém dois servidores disponíveis ( $C = 2$ ).

Admitindo que o primeiro instante de decisão ocorre quando quebra a primeira máquina, o sistema parte do estado  $(1,0)$ , isto é, o tamanho da fila é um ( $i = 1$ ) e existem zero servidores alocados ( $s = 0$ ). A partir deste estado, dependendo da política adotada, o sistema pode caminhar para um entre os vários estados possíveis. O diagrama da Figura 3.1 ilustra essas possibilidades. Considerando que a ação escolhida tenha sido alocar um servidor, o sistema pode atingir os estados  $(2,1)$  ou  $(0,1)$  no próximo instante de decisão. Se uma máquina quebrar antes de terminar o reparo da máquina que está sendo consertada, o sistema passará ao estado  $(2,1)$ . Novamente, a partir deste estado, dependendo da política adotada, o sistema pode caminhar para um entre vários estados possíveis. O diagrama da Figura 3.1 ilustra essas possibilidades. Novamente escolhe-se uma determinada ação. Admitindo que esta seja alocar mais um servidor, os próximos estados possíveis são  $(1,2)$  e  $(3,2)$ . Considerando que uma máquina tenha sido consertada antes de uma máquina quebrar na linha de pro

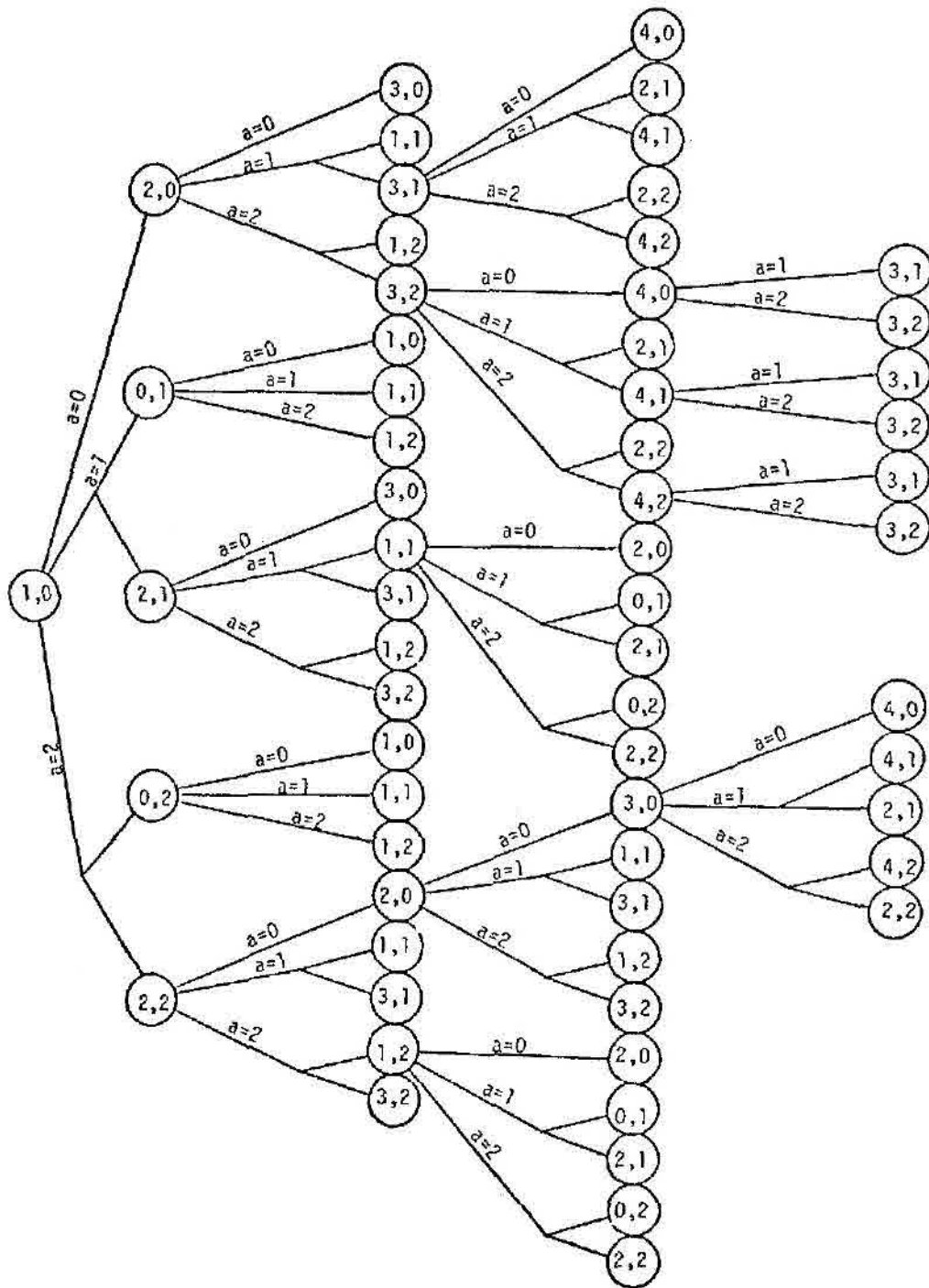


Fig. 3.1 - Mudanças de estado possíveis.

dução, o sistema passa ao estado (1,2), e assim sucessivamente, como mostra a Figura 3.1.

Com os resultados obtidos no capítulo anterior, implementou-se um programa computacional. Apresentam-se a seguir os resultados de alguns testes feitos com o algoritmo de iteração de políticas apresentado na Seção 2.3 para  $M = 3$ ,  $R = 1$ ,  $C = 2$ ,  $\mu = 1,5$ ,  $\lambda = 1$  e  $k^+ = k^- = 0$ .

A Tabela 3.1 apresenta, no sentido horizontal, para  $H = W = K^+ = K^- = 1$ ,  $CP = 0$  e para cada tamanho possível da fila de reparo ( $i = 0, 1, 2, 3, 4$ ) os valores dos quatro níveis  $s(i)$ ,  $S(i)$ ,  $T(i)$  e  $t(i)$ , correspondentes à política inicial e às iterações subsequentes até a obtenção da política ótima. Apresenta-se ainda o custo médio por unidade de tempo a longo prazo do sistema de manutenção,  $g(f)$ , para as políticas obtidas em cada iteração. Observando esta tabela verifica-se que, independentemente da política inicial, a mesma política e custo ótimos são obtidos. Como o número de possíveis políticas iniciais é muito grande, apresentaram-se nesta tabela apenas alguns dos casos testados.

A Tabela 3.2 apresenta para vários valores de  $H$  os parâmetros das políticas ótimas obtidas,  $s^*(i)$ ,  $S^*(i)$ ,  $T^*(i)$  e  $t^*(i)$  para  $i = 0, 1, 2, 3, 4$ , e os seus respectivos custos médios mínimos por unidade de tempo a longo prazo,  $g^*$ . Considerou-se que  $W = K^+ = K^- = 1$  e  $CP = 0$ .

TABELA 3.1

TESTES DE COERÊNCIA - POLÍTICAS INICIAIS DISTINTAS

	i	s S T t	s S T t	s S T t	s S T t	s S T t
Política Inicial	0	-1 0 0 1	-1 0 0 2	-1 0 0 2	-1 0 0 1	-1 0 0 1
	1	0 1 2 3	0 1 2 3	0 1 1 2	0 2 2 3	0 1 1 3
	2	0 1 2 3	0 1 2 3	0 1 1 2	0 2 2 3	0 1 1 3
	3	0 1 2 3	0 1 2 3	0 1 1 2	0 2 2 3	0 1 1 3
	4	1 2 2 3	1 2 2 3	1 2 2 3	1 2 2 3	1 2 2 3
	g(1)	4,29	3,96	4,23	5,21	4,29
1a. Iteração	0	-1 0 0 3	-1 0 1 2	-1 0 1 2	-1 0 0 3	-1 0 0 3
	1	-1 1 1 3	0 1 1 2	0 1 1 2	0 1 1 3	-1 1 1 3
	2	-1 1 2 3	0 1 1 3	0 1 1 2	0 1 1 3	-1 1 2 3
	3	0 1 2 3	0 1 2 3	0 1 1 3	0 1 1 3	0 1 2 3
	4	1 2 2 3	1 2 2 3	1 2 2 3	1 2 2 3	1 2 2 3
	g(2)	3,74	3,80	3,95	3,74	3,74
2a. Iteração	0	-1 0 1 2	-1 0 1 2	-1 0 1 2	-1 0 1 2	-1 0 1 2
	1	-1 1 2 3	0 1 1 3	0 1 1 2	0 1 2 3	-1 1 2 3
	2	0 1 2 3	0 1 2 3	0 1 1 3	0 1 2 3	0 1 2 3
	3	0 1 2 3	0 1 2 3	0 1 1 3	0 1 2 3	0 1 2 3
	4	1 2 2 3	1 2 2 3	1 2 2 3	1 2 2 3	1 2 2 3
	g(3)	3,74	3,74	3,80	3,74*	3,74
3a. Iteração	0	-1 0 1 2	-1 0 1 2	-1 0 1 2		-1 0 1 2
	1	0 1 2 3	0 1 2 3	0 1 1 3		0 1 2 3
	2	0 1 2 3	0 1 2 3	0 1 2 3		0 1 2 3
	3	0 1 2 3	0 1 2 3	0 1 2 3		0 1 2 3
	4	1 2 2 3	1 2 2 3	1 2 2 3		1 2 2 3
	g(4)	3,74*	3,74*	3,74		3,74*
4a. Iteração	0			-1 0 1 2		
	1			0 1 2 3		
	2			0 1 2 3		
	3			0 1 2 3		
	4			0 2 2 3		
	g(5)			3,74*		

\* Custo médio mínimo por unidade de tempo a longo prazo.

TABELA 3.2

VARIAÇÃO DA POLÍTICA ÓTIMA EM FUNÇÃO DO  
CUSTO DE ESPERA NA FILA DE REPARO, H

H	0	0,01	1,00	4,00	10,00	100,00
i	s*s*T*t*	s*s*T*t*	s*s*T*t*	s*s*T*t*	s*s*T*t*	s*s*T*t*
0	-1 0 1 2	-1 0 1 2	-1 0 1 2	-1 0 2 3	-1 0 2 3	-1 0 2 3
1	-1 0 1 2	-1 0 1 2	0 1 2 3	0 1 2 3	0 1 2 3	0 1 2 3
2	-1 0 2 3	-1 0 2 3	0 1 2 3	1 2 2 3	1 2 2 3	1 2 2 3
3	-1 0 2 3	-1 0 2 3	0 1 2 3	1 2 2 3	1 2 2 3	1 2 2 3
4	1 2 2 3	1 2 2 3	1 2 2 3	1 2 2 3	1 2 2 3	1 2 2 3
g*	1,67	1,69	3,74	8,95	19,38	175,77

A Tabela 3.3 apresenta o número de servidores alocados ao sistema de manutenção para uma simulação da variação do tamanho da fila, para os dados da Tabela 3.2. Analisando estas tabelas, verifica-se que o número de servidores alocados ao sistema de manutenção aumenta com o aumento do custo de espera na fila de reparo, H.

A Tabela 3.4 é semelhante à Tabela 3.2, mas naquela altera-se apenas o custo de reparo W fixando  $H = K^+ = K^- = 1$  e  $CP = 0$ .

TABELA 3.3

NÚMERO DE SERVIDORES ALOCADOS PARA UMA  
SIMULAÇÃO DO TAMANHO DA FILA DE REPARO

Número de servidores alocados	TAMANHO DA FILA	0	1	2	1	2	3	4	3	2	3	4	3	2	1	0	1	2	1	2	3	2	1	0	1	2	3
	H = 0		0	0	0			0	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
H = 0,01		0	0	0			0	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
H = 1,00		0	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
H = 4,00		0	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
H = 10,00		0	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
H = 100,00		0	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

Obs.: Os campos em branco significam tamanho de fila não alcançado devido à política adotada.

TABELA 3.4

VARIAÇÃO DA POLÍTICA ÓTIMA EM FUNÇÃO DO CUSTO DE REPARO, W

W	0	0,01	1,00	4,00	10,00	100,00
i	s*S*T*t*	s*S*T*t*	s*S*T*t*	s*S*T*t*	s*S*T*t*	s*S*T*t*
0	-1 0 2 3	-1 0 2 3	-1 0 1 2	-1 0 1 2	-1 0 0 1	-1 0 0 1
1	1 2 2 3	0 1 2 3	0 1 2 3	-1 0 0 2	-1 0 0 1	-1 0 0 1
2	1 2 2 3	1 2 2 3	0 1 2 3	-1 0 2 3	-1 0 0 1	-1 0 0 1
3	1 2 2 3	1 2 2 3	0 1 2 3	-1 0 2 3	-1 0 0 1	-1 0 0 1
4	1 2 2 3	1 2 2 3	1 2 2 3	1 2 2 3	1 2 2 3	1 2 2 3
g*	1,74	1,76	3,74	7,41	11,25	56,25

A Tabela 3.5 é semelhante à Tabela 3.3, mas os dados daquela são os da Tabela 3.4. Analisando estas tabelas, observa-se que o número de servidores alocados diminui com o aumento do custo de reparo.

TABELA 3.5

NÚMERO DE SERVIDORES ALOCADOS PARA UMA  
SIMULAÇÃO DO TAMANHO DA FILA DE REPARO

	TAMANHO DA FILA	0	1	2	1	2	3	4	3	2	3	4	3	2	1	0	1	2	1	2	3	2	1	0	1	2	3	
NÚMERO DE SERVIDORES ALOCADOS	W = 0	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
	W = 0,01	0	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
	W = 1,00	0	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2
	W = 4,00	0	0	0			0	2	2	2	2	2	2	2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	W = 10,00	0	0	0			0	2	0			2	0															
	W = 100,00	0	0	0			0	2	0			2	0															

Obs.: Os campos em branco significam tamanho de fila não alcançado devido à política adotada.

As Tabelas 3.6 e 3.7 são semelhantes às Tabelas 3.2 e 3.3, respectivamente, mas naquelas varia-se o custo de alocação de servidores ao sistema de manutenção,  $K^+$  e  $K^-$ , fixando  $H = W = 1$  e  $CP = 0$ . Analisando estas tabelas, observa-se que as alterações no número de servidores alocados diminuem com o aumento do custo de alocação dos servidores.





A Tabela 3.8 apresenta o custo médio mínimo por unidade de tempo a longo prazo,  $g^*$ , obtido fixando os custos de espera na fila de reparo ( $H = 0$ ), de reparo ( $W = 50$ ), de alocação de servidores ( $K^+ = K^- = 30, k^+ = k^- = 0$ ),  $M = 10, C = 2$ , e variando o custo de perda de produção (CP) e o número de máquinas de reserva (R). Observando esta tabela, verifica-se que o custo médio a longo prazo em alguns casos atinge um valor mínimo para  $R > 1$ , o que indica que é interessante nesses casos utilizar mais de uma máquina de reserva.

TABELA 3.8

VARIAÇÃO DO NÚMERO DE MÁQUINAS DE RESERVA (R)

		CUSTO MÉDIO MÍNIMO A LONGO PRAZO ( $g^*$ )					
CP \ R	R	1	2	3	4	5	6
30		133,72	136,54	140,45	144,59	148,29	152,26
40		145,81	146,21	147,94	149,98	152,75	156,05
50		157,29	155,29	154,32	155,09	157,09	159,84
60		168,24	163,17	160,42	160,16	161,43	163,58

3.4 - COMPARAÇÃO DOS RESULTADOS DESTE TRABALHO COM OS DO MODELO DE DUAS TAXAS DE REPARO

Vakulathil (1983) estudou um sistema de manutenção com M máquinas na linha de produção e uma máquina de reserva ( $R = 1$ ). As máquinas na linha de produção são idênticas, com distribuição do tempo de quebra exponencial com parâmetro  $\lambda$ . A oficina de reparo conta com um único servidor, cujo tempo de reparo admite-se ter uma distri

buição geral  $F_k$ , com média  $1/\mu_k$ ,  $k = 1,2$ . Isto significa que o servidor pode trabalhar com uma das duas taxas de reparo distintas. Os instantes de observação do sistema são os instantes de término de reparo, quando então uma das duas taxas de reparo tem de ser escolhida para ser utilizada no próximo reparo

A estrutura de custos adotada no modelo estudado por Vakulathil inclui um custo de espera na fila  $H$ , um custo de reparo  $W_i$  quando o servidor trabalha à taxa  $\mu_i$  e um custo de troca de taxa de reparo  $K_i$  quando ocorre a troca da taxa  $\mu_i$  para a outra taxa,  $i = 1,2$ .

Para tornar mais clara a diferença entre o modelo de duas taxas e o modelo de dois servidores, salientam-se alguns aspectos:

- a) No modelo adotado por Vakulathil (1983), a oficina de reparo dispõe de um único servidor que pode trabalhar com uma das duas taxas de reparo distintas. No entanto, no modelo adotado neste trabalho a oficina de reparo dispõe de até  $C$  servidores idênticos que trabalham com a mesma taxa de reparo. Portanto, no primeiro modelo a decisão é quanto a que taxa de reparo o servidor deve atuar e no segundo a decisão é quanto ao número de servidores que devem ser alocados, isto é, quantos servidores devem atuar até o próximo instante de decisão.
- b) No modelo de duas taxas os instantes de decisão são os instantes em que se completa um serviço. No modelo de dois servidores os instantes de decisão são os instantes em que se completa um serviço ou uma máquina quebra.

O primeiro aspecto tem sua importância a medida que tenta adequar melhor o modelo à realidade que se deseja analisar. Por exemplo, se o decisor necessita agilizar o atendimento de uma

oficina de reparo, é mais comum que ele aumente o número de servidores em vez de trocar o servidor atual por um mais rápido.

O segundo aspecto contribui decisivamente na determinação das expressões gerais para o cálculo das probabilidades de transição e dos tempos esperados entre transições para quaisquer M, R e C. Note-se que no estudo realizado por Vakulathil esta generalização não foi possível, devido a maior complexidade na determinação destas expressões quando  $R > 1$ .

Se por um lado o segundo aspecto possibilitou obter resultados para qualquer número de máquinas de reserva, por outro limitou a aplicação aos casos em que a distribuição dos tempos de reparo é exponencial. No modelo adotado por Vakulathil esta restrição não é necessária, valendo seus resultados para qualquer distribuição do tempo de reparo das máquinas.

Para comparar os resultados numéricos dos dois modelos de controle de sistemas de manutenção, compatibilizam-se os valores dos parâmetros de entrada. Os resultados apresentados a seguir foram obtidos para os seguintes valores dos parâmetros de entrada:

MODELO DE  
DUAS TAXAS

(M=3, R=1)

$\mu_1 = 1,5;$

$\mu_2 = 3;$

$\lambda = 1;$

MODELO DE  
DOIS SERVIDORES

(M=3, R=1, C=2)

$\mu = 1,5;$

$\lambda = 1;$

$k^+ = k^- = 0;$

CP = 0.

Admitiu-se também que no modelo de Vakulathil a distribuição do tempo de reparo é exponencial.

A Tabela 3.9 foi obtida fixando  $W_1 = 1, W_2 = 2, K_1 = 4, K_2 = 4, W = 1, K^- = K^+ = 4$  e variando o custo de espera na fila de reparo,  $H$ . Por esta tabela verifica-se que, com o aumento do custo de espera na fila de reparo, o modelo de dois servidores apresenta um menor custo médio ótimo por unidade de tempo a longo prazo. Este resultado não parece ser intuitivo e decorre do fato de que a classe de políticas adotada no modelo de duas taxas não permite usar somente a taxa  $\mu_2$  (servidor mais rápido), enquanto no modelo de dois servidores a classe de políticas adotada permite que os dois servidores estejam permanentemente alocados.

TABELA 3.9

COMPARAÇÃO ENTRE O MODELO DE DUAS TAXAS E O MODELO DE DOIS SERVIDORES

H		0	0,01	1,00	14,00	10,00	100,00
g*	MODELO DE DUAS TAXAS	0,94	0,96	3,47	9,74	21,35	195,48
	MODELO DE DOIS SERVIDORES	1,67	1,69	3,74	8,95	19,38	175,77

A Tabela 3.10 foi obtida fixando  $H = 1, K_1 = 4, k_2 = 4, K^- = K^+ = 4$  e variando o custo de reparo do servidor  $W_1, W_2$  e  $W$ . Observando esta tabela verifica-se que, para valores relativamente pequenos e relativamente grandes de  $W_1, W_2$  e  $W$ , o modelo de dois servidores apresenta um menor custo médio ótimo por unidade de tempo a longo prazo, enquanto para valores intermediários o modelo de

duas taxas de reparo apresenta um menor custo médio ótimo por unidade de tempo.

TABELA 3.10

COMPARAÇÃO ENTRE O MODELO DE DUAS TAXAS E O MODELO DE DOIS SERVIDORES

$W = W = W / 2$		0	0,01	1,00	4,00	10,00	100,00
g*	MODELO DE DUAS TAXAS	2,53	2,54	3,47	6,28	11,90	96,24
	MODELO DE DOIS SERVIDORES	1,74	1,76	3,74	7,41	11,25	56,25

A Tabela 3.11 foi obtida fixando  $W_1 = 1, W_2 = 2, W = 1, H = 1$  e variando os custos de troca da taxa de reparo e de alocação de servidores  $K_1, K_2, K^-$  e  $K^+$ . Observando esta tabela verifica-se que, com o aumento dos custos de troca da taxa de reparo e de alocação de servidores, o modelo de duas taxas de reparo apresenta um menor custo ótimo médio por unidade de tempo. Esta conclusão pode ser explicada pelo fato de o modelo de dois servidores apresentar um maior número de alterações no número de servidores alocados, por se observar o sistema em um número maior de instantes de tempo.

TABELA 3.11

COMPARAÇÃO ENTRE O MODELO DE DUAS TAXAS E O MODELO DE DOIS SERVIDORES

$K_1 = K_2 = K^+ = K^-$		0	0,01	1,00	4,00	10,00	100,00
$g^*$	MODELO DE DUAS TAXAS	3,21	3,21	3,47	3,47	3,47	3,47
	MODELO DE DOIS SERVIDORES	3,15	3,15	3,74	3,74	3,74	3,74

3.5 - RESULTADOS PARA  $M = 3$ ,  $R = 2$  E  $C = 2$

Nesta seção apresentam-se os resultados do estudo realizado para um sistema de manutenção onde a linha de produção contém três máquinas ( $M = 3$ ), o número de máquinas de reserva é dois ( $R = 2$ ) e a oficina contém dois servidores disponíveis ( $C = 2$ ).

O fato de o sistema dispor de duas máquinas de reserva significa que, mesmo no caso de duas máquinas da linha de produção estarem na fila de reparo, a potencialidade de produção não diminui, já que as duas máquinas de reserva estarão ativadas, substituindo as quebradas.

Admitindo que o primeiro instante de decisão ocorre quando quebra a primeira máquina, o sistema parte do estado (1,0), isto é, o tamanho da fila de reparo é um ( $i = 1$ ) e existem zero servidores alocados ( $s = 0$ ). A partir deste estado, dependendo da política adotada, o sistema pode caminhar para um entre vários estados possíveis. O diagrama da Figura 3.2 ilustra essas possibilidades. Atingido um destes estados, novamente outra série de estados são possíveis de alcançar, e assim sucessivamente, como descrito na Seção 3.3.

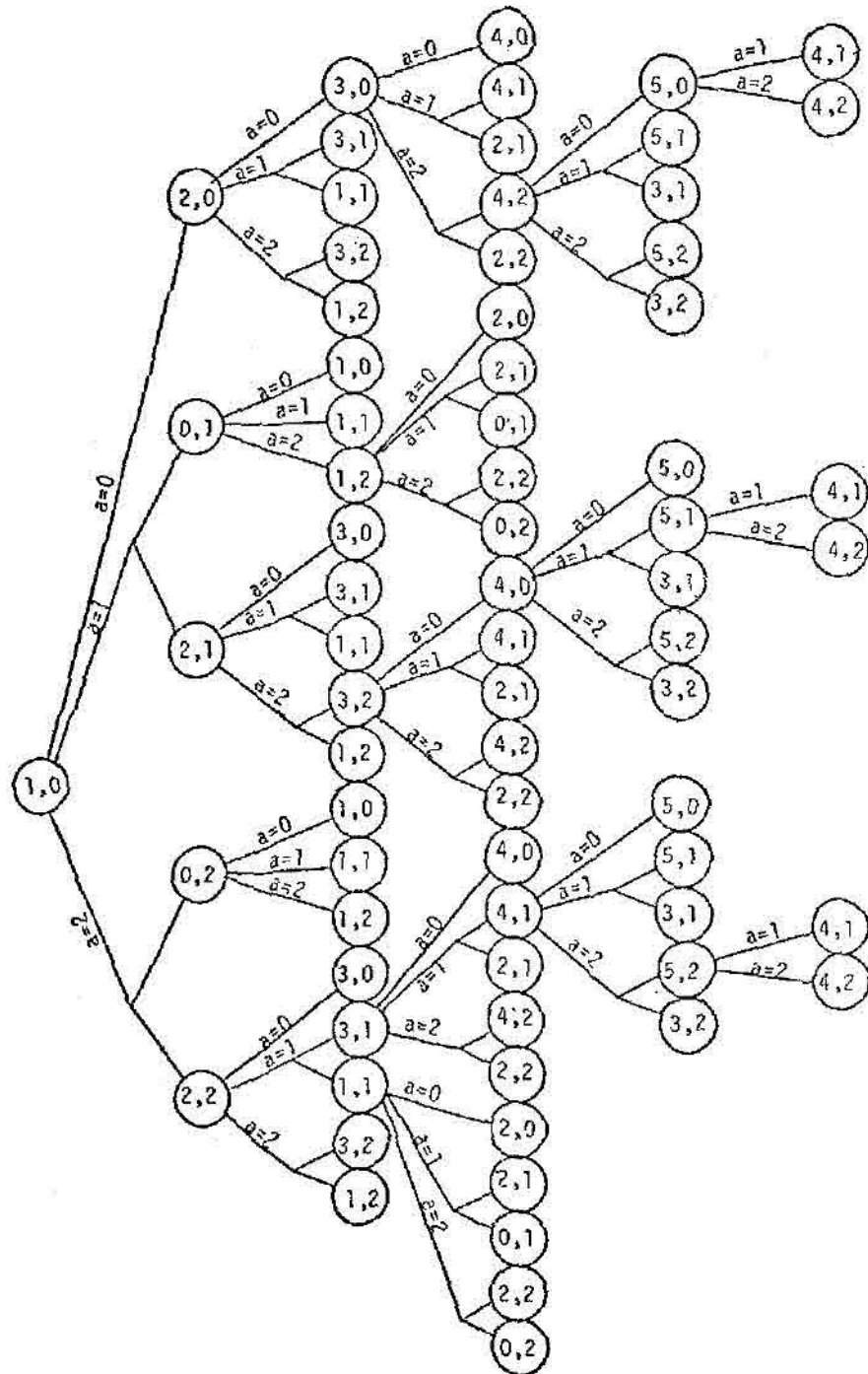


Fig. 3.2 - Mudanças de estado possíveis.

Apresentam-se, a seguir, os resultados de alguns testes feitos com o algoritmo de iteração de políticas apresentado na Seção 2.3, para  $M = 3$ ,  $R = 2$ ,  $C = 2$ ,  $\mu = 1,5$ ,  $\lambda = 1$  e  $k^- = k^+ = 0$ .

As tabelas apresentadas a seguir são semelhantes às respectivas tabelas da Seção 3.3 onde se consideram  $H=W=K^-=K^+=1$  e  $CP = 0$ , mas agora o número de máquinas de reserva é dois ( $R = 2$ ).

Observando a Tabela 3.12, verifica-se que, partindo de várias políticas iniciais distintas, a mesma política ótima com o mesmo custo médio ótimo por unidade de tempo é obtida, valendo aqui a observação feita na seção anterior sobre o grande número de possíveis políticas iniciais.

Observando as Tabelas 3.13 e 3.14, verifica-se que, com o aumento do custo de espera na fila de reparo, o número de servidores alocados também aumenta.

Observando as Tabelas 3.15 e 3.16, verifica-se que, com o aumento do custo de reparo, o número de servidores alocados diminui.

Observando ainda as Tabelas 3.17 e 3.18, verifica-se que quanto maior o custo de alocação de servidores, menor a variação no número de servidores.

Para este caso não foi possível fazer a comparação com o modelo adotado por Vakulathil (1983), já que este não analisou sistemas de manutenção em que o número de máquinas de reserva é maior que um ( $R > 1$ ).



TABELA 3.12

TESTES DE COERÊNCIA - POLÍTICAS INICIAIS DISTINTAS

	1	s S T t	s S T t	s S T t	s S T t	s S T t
Política Inicial	0	-1 0 0 1	-1 0 0 1	-1 0 0 1	0 1 2 3	0 1 1 2
	1	0 1 2 3	0 2 2 3	1 2 2 3	0 1 2 3	0 1 2 3
	2	0 1 2 3	0 2 2 3	1 2 2 3	0 1 2 3	0 1 2 3
	3	0 1 2 3	0 2 2 3	1 2 2 3	0 1 2 3	0 1 2 3
	4	0 1 2 3	0 2 2 3	1 2 2 3	0 1 2 3	0 1 2 3
	5	1 2 2 3	1 2 2 3	1 2 2 3	1 2 2 3	1 2 2 3
	g(1)	4,74	5,37	5,37	4,23	4,36
1a. Iteração	0	-1 0 0 3	-1 0 0 3	-1 0 0 3	-1 0 2 3	-1 1 1 3
	1	-1 1 2 3	0 1 1 3	-1 2 2 3	0 1 2 3	0 1 2 3
	2	0 1 2 3	0 1 1 3	-1 2 2 3	0 1 2 3	0 1 2 3
	3	0 1 2 3	0 1 1 3	-1 2 2 3	0 1 2 3	0 1 2 3
	4	0 1 2 3	0 1 2 3	-1 2 2 3	1 2 2 3	0 1 2 3
	5	1 2 2 3	1 2 2 3	1 2 2 3	1 2 2 3	1 2 2 3
	g(2)	4,23	4,23	4,23	4,23*	4,23
2a. Iteração	0	-1 0 2 3	-1 0 2 3	-1 0 2 3		-1 0 2 3
	1	0 1 2 3	0 1 2 3	-1 1 2 3		0 1 2 3
	2	0 2 2 3	0 1 2 3	-1 1 2 3		0 2 2 3
	3	0 2 2 3	0 1 2 3	0 1 2 3		0 2 2 3
	4	1 2 2 3	1 2 2 3	1 2 2 3		1 2 2 3
	5	1 2 2 3	1 2 2 3	1 2 2 3		1 2 2 3
	g(3)	4,23	4,23*	4,23		4,23
3a. Iteração	0	-1 0 2 3		-1 0 2 3		-1 0 2 3
	1	0 1 2 3		-1 1 2 3		0 1 2 3
	2	0 1 2 3		0 1 2 3		0 1 2 3
	3	0 1 2 3		0 1 2 3		0 1 2 3
	4	1 2 2 3		1 2 2 3		1 2 2 3
	5	1 2 2 3		1 2 2 3		1 2 2 3
	g(4)	4,23*		4,23		4,23*
4a. Iteração	0			-1 0 2 3		
	1			0 1 2 3		
	2			0 1 2 3		
	3			0 1 2 3		
	4			1 2 2 3		
	5			1 2 2 3		
	g(5)			4,23*		

\* Custo médio ótimo por unidade de tempo a longo prazo.

TABELA 3.13

EFEITO DA VARIACÃO DO CUSTO DE ESPERA NA FILA, H, NA POLÍTICA ÓTIMA

H	0	0,01	1,00	4,00	10,00	100,00
i	s*S*T*t*	s*S*T*t*	s*S*T*t*	s*S*T*t*	s*S*T*t*	s*S*T*t*
0	-1 0 1 2	-1 0 1 2	-1 0 2 3	-1 0 2 3	-1 0 2 3	-1 0 2 3
1	-1 0 1 2	-1 0 1 2	0 1 2 3	0 1 2 3	0 1 2 3	0 1 2 3
2	-1 0 1 2	-1 0 1 2	0 1 2 3	1 2 2 3	1 2 2 3	1 2 2 3
3	-1 0 2 3	-1 0 2 3	0 1 2 3	1 2 2 3	1 2 2 3	1 2 2 3
4	-1 0 2 3	-1 0 2 3	1 2 2 3	1 2 2 3	1 2 2 3	1 2 2 3
5	1 2 2 3	1 2 2 3	1 2 2 3	1 2 2 3	1 2 2 3	1 2 2 3
g*	1,64	1,67	4,23	10,91	24,28	224,78

TABELA 3.14

NÚMERO DE SERVIDORES ALOCADOS PARA UMA  
SIMULAÇÃO DO TAMANHO DA FILA DE REPARO

		TAMANHO DA FILA	1	2	3	2	3	4	5	4	3	4	5	4	3	2	3	2	1	0	1	2	3	4	3	4	5	4	
NÚMERO DE SERVIDORES ALOCADOS	H = 0		0	0	0			0	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	
	H = 0,01		0	0	0			0	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	
	H = 1,00		1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
	H = 4,00		1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
	H = 10,00		1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
	H = 100,00		1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

Obs.: Os campos em branco significam tamanho de fila não atingido de vido à política adotada.

TABELA 3.15

EFEITO DA VARIACÃO DO CUSTO DE REPARO, W, NA POLÍTICA ÓTIMA

W	0	0,01	1,00	4,00	10,00	100,00
i	s*S*T*t*	s*S*T*t*	s*S*T*t*	s*S*T*t*	s*S*T*t*	s*S*T*t*
0	-1 0 2 3	-1 0 2 3	-1 0 2 3	-1 0 1 2	-1 0 0 1	-1 0 0 1
1	0 1 2 3	0 1 2 3	0 1 2 3	-1 0 0 2	-1 0 0 1	-1 0 0 1
2	1 2 2 3	1 2 2 3	0 1 2 3	-1 0 0 2	-1 0 0 1	-1 0 0 1
3	1 2 2 3	1 2 2 3	0 1 2 3	-1 0 0 2	-1 0 0 1	-1 0 0 1
4	1 2 2 3	1 2 2 3	1 2 2 3	-1 0 2 3	-1 0 0 1	-1 0 0 1
5	1 2 2 3	1 2 2 3	1 2 2 3	1 2 2 3	1 2 2 3	1 2 2 3
g*	2,23	2,23	4,23	8,36	12,25	57,25

TABELA 3.16

NÚMERO DE SERVIDORES ALOCADOS PARA UMA  
SIMULAÇÃO DO TAMANHO DA FILA DE REPARO

NÚMERO DE SERVIDORES ALOCADOS	TAMANHO DA FILA	0	1	2	3	2	3	4	5	4	3	4	5	4	3	2	3	2	1	0	1	2	3	4	3	4	5
	W = 0		0	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
W = 0,01		0	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
W = 1,00		0	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
W = 4,00		0	0	0	0			0	2	2	1	1	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2
W = 10,00		0	0	0	0			0	2	0			2	0													2
W = 100,00		0	0	0	0			0	2	0			2	0													2

Obs.: Os campos em branco significam tamanho de fila não atingido de vido à política adotada.



## CAPÍTULO 4

### COMENTÁRIOS FINAIS

#### 4.1 - CONCLUSÕES

Este trabalho obteve resultados gerais para as expressões que permitem o cálculo das probabilidades de transição e dos tempos e custos esperados entre transições. Estes são importantes pelo fato de permitir a implementação e obtenção de resultados para qualquer número de máquinas na linha de produção, qualquer número de máquinas de reserva e ainda para qualquer número de servidores disponíveis. Com a inclusão do custo de perda de produção, tornou-se possível determinar o número ótimo de máquinas de reserva que minimiza o custo médio por unidade de tempo do sistema a longo prazo.

Das comparações entre o modelo de duas taxas e o modelo de dois servidores pode-se concluir que não é possível determinar "a priori" qual dos dois leva a um menor custo médio ótimo por unidade de tempo. Portanto, não é possível afirmar que é mais econômico aumentar o número de servidores ou melhorar a qualidade do servidor sem antes obter os resultados numéricos para cada modelo.

#### 4.2 - SUGESTÕES PARA ESTUDOS FUTUROS

O modelo estudado neste trabalho pressupõe, entre outras, o estabelecimento de hipóteses a respeito de três pontos básicos:

- 1) distribuição do tempo de reparo das máquinas;
- 2) distribuição do tempo de quebra das máquinas;
- 3) instantes de decisão.

Em função das hipóteses adotadas para os pontos acima têm-se os seguintes casos:

1) Para o modelo de controle efetuado sobre o número de servidores alocados:

1.1) { - Distribuição do tempo de reparo das máquinas: EXPONENCIAL.  
- Distribuição do tempo de quebra das máquinas: EXPONENCIAL.  
- Instantes de decisão: INSTANTES DE TÉRMINO DE REPARO E INSTANTES DE QUEBRA DE MÁQUINA.

1.2) { - Distribuição do tempo de reparo das máquinas: GERAL.  
- Distribuição do tempo de quebra das máquinas: EXPONENCIAL.  
- Instantes de decisão: INSTANTES DE TÉRMINO DE REPARO.

1.3) { - Distribuição do tempo de reparo das máquinas: EXPONENCIAL.  
- Distribuição do tempo de quebra das máquinas: GERAL.  
- Instantes de decisão: INSTANTES DE QUEBRA DE MÁQUINA.

2) Para o modelo de controle efetuado sobre a taxa de reparo das máquinas:

2.1) { - Distribuição do tempo de reparo das máquinas: EXPONENCIAL.  
- Distribuição do tempo de quebra das máquinas: EXPONENCIAL.  
- Instantes de decisão: INSTANTES DE TÉRMINO DE REPARO E INSTANTES DE QUEBRA DE MÁQUINA.

- 2.2) {
- Distribuição do tempo de reparo das máquinas: GERAL.
  - Distribuição do tempo de quebra das máquinas: EXPONENCIAL.
  - Instantes de decisão: INSTANTES DE TÉRMINO DE REPARO.
- 2.3) {
- Distribuição do tempo de reparo das máquinas: EXPONENCIAL.
  - Distribuição do tempo de quebra das máquinas: GERAL.
  - Instantes de decisão: INSTANTES DE QUEBRA DE MÁQUINA.

Os instantes de decisão acima referidos foram escolhidos de modo a garantir que, a partir desses instantes, o comportamento futuro do sistema seja independente do passado. Com isso fica possível usar modelos de decisão semimarkovianos, como o empregado neste trabalho.

O caso 1.1 foi tratado neste trabalho. Ao relaxar a hipótese quanto à distribuição do tempo de reparo, isto é, considerar esta distribuição como geral, o caso a ser tratado é o 1.2. Ao relaxar a hipótese quanto à distribuição do tempo de quebra, isto é, considerar esta distribuição como geral, caso a ser tratado é o 1.3.

O caso 2.2 foi estudado por Vakulathil (1983). A expectativa é de que, como no estudo desenvolvido por Vakulathil a determinação das expressões para o cálculo das probabilidades de transição e dos tempos e custos esperados entre transições tornou-se muito complexo para  $R > 1$ , o mesmo se repita para o caso 1.2. Para o estudo desenvolvido neste trabalho, que tratou o caso 1.1, estas expressões foram determinadas; portanto, a expectativa é de que o mesmo nível de dificuldade ocorra para o caso 2.1.

Os casos 1.3 e 2.3 ainda não foram tratados, porém a expectativa é de que seja relativamente simples o estabelecimento das expressões para o cálculo das probabilidades de transição e dos tempos e custos esperados entre transições. Salienta-se que o algo

ritmo utilizado neste trabalho e no trabalho de Vakulathil não se aplica a estes casos.



## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- COSTA, A.F.B. *Um problema de otimização em controle da quantidade de trabalho numa fila M/G/1*. Tese de Mestrado em Pesquisa Operacional. São José dos Campos, Instituto Tecnológico de Aeronáutica, 1983.
- CRABILL, T.B. Optimal control of a maintenance system with variable service rates. *Operations Research*, 22(4):726-745, 1974.
- CRABILL, T.B.; GROSS, D.; MAGAZINE, M.J. A classified bibliography of research on optimal design and control of queues. *Operations Research*, 25(2):219-232, 1977.
- TIJMS, H.C. An algorithm for average costs denumerable state semi-Markov decision problems with applications to controlled production and queueing systems. In: HARTLEY, R.; WHITE, D.J.; THOMAS, L. ed. *Recent developments in Markov decision theory*. New York, Academic Press, 1980. p. 143-179.
- VAKULATHIL, A. *Controle da taxa de reparo em um sistema de manutenção*. Tese de Mestrado em Pesquisa Operacional. São José dos Campos, Instituto Tecnológico de Aeronáutica, 1983.
- WINSTON, W. Optimal control of discrete and continuous time maintenance systems with variable service rates. *Operations Research*, 25(2):259-268, 1977.



## APÊNDICE A

### LISTAGEM DO PROGRAMA

De posse das expressões definidas na Seção 2.2 implementou-se o algoritmo de iteração de políticas descrito na Seção 2.3.

Para utilização do programa, que está escrito em Fortran, o usuário necessita fornecer os valores de  $M$ ,  $R$ ,  $C$ ,  $\mu$ ,  $\lambda$ ,  $H$ ,  $W$ ,  $K^+$ ,  $K^-$ ,  $k^+$ ,  $k^-$  e  $CP$ , nesta ordem, em formato livre.

Devido a limitações de ordem computacional, o usuário deve respeitar a seguinte restrição:

$$(M+R+1) (C+1) - 1 \leq 100,$$

surgida do fato de que o programa utiliza uma sub-rotina do pacote Fortran/Numeral que resolve sistemas de equações lineares até 100 equações. Caso seja necessário resolver um sistema de equações maior, deve-se modificar esta sub-rotina.

O tempo de processamento médio para o caso mais simples onde  $M = 2$ ,  $R = 1$  e  $C = 2$  é de 0,7 segundos;  $M$  para casos mais complexos onde  $M = 10$ ,  $R = 5$  e  $C = 5$  chega a atingir 1'35". A seguir apresenta-se a listagem do programa fonte.

B6800 FORTRAN COMPILATION MARK 3.  
(SAMUEL DINIZ CANDE/CODE 6  
=====)

FILE 3(KIND=REMOTE)  
FILE 5(KIND=REMOTE)  
C-\*\*\*\*\* ESTE PROGRAMA CALCULA A POLITICA DE OPERACAO DE UM SISTEMA DE  
C- MANUTENCAO QUE POSSUI M MAQUINAS NA LINHA DE PRODUCAO, R MAQUI-  
C- NAS DE RESERVA E C SERVIDORES. ESTE PROGRAMA UTILIZA A ROTINA  
C- LNPRV DO PACOTE FORTRAN/NUMERALS SENDO PORTANTO LIMITADO EM  
C- 100 O NUMERO DE EQUACOES LINEARES A SEREM RESOLVIDAS.

```
      DIMENSION P(0:140,0:5,-1:40,0:5),
-          T(0:140,0:5,0:5),
-          C(0:140,0:5,0:5),
-          B1(0:254),
-          B(254),
-          A1(0:253,0:254),
-          A2(64516),
-          A(254,254),
-          X(254),
-          NS(-1:40),
-          NS1(0:40),
-          NT1(0:40),
-          NT(-1:40),
-          SQW(0:40),
-          n(0:40,-1:5,40),
-          TGW(0:40),
-          QK(-1:40,-1:5),
-          SPW(-1:40,-1:6,-1:6),
-          TP(0:140,0:5,0:5,40),
-          G(40),
-          NSR(-1:40),
-          NS1B(0:40),
-          NT1B(0:40),
-          NTR(-1:40),
-          JS(0:40,0:5)
      INTEGER D,D1
      REAL LU(254,254),LAMB,MI
      DOUBLE PRECISION DETERM
C-***** LEITURA DOS PARAMETROS DE ENTRADA.
      READ(3,/)NM,NR,NC,NT,LAMB,H,CW,BK,CP
      N=N1+NR
      NA=(N+1)*(NC+1)
      NF=NA-1
      NF2=NE*NE
      NF=1
C-***** DEFINICAO DA POLITICA INICIAL.
      NC(0)=0
      NS1(0)=1
      NT1(0)=1
      NT(0)=2
      DO 5 I=1,N-1
          NS(I)=0
          NS1(I)=1
          NT1(I)=1
          NT(I)=2
      CONTINUE
      NS(N)=NC-1
```

```

        NS1(N)=NC
        NT1(0)=NC
        NT(N)=NC+1
C***** CALCULO DO TEMPO ESPERADO ENTRE TRANSICÖES.
        DO 28 I=0,N
            DO 11 II=0,NC
                DO 9 J=0,NC
                    IF(I.GT.NR) GO TO 7
                    IF(J.GT.J) GO TO 6
                    T(I,II,J)=1/(J*MI+NH*LAMB)
                    GO TO 9
6                T(I,II,J)=1/(I*MI+NH*LAMB)
                    GO TO 9
7                IF(J.GT.I) GO TO 8
                    IF(J.EQ.0.AND,I.EQ.N) GO TO 23
                    T(I,II,J)=1/(J*MI+(N-I)*LAMB)
                    GO TO 9
8                T(I,II,J)=1/(I*MI+(N-I)*LAMB)
                    GO TO 9
23               T(N,II,0)=1000000.
9                CONTINUE
11               CONTINUE
28               CONTINUE
C***** CALCULO DAS PROBABILIDADES DE TRANSICÖES.
        DO 21 I=0,N
            DO 19 J=0,NC
                DO 18 J1=0,NC
                    IF(I.GT.NR) GO TO 14
                    IF(J1.GT.I) GO TO 12
                    P(I,J,I-1,J1)=- (J1+MI)/(J1*MI+NH*LAMB)
                    P(I,J,I+1,J1)=- (NH*LAMB)/(J1*MI+NH*LAMB)
                    GO TO 18
12               P(I,J,I-1,J1)=- (I+MI)/(I*MI+NH*LAMB)
                    P(I,J,I+1,J1)=- (NH*LAMB)/(I*MI+NH*LAMB)
                    GO TO 18
14               IF(J1.GT.I) GO TO 16
                    IF(I.EQ.N.AND,J1.EQ.0) GO TO 22
                    P(I,J,I-1,J1)=- (J1+MI)/(J1*MI+(N-I)*LAMB)
                    P(I,J,I+1,J1)=- ((N-I)*LAMB)/(J1*MI+(N-I)*LAMB)
                    GO TO 18
16               P(I,J,I-1,J1)=- (I*MI)/(I*MI+(N-I)*LAMB)
                    P(I,J,I+1,J1)=- ((N-I)*LAMB)/(I*MI+(N-I)*LAMB)
                    GO TO 18
22               P(N,J,N-1,0)=1.
                    P(N,J,N+1,0)=1.
19               CONTINUE
21               CONTINUE
C***** CALCULO DO CUSTO ESPERADO ENTRE TRANSICÖES.
        DO 20 I=0,N
            DO 15 J=0,NC
                DO 10 K=0,NC
                    IF(I.GT.NR) GO TO 13
                    C(I,J,K)=T(I,J,K)*(K*I+CH*K)+BK*ABE(J-K)
                    GO TO 10
13               C(I,J,K)=T(I,J,K)*(H*I+CH*K+(I-NF)*CP)+BK*ABS(J-K)
15               CONTINUE
20               CONTINUE
C***** DETERMINACAO DAS ACOES A SEREM TOMADAS DE ACORDO COM A POLITICA

```

```
C-      ADOTADA, UTILIZANDO A SUBROTINA POLIT.
41      CALL PGLIT(NS,NS1,NT1,NT,N,NC,JS)
      DO 39 I=0,NE
      DO 38 J=0,NA
      A1(I,J)=0.
39      CONTINUE
30      CONTINUE
      DO 33 I=0,N
      DO 36 J=0,NC
      DO 37 K=0,NC
      SPH(I,J,K)=0.
37      CONTINUE
36      CONTINUE
33      CONTINUE
      WRITE(5,46)NF
46      FORMAT(/, "*****          ITERACAO N. ",I2,
      "*****")
C-      DO 42 I=0,N
C-      WRITE(5,44)(JS(I,J),J=0,NC)
C- 44      FORMAT(/,5X,3(I2,2X))
C- 42      CONTINUE
      I1=0
      DO 50 I=0,N
      DO 45 J=0,NC
      B1(I1)=C(I,J,JS(I,J))
C-      WRITE(5,43)I1,B1(I1)
C- 43      FORMAT(/,5X,"B1(",I2,") = ",F9.5)
      I1=I1+1
44      CONTINUE
50      CONTINUE
      DO 53 I1=1,NE
      R(I1)=R1(I1)
53      CONTINUE
C-***** MONTAGEM DA MATRIZ DOS COEFICIENTES DO SISTEMA DE EQUACOES
C- LINEARES, QUE SERA UTILIZADA PELA ROTINA LNPRV, UTILIZANDO
C- A SUBROTINA MONTA1.
      CALL MONTA1(P,N,NC,JS,T,A1)
C-      DO 60 I=0,NE
C-      WRITE(5,55)(A1(I,J),J=0,NA)
C- 55      FORMAT(/,3X,13(F8.5,2X),/)
C- 60      CONTINUE
      DO 65 J=1,NE
      DO 63 J=2,NA
      A(I,J-1)=A1(I,J)
63      CONTINUE
64      CONTINUE
      DO 67 I=2,NE
      A(I,I-1)=1.
67      CONTINUE
      DO 75 I=1,NE
      WRITE(5,70)(A(I,J),J=1,NE)
C- 70      FORMAT(/,3X,12(F8.5,2X),/)
75      CONTINUE
      CALL COPIA(A,A2,NE2)
C-***** INICIO DO ALGORITMO DE ITERACAO DE POLITICAS.
C- PASSO 1 = RESOLUCAO DO SISTEMA DE EQUACOES LINEARES UTILIZANDO
C- A ROTINA LNPRV DO PACOTE FORTRAN/NUMERALS.
      CALL LNPRV(NE,NE,A2,LU,H,X,DIGITS,DETERM)
      DO 77 I=1,NE
C-      WRITE(5,76)I,X(I)
```

```

      SPW(I,J,J)=0.
2150  CONTINUE
      DO 2400 J=K,L
      CW(I,J)=RK+ABS(J-NTB(I))+W(I,NTB(I),NF)
      DO 2200 J1=0,N
      SPW(I,J,J)=-P(I,J,J1,J)+W(J1,J,NF)*SPW(I,J,J)
2200  CONTINUE
      TP(I,J,J,NF)=C(I,J,J)-G(NF)+T(I,J,J)+CPH(I,J,J)
C-   WRITE(5,850) I,J,CW(I,J),I,NTB(I),NF,W(I,NTB(I),NF),
C-   I,J,J,SPW(I,J,J),I,J,J,NF,TP(I,J,J,NF)
      IF(CW(I,J).LT.TP(I,J,J,NF)) GO TO 2600
2400  CONTINUE
      NTR(I)=L+1
      GO TO 2900
2400  I=L-1
      IF(L.GE.NT(I)) GO TO 2000
2400  NTR(I)=NT(I)
2600  CONTINUE
      IF(NTB(I-1).GT.NTR(I)) NTR(I)=NTB(I-1)
3200  CONTINUE
C-***** PASSO 3 = COMPARACAO DAS POLITICAS.
      DO 3200 I=0,N-1
      IF(NS1B(I),NF,NS1(I)) GO TO 3900
      IF(NT1B(I),NF,NT1(I)) GO TO 3900
      IF(NTR(I),NF,NT(I)) GO TO 3900
      IF(NSB(I),NF,NS(I)) GO TO 3900
3200  CONTINUE
      WRITE(5,*)NH,ND,NC,MJ,LAMB,H,CW,BK,CP
      WRITE(5,3400)
3400  FORMAT(/,5X, " ***** ATINGIDO CRITERIO DE OTIMALIDADE ***** ",/)
      WRITE(5,3600)
3400  FORMAT(/,1,5X, " ***** POLITICA OTIMA ***** ",/)
      DO 3450 I=0,N
      WRITE(5,3800)I,NS(I),I,NS1(I),I,NT1(I),I,NT(I)
3400  FORMAT(/,3X,"NS(",I2,") = ",I2,5X,"NS1(",I2,") = ",I2,
-   5X,"NT1(",I2,") = ",I2,5X,"NT(",I2,") = ",I2,/)
3450  CONTINUE
      WRITE(5,3820)NF,G(NF)
3470  FORMAT(/,5X,"NUMERO DE ITERACOES = ",I2,/,4X,
-   "CUSTO MEDIO ESPERADO A LONGO PRAZO = ",F9,4)
      DO 3845 I=0,N
      DO 3844 J=0,NC
      C-   WRITE(5,3840)I,J,NF,W(I,J,NF)
C-3840  FORMAT(/,3X,"W(",I2,I2,I2,") = ",F10,4)
      DO 3843 K=0,NC
      C-   SPW(I,J,K)=0.
      DO 3841 J1=0,N
      C-   SPW(I,J,K)=SPW(I,J,K)-P(I,J,J1,K)+W(J1,K,NF)
C-3841  CONTINUE
      C-   TP(I,J,K,NF)=C(I,J,K)-G(NF)+T(I,J,K)+SPW(I,J,K)
      C-   WRITE(5,3842)I,J,K,NF,TP(I,J,K,NF)
C-3842  FORMAT(/,3X,"TP(",I2,I2,I2,I2,") = ",F10,4)
C-3843  CONTINUE
C-3844  CONTINUE
C-3845  CONTINUE
      GO TO 4200
C-***** SUBSTITUICAO DA POLITICA ANTERIOR PELA NOVA AGORA CALCULADA.
3900  DO 4000 I=0,N-1
      NS(I)=NS1(I)
      NS1(I)=NS1B(I)

```

```
      NT1(I)=NT1B(I)
      NT(I)=NTB(I)
      WRITE(5,3950)I,NSB(I),NS1B(I),NT1B(I),NTB(I)
3950  FORMAT(/,5X,"I = ",I1,5X,"NSB = ",I2,5X,"NS1B = ",I2,
-      5X,"NT1B = ",I2,5X,"NTB = ",I2)
4000  CONTINUE
      NF=NF+1
      GO TO 41
4200  STOP
      END
```



C-\*\*\*\*+ SUBROTINA POLITI DETERMINA AS ACOES A SEREM TOMADAS DE ACORDO  
C. COM A POLITICA ATUAL.

```
      SUBROUTINE POLIT(NS,NSI,NTI,NT,N,NC,JS)
      DIMENSION NS(-1:40),
-          NSI(0:40),
-          NTI(0:40),
-          NT(-1:40),
-          JS(0:40,0:5)
      DO 40 I=0,N
          DO 30 J=0,NC
              JS(I,J)=J
              IF(J.LE.NS(I)) JS(I,J)=NSI(I)
              IF(J.GE.NT(I)) JS(I,J)=NTI(I)
30          CONTINUE
40          CONTINUE
      RETURN
      END
```

```

C=***** SUBROTINA MONTA1: MONTA A MATRIZ DOS COEFICIENTES PARA
C= RESOLUCAO DO SISTEMA DE EQUACOES LINEARES.

      SUBROUTINE MONTA1(P,N,NC,JS,T,A1)
      DIMENSION P(0:40,0:5,-1:40,0:5),
      =          A1(0:253,0:254),
      =          JS(0:40,0:5),
      =          T(0:40,0:5,0:5)
      NA=(N+1)*(NC+1)
      I1=1
      DO 20 I=0,N
      DO 15 J=0,NC
      IS=0
      I1=I+1
      J1=JS(I,J)
      A1(I1,J1)=P(I,J,IS,JS(I,J))
C=      WRITE(5,1)I1,JS(I,J),A1(I1,JS(I,J)),I,J,IS,JS(I,J),
C=      =          P(I,J,IS,JS(I,J))
C= 1      FORMAT(/,5X,"A1(",I2,I2,") = ",F11.5,10X,"P(",I2,I2,
C=      =          I2,I2,") = ",F11.5)
      DO 10 IS=1,N
      J1=J1+NC+1
      A1(I1,J1)=P(I,J,IS,JS(I,J))
C=      WRITE(5,1)I1,J1,A1(I1,J1),I,J,IS,JS(I,J),
C=      =          P(I,J,IS,JS(I,J))
10      CONTINUE
      A1(I1,NA)=T(I,J,JS(I,J))
C=      WRITE(5,2)I1,NA,A1(I1,NA),I,J,JS(I,J),T(I,J,JS(I,J))
C= 2      FORMAT(/,5X,"A1(",I2,I2,") = ",F11.5,10X,"T(",I2,
C=      =          I2,I2,") = ",F11.5)
15      CONTINUE
20      CONTINUE
      RETURN
      END

```

C-\*\*\*\*\* SUBROTINA COPIA: ARRITRA UM DOS W(I,S,A) COMO SENDO ZERO.

```
      SUBROUTINE COPIA(A,A2,NE2)
      DIMENSION A(250,250),
      -      A2(NE2)
      NE=NE2
      DO 20 I=1,NE
      DO 10 J=1,NE
      A2((J-1)*NE+I)=A(I,J)
10      CONTINUE
20      CONTINUE
      RETURN
      END
```