Expoentes de Lyapunov de mapas e séries temporais

Andriana S. L. O. Campanharo Fernando M. Ramos Elbert E. N. Macau
Laboratório Associado de Computação e Matemática Aplicada (LAC)
Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE)
andriana@lac.inpe.br fernando@lac.inpe.br elbert@lac.inpe.br

Resumo

Neste trabalho foi implementado algoritmos que estimam os expoentes de Lyapunov a partir de séries temporais bem como a partir de um sistema dinâmico determinístico.

Palavras-chave Sistemas dinâmicos caóticos, expoentes de Lyapunov e séries temporais.

1. Introdução

Muitas equações não lineares são modelos matemáticos de sistemas físicos difícieis de serem analisados: sistemas não estáveis ou de comportamento complexo. Alguns modelos matemáticos além de serem muito complicados, as vezes, são impossíveis de serem resolvidos de forma exata. O estudo destes sistemas pode ser feito mediante a utilização da teoria dos sistemas caóticos.

As principais características dos sistemas caóticos são a sensibilidade a condições iniciais; espectro contínuo de frequência, caracterizando um comportamento aperiódico e a invariança de escala, significando uma certa estrutura hierárquica com características de auto-similaridade e estacionaridade.

Dentre os principais métodos para se caracterizar um sistema caótico destaca-se o **expoente de Lyapunov**.

2. Expoente de Lyapunov

Uma evolução caótica pode ser vista como resultado da combinação de dobras com um número infinito de expansões em pelo menos uma direção e contrações em outras direções. Como consequência, é extremamente difícil, senão impossível na prática, seguir a evolução de um fluxo caótico quando a divergência das trajetórias sobre o intervalo caótico torna-se rápida. Para pontos fixos de sistemas dinâmicos a estabilidade é definida pela derivada do sistema. Por exemplo, se x_1 é um ponto fixo de um mapa unidensional e $f'(x_1) = a > 1$, então a órbita de cada ponto fixo de x próximo a x_1 irá se separar de x_1 numa taxa multiplicativa de aproximadamente a por iteração, até que a órbita de x se afaste significantemente de x_1. Isto é, a distância entre $f^n(x)$ e $f^n(x_1) = x_1$ será aumentada aproximadamente $a > 1$ para cada iteração de f, segundo Sansão (2003).

Para um ponto periódico k, deve-se olhar a derivada da k-ésima iteração, onde, pela regra da cadeia, é o produto das derivadas, ou das jacobianas dos k pontos da órbita. Suponha que o produto das derivadas, no caso de mapas, seja $A > 1$. Então a órbita de cada vizinho de x do ponto periódico x_1 se afasta de x_1 numa taxa de aproximadamente A após cada iteração k. Este é um resultado acumulativo de separação, o sistema leva k iterações do mapa para se afastar uma distância A. Faz sentido então descrever a taxa multiplicativa média de separação como $A^{\frac{1}{k}}$ por iteração.

Para medir a taxa de divergência de trajetórias e portanto quantificar a dependência sensitiva às condições iniciais utiliza-se os expoentes de Lyapunov ou números de Lyapunov. A significância do conceito do número de Lyapunov é que este pode ser aplicado a órbitas não-periódicas. Uma característica de órbitas caóticas é a sensibilidade a condições iniciais, ou seja, a eventual separação das órbitas de pontos próximos a condição inicial a medida que o sistema evolui. De fato, a definição de uma órbita caótica é aquela que não atende a periodicidade assintótica e cujo número de Lyapunov é maior que 1.

Uma evolução temporal pode ser descrita por um sistema dinâmico diferenciável no espaço de fase de possíveis dimensões. Para um mapa sobre $\mathbb{R}^m$, cada órbita tem m números de Lyapunov, que medem a taxa de separação do ponto da órbita atual ao longo de m direções ortogonais. Essas direções são determinadas pela dinâmica do mapa. A primeira será a direção ao longo que a separação entre pontos próximos é a maior (ou que é menos contraída, se o mapa é contraído em todas as direções). A segunda será a direção de maior separação, escolhida de todas as direções perpendiculares à primeira. A terceira terá o maior esticamento de todas as direções perpendiculares às primeiras duas direções, e assim por diante. O fator de esticamento em cada uma dessas direções escolhidas são os números de Lyapunov da órbita, conforme Eckmann et al. (1986).

Definicão Seja f um mapa suave sobre $\mathbb{R}^m$, seja $J_n = Df_n(v_0)$ e para $k = 1, \ldots, m$ seja r_k^m o comprimento do

k-ésimo maior eixo ortogonal do elipsóide $J_n U$ para uma órbita com ponto inicial v_0. Então r_k^m mede a contração ou expansão próxima da órbita de v_0 durante as primeiras n iterações. O k-ésimo **número de Luapunov** de v_0 é definido por

$$L_k = \lim_{n \to \infty} (r_k^n)^{\frac{1}{n}}$$

se este limite existir. O k-ésimo **expoente de Lyapunov** de v_0 é $h_k = \ln L_k$. Note que tem-se embutido nesta definição a propriedade que $L_1 \geq L_2 \geq \ldots \geq L_m$ e $h_1 \geq h_2 \geq \ldots \geq h_m$, segundo Yorke et al. (1996).

3. Conclusões

Constata-se que nos pontos de bifurcações o expoente de Lyapunov é nulo, negativo nas regiões periódicas e positivo nas regiões caóticas.

Referências

Eckmann, J. P., Kamphorst, S. O., Ruelle, D., and Ciliberto, S. (1986). Liapunov exponents from time series. *Physical Review A*, 34(6):4971.

Sansão, J. C. (2003). Aspectos de mapas caóticos acoplados para processamento de informações. *Inpe*, 1(1):64–84.

Yorke, J. A., Alligood, K. T., and Saurer, T. D. (1996). *CHAOS an introduction to dynamical systems*. Springer, 2a. edition.