

# Uso da transformada wavelet complexa dual-tree na detecção da sincronização de fase entre sistemas de Rössler em dinâmica caótica.

Maria Teodora Ferreira<sup>1</sup>, Rosângela Follmann<sup>2</sup>,  
Margarete Oliveira Domingues<sup>2</sup>, Elbert. E. N. Macau<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Programa de Doutorado em Computação Aplicada – CAP  
Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais – INPE

<sup>2</sup>Laboratório Associado de Computação e Matemática Aplicada – LAC  
Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais – INPE

{mteodoraf25, rosangelafollmann}@gmail.com

{margarete, elbert}@lac.inpe.br

**Abstract.** *In this work we evaluated the use of the Dual-Tree Complex Wavelet Transform (DTCWT) to calculate the phase of a chaotic system, and in sequence the detection of the phenomenon of phase synchronization between two coupled Rössler systems in a chaotic regime.*

**Resumo.** *Neste trabalho avalia-se a utilização da Transformada Wavelet Complexa Dual-Tree (DTCWT) para o cálculo da fase de um sistema caótico e posterior detecção do fenômeno da sincronização de fase entre dois sistemas de Rössler acoplados em regime caótico.*

**Palavras-chave:** *sincronização de fase, transformada wavelet, sistema de Rössler.*

## 1. Introdução

O fenômeno de sincronização é o processo onde dois ou mais sistemas interagem entre si e alteram seus ritmos de modo a adquirirem uma dinâmica comum [Pikovsky et al. 2003].

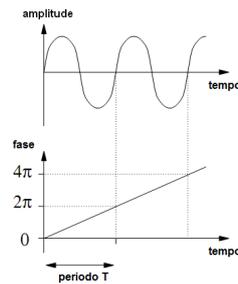
Neste trabalho, o interesse é a sincronização de fase, a qual ocorre quando dois ou mais sistemas caóticos acoplados desenvolvem sincronismo de suas fases, enquanto suas amplitudes continuam a evoluir de forma não correlacionada [Rosenblum et al. 2001].

Para estudar a sincronização de fase entre sistemas é necessário inicialmente calcular a fase de cada sistema em estudo. Isto não é trivial para o caso de sistemas caóticos, sendo que o conceito original de fase é introduzido para sistemas periódicos com dinâmica representada no espaço de fase por ciclos limite. Para estes sistemas, a fase é uma função de tempo monotonicamente crescente a qual cresce a cada  $2\pi$  no prazo de um ciclo oscilatório, conforme pode ser visto na Figura 1. A extensão deste conceito para sistemas caóticos não é necessariamente simples e um número de abordagens tem sido propostas [Rosenblum et al. 2001].

Depois de calculada a fase associada a cada um dos sistemas caóticos acoplados, é então verificada se a condição

$$|\phi_1(t) - \phi_2(t)| < const \leq 2\pi \quad (1)$$

é satisfeita, onde  $\phi_1(t)$  e  $\phi_2(t)$  são as fases dos sistemas 1 e 2, respectivamente. Caso essa condição seja satisfeita, os sistemas estão sincronizados em fase [Pikovsky et al. 2003].



**Figura 1.** A definição de fase. No painel superior tem-se a amplitude versus o tempo e no inferior tem-se a fase versus o tempo. Adaptado de [Pikovsky et al. 2003].

Uma nova abordagem, que vem recebendo destaque, para o cálculo da fase de um sistema caótico é a transformada *wavelet* [Hramov et al. 2005, Koronovskii and Hramov 2004].

Kingsbury introduziu a Transformada *Wavelet* Complexa *Dual-Tree* (DTCWT) como uma forma de transformada *wavelet* discreta complexa, a qual gera coeficientes complexos usando uma árvore dupla de filtros *wavelets* para obter sua parte real e imaginária [Kingsbury 2000, Selesnick et al. 2005]. A DTCWT emprega duas transformadas *wavelet* discreta; sendo que a primeira resulta na parte real dos coeficientes enquanto a segunda na parte imaginária dos coeficientes *wavelet* [Selesnick et al. 2005].

Portanto, o objetivo deste trabalho é utilizar a transformada *wavelet* complexa *dual-tree* para calcular a fase e, posteriormente, encontrar a diferença de fase entre dois sistemas dinâmicos caóticos de Rössler acoplados com o intuito de investigar se ocorre o fenômeno de sincronização de fase entre os mesmos.

## 2. Metodologia

O sistema estudado são dois sistemas de Rössler acoplados ambos em regime caótico, o qual é descrito matematicamente pelas seguintes equações diferenciais:

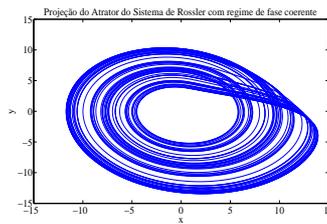
$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= -0.98 y_1 - z_1 + \eta (x_2 - x_1) \\
 \dot{y}_1 &= 0.98 x_1 + a y_1 \\
 \dot{z}_1 &= 0.4 + z_1 (x_1 - 8.5) \\
 \dot{x}_2 &= -1.03 y_2 - z_2 + \eta (x_2 - x_1) \\
 \dot{y}_2 &= 1.03 x_2 + a y_2 \\
 \dot{z}_2 &= 0.4 + z_2 (x_2 - 8.5),
 \end{aligned} \tag{2}$$

o índice 1 e 2 refere-se ao sistema 1 e 2 de Rössler, respectivamente. O parâmetro  $a$  muda a dinâmica do atrator no espaço de fase e  $\eta$  define a intensidade do acoplamento entre os sistemas.

Um sistema encontra-se em regime de fase coerente quando a projeção do atrator no plano é topologicamente simples e apresenta um centro de rotação bem definido. Na Figura 2 é ilustrada a projeção do atrator do sistema de Rössler neste regime de fase coerente.

A Tabela 1 apresenta os grupos e os casos analisados.

*Análise Tradicional*



**Figura 2. Ilustração da projeção do atrator caótico (coordenada  $x$  versus  $y$ ) de Rössler no regime de fase coerente considerando  $a = 0.16$ .**

**Tabela 1. Grupos e os casos analisados, bem como o respectivo valor de  $\eta$ , quando considera-se o sistema de Rössler acoplado em regime de fase coerente.**

Grupo	Caso	Valor de $\eta$
não sincronizado	1	0.01
não sincronizado	2	0.015
não sincronizado	3	0.02
não sincronizado	4	0.025
platôs de sincronização	5	0.045
platôs de sincronização	6	0.047
platôs de sincronização	7	0.05
platôs de sincronização	8	0.051
sincronização de fase	9	0.055
sincronização de fase	10	0.057
sincronização de fase	11	0.06
sincronização de fase	12	0.062

A fase  $\phi(t)$  pode ser introduzida como o ângulo no sistema de coordenadas polares sobre o plano  $(x, y)$  dado da seguinte forma:

$$\phi_P = \arctan\left(\frac{y}{x}\right). \quad (3)$$

Depois de calculada a fase de cada sistema, calcula-se a diferença de fase de acordo com a equação 1 e verifica se a condição é satisfeita.

#### *Método Wavelet*

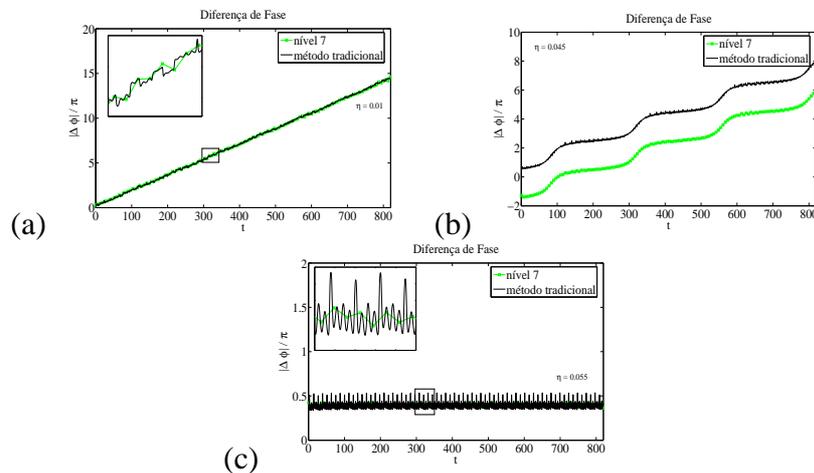
A entrada do algoritmo é a coordenada  $x$  de cada sistema em estudo.

O sinal de entrada é decomposto em 10 escalas de decomposição, sendo que em cada escala é calculada a energia e, caso exista energia na escala, em seguida calcula-se a fase referente a esta escala.

Depois de uma pré-análise de todas as energias de todas as 10 escalas de decomposição, verificou-se que a escala caracterizada pelo maior valor de energia no espectro *wavelet* é considerada a escala adequada e suficiente para o cálculo da fase correta do sistema caótico. Em seguida, depois de calculada a fase de cada sistema, é calculada a diferença de fase e verifica-se se a condição de sincronização de fase é satisfeita.

### 3. Resultados

A Figura 3 ilustra o gráfico da diferença de fase de um dos quatro casos de cada grupo analisado de acordo com a Tabela 1, sendo que tem-se no item (a) caso 1, (b) caso 5 e (c) caso 9.



**Figura 3. Ilustração do gráfico da diferença de fase. Apresenta-se a diferença de fase considerando o método tradicional e o método wavelet, para um dos quatro casos de cada grupo analisado de acordo com a Tabela 1.**

### 4. Conclusões

A identificação da sincronização de fase utilizando o método proposto apresentou resultados consistentes em comparação a metodologia tradicional e superou as deficiências presentes nas abordagens tradicionais existentes para o cálculo da fase em sistemas caóticos.

Em síntese, um novo método para o cálculo da fase de um sistema caótico foi proposto. Este método é baseado na transformada *wavelet* complexa *dual-tree* e na análise em decomposição do sinal em escalas.

### Referências

- Hramov, A., Koronovskii, A., and Levin, Y. (2005). Synchronization of chaotic oscillator time scales. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 100:784–794.
- Kingsbury, N. (2000). A dual-tree complex wavelet transform with improved orthogonality and symmetry properties.
- Koronovskii, A. and Hramov, A. (2004). Chaotic phase synchronization studied by means of continuous wavelet transform. *Technical Physics Letters*, 30:587–590.
- Pikovsky, A., Rosenblum, M., and Kurths, J. (2003). *Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences*. Cambridge University Press, New York.
- Rosenblum, M., Pikovsky, A., Kurths, J., Schafer, C., and Tass, P. (2001). Chapter 9 phase synchronization: From theory to data analysis. *Handbook of Biological Physics*, 4(C):279–321.
- Selesnick, I. W., Baraniuk, R., and Kingsbury, N. (2005). The dual-tree complex wavelet transform. *IEEE Signal Processing Magazine*, 22(6):123–151.