



20 e 21 de outubro
Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE
São José dos Campos - SP

Transferência orbital envolvendo uma aproximação do tipo 'Patched Conic'

Francisco J. T. Salazar¹, Elbert E. N. Macau², Othon C. Winter³

¹Programa de Doutorado em Computação Aplicada – CAP
Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais – INPE

²Laboratório Associado de Computação e Matemática Aplicada – LAC
Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais – INPE

³Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá – FEG
Universidade Estadual Paulista – UNESP

e7940@hotmail.com, elbert@lac.inpe.br, ocwinter@feg.unesp.br

Abstract. *In this work we present a study on the transfer orbit of a spacecraft in geocentric orbit for a orbit around the Moon. The method used for this problem is based on the approach known as 'patched conic' in which the three-body problem that involves : Earth, Moon and spacecraft, is divided into two problems of two bodies: Earth - spacecraft and Moon - spacecraft. Thus, the trajectory followed by the spacecraft is separated into two parts: first, when the spacecraft is within the Earth's sphere of influence, and second, when the spacecraft enters into the Moon's sphere of influence. Therefore, the trajectory of escape from Earth and arrival to the Moon, and also the optimal time and fuel spent on travel can be easily determined using the known results of the two-body problem.*

Resumo. *Neste trabalho apresentamos um estudo referente à transferência orbital de uma sonda em órbita geocêntrica para uma órbita ao redor da Lua. O método utilizado para este problema baseia-se na aproximação conhecida como 'patched conic', em que, o problema que envolve três corpos: Terra, Lua e sonda, é dividido em dois problemas de dois corpos: Terra - sonda e Lua - sonda. Desta forma, a trajetória seguida pela sonda é separada em dois instantes: o primeiro, quando a sonda está dentro da esfera de influência da Terra, e o segundo quando a sonda ingressa na esfera de influência da Lua. Assim, as trajetórias de escape da Terra e de chegada à Lua como também o tempo e combustível ótimos gastos na viagem podem ser determinadas facilmente usando os resultados conhecidos do problema de dois corpos.*

Palavras-chave: *Patched Conic, Esfera de influência, Fronteira de Pareto.*

1. Introdução

O problema dos três corpos é um dos casos mais estudados na mecânica celeste [Bate et al. 1971], pois embora que ele 'físicamente' seja um caso muito simples, o problema de três corpos não é um sistema integrável [Schaub and Junkins 2003]. Porém, é possível aproximar uma solução particular desse problema supondo que um dos corpos possui uma massa muito menor com relação aos outros dois corpos, isto é, a atração gravitacional que o corpo menor exerce sobre os outros corpos é desprezível. Desta forma, resolvendo numericamente um sistema de três equações diferenciais não-lineares de segunda ordem, esta aproximação permite determinar a trajetória do menor corpo e estudar a sua dinâmica.

A aproximação descrita anteriormente, porém, precisa da resolução numérica de um sistema de equações diferenciais. É justamente neste ponto onde é possível fazer mais uma suposição e evitar a integração numérica. Por exemplo, suponhamos que temos o caso Terra, Lua e sonda. Este problema de três corpos satisfaz a primeira aproximação, pois uma sonda possui uma massa muito menor do que a massa da Terra e da Lua. Por outro lado, a Terra possui uma massa muito maior do que a massa da Lua. Portanto, enquanto a sonda permaneça o suficientemente perto da Terra, a atração gravitacional da Lua pode ser desprezada. Similarmente, se a sonda está o suficientemente perto da Lua, a atração da Terra pode ser desprezada. Daí que, dependendo da proximidade da sonda a um dos corpos, Terra ou Lua, o problema de três corpos, pode ser reduzido a dois problemas de dois corpos, onde expressões analíticas para a determinação da órbita são conhecidas. A união destas duas aproximações é conhecida como uma aproximação do tipo 'Patched Conic' [Battin 1987].

Um segundo conceito que entra em ação para esta solução aproximada do problema dos três corpos é a esfera de influência gravitacional. Note-se que anteriormente foi dito que o problema pode ser reduzido a um problema de dois corpos enquanto a sonda estiver o *suficientemente* perto da Terra ou da Lua. Mas, dentro de quais limites é possível desprezar a atração gravitacional da Terra ou da Lua? Para responder esta questão, surge o conceito da *esfera de influência*, que nos permite 'estimar' o raio da esfera em que a força de atração gravitacional de um dos corpos afeta de forma proeminente o corpo menor. Nas próximas seções apresentaremos uma expressão analítica para determinar o raio da esfera de influência da Lua.

Neste trabalho, a aproximação do tipo 'Patched Conic' é aplicada numa transferência orbital para uma sonda ao redor da Terra em órbita geocêntrica para chegar e orbitar a Lua. Na primeira parte, a sonda é impulsada em direção à Lua. Enquanto a sonda não esteja dentro da esfera de influência da Lua, o problema será descrito como Terra-sonda. Nele, utilizando as expressões analíticas do problema de dois corpos, pode-se determinar o tempo de viagem e o ângulo de fase entre a Terra e a Lua no instante em que a sonda cruza a esfera de influência da Lua. Similarmente, quando a sonda ingressa na esfera de influência da Lua, o problema é descrito como Lua-sonda. Mais uma vez, pode-se determinar facilmente a distância mínima entre a sonda e a Lua, assim como o valor do segundo empuxo negativo necessário para colocar a sonda em órbita ao redor da Lua.

Finalmente, dado que é possível determinar o tempo de viagem e o combustível usado nos dois empuxos, pode-se calcular o vetor ótimo tempo-combustível para esta

transferência utilizando o conceito de fronteira de Pareto.

2. Aproximação do tipo 'Patched Conic'

Quando o objetivo é levar uma sonda a partir da Terra até a Lua, e colocá-la em órbita elíptica ao redor deste corpo celeste, uma primeira aproximação é levar em conta só a força de atração da Terra enquanto a sonda está girando ao redor da Terra e recebe o primeiro empuxo positivo para sair da sua órbita geocêntrica. A partir desse instante, a sonda viaja seguindo uma trajetória elíptica, hiperbólica ou parabólica, o que vai depender da energia que a sonda possua no instante em que abandona sua órbita geocêntrica. Durante a trajetória, todo o movimento é equacionado como se fosse um problema de dois corpos.

Uma segunda aproximação acontece no instante em que a força gravitacional da Terra pode ser desprezada e só a força de atração da Lua é considerada. Isto é, temos agora um segundo problema de dois corpos. Porém, a questão é: Qual é o instante que em isso acontece? Para responder esta pergunta precisamos utilizar o conceito da esfera de influência sugerida por Laplace. Basicamente, a esfera de influência de um corpo celeste determina a região no espaço em que as forças gravitacionais externas podem ser desprezadas como mostra a Figura 1.

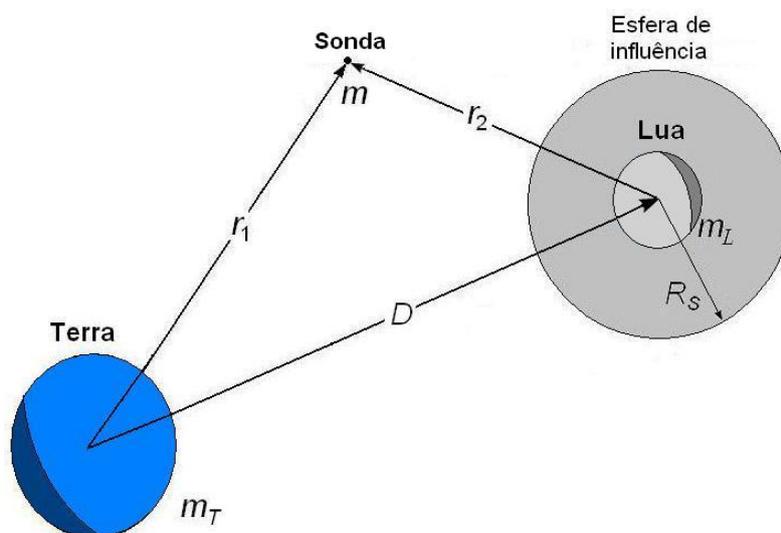


Figura 1. Esfera de influência da Lua

Esta esfera centrada na Lua possui um raio R_S , que é computado pela seguinte expressão:

$$R_S = D \left(\frac{m_L}{m_T} \right)^{2/5} \quad (1)$$

onde D representa a distância entre a Terra e a Lua, e m_T e m_L representam a massa da Terra e a Lua, respectivamente. A dedução desta expressão pode ser vista em [Battin 1987]. Utilizando os valores da Tabela 1 na Eq. 1, temos que

$$R_S = 66300 \text{ km}$$

o que equivale a 1/6 da distância entre a Lua e a Terra.

A partir do instante em que a sonda entra na esfera de influência da Lua, ela se aproxima à Lua seguindo uma trajetória hiperbólica ou parabólica, de tal forma que no instante em que a distância entre a sonda e a Lua seja mínima, um segundo empuxo negativo é feito para reduzir a energia da sonda, e conseguir que ela fique em órbita elíptica.

Tabela 1. Parâmetros da Terra e da Lua

Parâmetro	Valor	Unidade
m_T	5.974E+24	kg
m_L	7.349E+22	kg
D	3.844E+05	km
ω_L	2.649E-03	rad/s
μ_T	3.986E+08	km ³ s ⁻²
μ_L	4.902E+06	km ³ s ⁻²

2.1. Órbita da Partida Geocêntrica

A Figura 2 mostra a geometria da órbita de partida. Em nosso caso, vamos supor que a sonda inicialmente descreve uma órbita circular. As quatro quantidades que determinam completamente a geometria da partida são

$$r_0, v_0, \phi_0, \lambda_1$$

onde r_0 é o raio da órbita, v_0 é a velocidade de partida, ϕ_0 é o ângulo de partida e λ_1 é o ângulo de fase que especifica o ponto em que a trajetória da sonda cruza a esfera de influência da Lua.

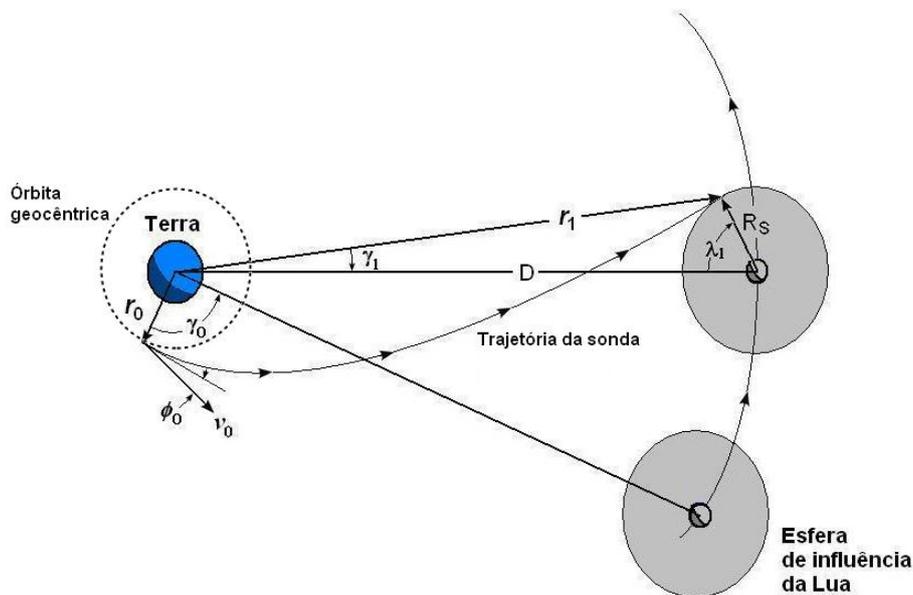


Figura 2. Ilustração da partida geocêntrica da sonda

Dadas estas quatro quantidades é possível determinar as condições de chegada, r_1 , v_1 , ϕ_1 e λ_1 (ver Figura 4) utilizando a lei dos cossenos e a conservação da energia e o momento angular. De fato,

$$r_1 = \sqrt{D^2 + R_S^2 - 2DR_S \cos \lambda_1} \quad (2)$$

$$v_1 = \sqrt{2 \left(\mathcal{E} + \frac{\mu_T}{r_1} \right)} \quad (3)$$

$$\phi_1 = \cos^{-1} \left(\frac{h}{r_1 v_1} \right) \quad (4)$$

$$\gamma_1 = \sin^{-1} \left(\frac{R_S}{r_1} \sin \lambda_1 \right) \quad (5)$$

onde \mathcal{E} e h representam a energia e o momento angular da trajetória e que são dados por

$$\mathcal{E} = \frac{v_0^2}{2} - \frac{\mu_T}{r_0} \quad (6)$$

$$h = r_0 v_0 \cos \phi_0 \quad (7)$$

$$(8)$$

O tempo de vôo, Δt , desde o instante t_0 da injeção até o instante t_1 em que a sonda cruza a esfera de influência da Lua, é facilmente calculado uma vez que os ângulos entre a sonda e raio vetor r_0 , f_0 e f_1 , são conhecidos naqueles instantes. Para isto, precisamos utilizar os parâmetros da equação polar da cônica, que são dados por (ver Fig. 3)

$$p = \frac{h^2}{\mu_T} \quad (9)$$

$$a = -\frac{\mu_T}{2\mathcal{E}} \quad (10)$$

$$e = \sqrt{1 - \frac{p}{a}} \quad (11)$$

onde a equação polar da cônica é dada por

$$r = \frac{p}{1 + e \cos f} \quad (12)$$

Portanto f_0 e f_1 seguem da equação polar da cônica:

$$f_0 = \cos^{-1} \left(\frac{p - r_0}{r_0 e} \right) \quad (13)$$

$$f_1 = \cos^{-1} \left(\frac{p - r_1}{r_1 e} \right) \quad (14)$$

Assim, conhecendo o valor de f_0 e f_1 , o tempo de vôo é obtido finalmente a partir de

$$\Delta t = \sqrt{\frac{a^3}{\mu_T}} [(E_1 - e \sin E_1) - (E_0 - e \sin E_0)] \quad (15)$$

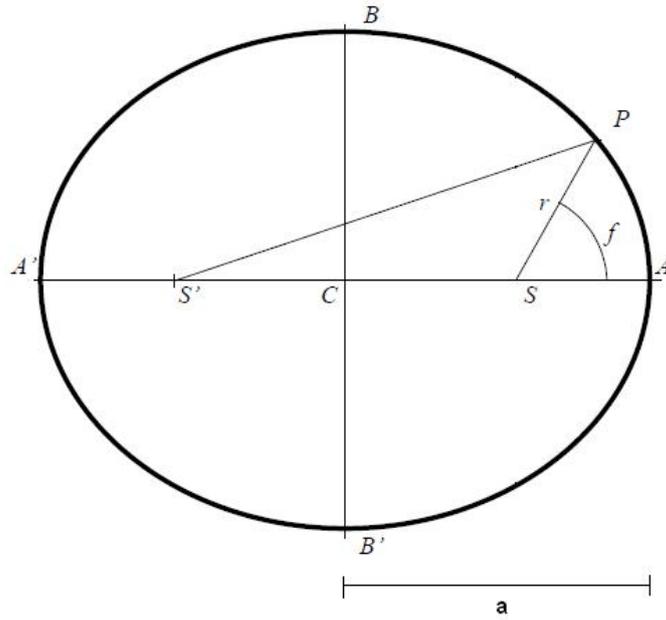


Figura 3. Parâmetros da cônica

onde

$$E_0 = \cos^{-1} \left(\frac{e + \cos f_0}{1 + e \cos f_0} \right) \quad (16)$$

$$E_1 = \cos^{-1} \left(\frac{e + \cos f_1}{1 + e \cos f_1} \right) \quad (17)$$

Note-se que o ângulo de fase na partida da sonda, γ_0 , também pode ser obtido agora que conhecemos o tempo de vôo. A Lua se movimenta nesse tempo o equivalente a um ângulo $\omega_L (t_1 - t_0)$, onde ω_L é a velocidade angular da Lua ao redor da Terra. Dado que em nosso modelo a órbita da Lua é considerada circular, então temos que

$$\gamma_0 = f_1 - f_0 - \lambda_1 - \omega_L \Delta t \quad (18)$$

Adicionalmente, dado que estamos supondo que no início a órbita geocêntrica da sonda é circular, então o custo do primeiro empuxo, Δv_0 é dado por:

$$\Delta v_0 = v_0 - \sqrt{\frac{\mu_T}{r_0}} \quad (19)$$

2.2. Órbita de Chegada

Para determinar a trajetória da sonda dentro da esfera de influência da Lua onde só a força de atração da Lua é considerada, temos primeiramente que o vector velocidade da sonda relativa à Lua é

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_L$$

onde \mathbf{v}_L é o vector velocidade da Lua com respeito ao centro da Terra, como ilustra a Figura 4.

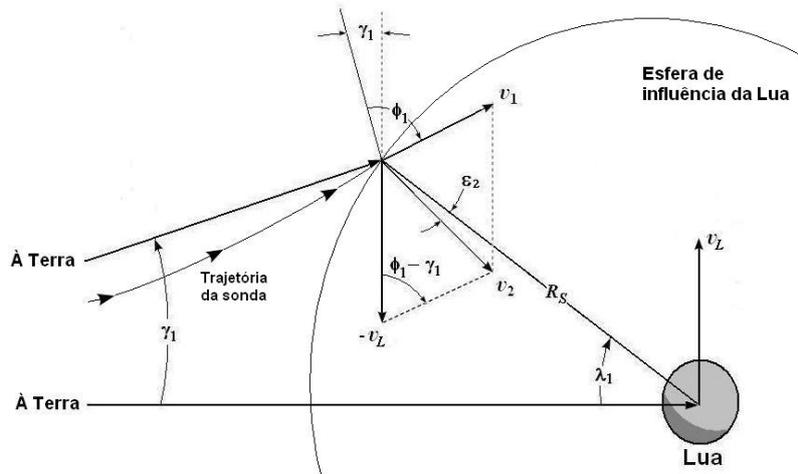


Figura 4. Ilustração da órbita da chegada à Lua

Utilizando a lei dos cossenos ao triângulo vetorial na Figura 4, podemos obter a velocidade de chegada relativa à Lua, v_2 , dada por

$$v_2 = \sqrt{v_1^2 + v_L^2 - 2v_1v_L \cos(\phi_1 - \gamma_1)} \quad (20)$$

Similarmente, o ângulo ϵ_2 , que define a direção do vetor velocidade v_2 relativo ao centro da Lua, é dado por

$$\epsilon_2 = \sin^{-1} \left[\frac{v_M}{v_2} \cos \lambda_1 - \frac{v_1}{v_2} \cos(\lambda_1 + \gamma_1 - \phi_1) \right] \quad (21)$$

Desta forma, conhecendo as condições iniciais r_2 , v_2 , e ϵ_2 , onde $r_2 = R_S$, todas elas com respeito à Lua, é possível determinar a distância mais curta da sonda ao centro da Lua, como também a velocidade que possui nesse ponto. É precisamente neste ponto onde será feito o segundo empuxo, paralelo à trajetória relativa à Lua, de tal forma que a sonda seja colocada em órbita circular ao redor da Lua. Note-se que uma restrição importante é a distância mais curta entre a sonda e a Lua tem que ser maior do que o raio da Lua, caso contrário, vamos ter um caso de colisão.

Assim, similarmente a como foi feito no caso da trajetória de partida, os parâmetros da equação polar da cônica neste caso podem ser calculados a partir de

$$p = \frac{h^2}{\mu_L} \quad (22)$$

$$e = \sqrt{1 + \frac{2\mathcal{E}h^2}{\mu_L^2}} \quad (23)$$

onde a energia e o momento relativos ao centro da Lua são dados por

$$\mathcal{E} = \frac{v_2^2}{2} - \frac{\mu_L}{r_2} \quad (24)$$

$$h = r_2 v_2 \sin \epsilon_2 \quad (25)$$

O valor da distância mais curta e a velocidade neste ponto são obtidos a partir de

$$r_p = \frac{p}{1+e} \quad (26)$$

$$v_p = \sqrt{2 \left(\mathcal{E} + \frac{\mu_L}{r_p} \right)} \quad (27)$$

Finalmente, o valor do segundo empuxo para colocar a sonda em órbita circular ao redor da Lua é igual a

$$\Delta v_p = \sqrt{\frac{\mu_L}{r_p}} - v_p \quad (28)$$

Desse modo, o combustível total, Δv , é dado por

$$\Delta v = |\Delta v_0| + |\Delta v_p| \quad (29)$$

3. Fronteira de Pareto

O problema de otimização tratado neste estudo possui duas funções objetivo: tempo de viagem e combustível total; isto é, o problema que procuramos minimizar é biobjetivo. Para este tipo de situações, um ponto mínimo é definido seguindo o conceito de não-dominância ou de otimalidade de Pareto [Collette and Siarry 2003]. Matematicamente, o problema pode ser descrito da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{f} = (\Delta t(r_0, v_0, \phi_0, \lambda_1), \Delta v(r_0, v_0, \phi_0, \lambda_1)) \\ \text{s.a} \quad & \end{aligned}$$

$$\Delta t \geq 0, \Delta v \geq 0,$$

$$r_0 \geq 0, v_0 \geq 0,$$

$$0^\circ \leq \phi_0 \leq 90^\circ,$$

$$0^\circ \leq \lambda_1 \leq 90^\circ$$

Assim, um vetor $\mathbf{x}^* = (r_0^*, v_0^*, \phi_0^*, \lambda_1^*)$ é um Pareto ótimo se não existe outro vetor $\mathbf{x} = (r_0, v_0, \phi_0, \lambda_1)$ tal que $(\Delta t(\mathbf{x}), \Delta v(\mathbf{x})) \leq (\Delta t(\mathbf{x}^*), \Delta v(\mathbf{x}^*))$.¹ Neste caso, os vetores \mathbf{x} e \mathbf{x}^* são chamados de solução dominada e solução não-dominada, respectivamente. A Figura 5 ilustra graficamente o conceito de soluções dominadas e não-dominadas.

Desse modo, denotando por \mathcal{P}^* o conjunto de todas as soluções não-dominadas, temos que a fronteira de Pareto, \mathcal{FP}^* , é definida como:

$$\mathcal{FP}^* \equiv \{ \mathbf{f}(\mathbf{x}) = (\Delta t(\mathbf{x}), \Delta v(\mathbf{x})) \mid \mathbf{x} \in \mathcal{P}^* \} \quad (30)$$

¹ $(y_1, y_2) \leq (y_1^*, y_2^*)$ se e somente se $y_i \leq y_i^*$ para $i = 1, 2$, e $y_1 < y_1^*$ ou $y_2 < y_2^*$

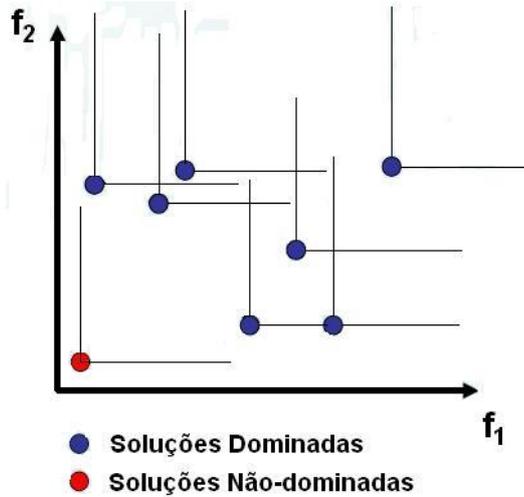


Figura 5. Soluções dominadas e não-dominadas num problema biobjetivo

Para facilitar a determinação da fronteira de Pareto em nosso problema, as variáveis serão só os ângulos ϕ_0 e λ_1 . Isto é, os valores para r_0 e v_0 vão permanecer constantes e serão iguais a:

$$r_0 = 6690 \text{ km}$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{\mu_T}{r_0} \cdot \frac{2D}{r_0 + D}} \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

onde r_0 corresponde a uma órbita geocêntrica baixa e v_0 é dado pela transferência de Hohmann [Hohmann 1925]. Neste caso, pode-se notar que o valor de r_0 é próximo do valor do raio da Terra (aprox. 6378 km). Isto permite que enquanto a sonda está girando ao redor da Terra e é feito o primeiro empuxo, só a força de atração da Terra possa ser considerada. Por outro lado, a expressão para a velocidade de partida v_0 considera uma transferência de mínima energia. Porém, em nosso caso, a mudança do ângulo ϕ_0 vai produzir que o consumo de energia aumente e o tempo de viagem se reduza.

Desta forma, utilizando as Eqs. (16), (18), (27) e (28), obtemos o Pareto ótimo (Figura 6) e a Fronteira de Pareto (Figura 7) para nosso problema biobjetivo: tempo de viagem-combustível, tendo como variáveis os ângulos ϕ_0 e λ_1 . Na Figura 7 pode-se notar o conflito que existe entre os dois objetivos. Por exemplo, enquanto menor é o tempo de viagem, maior é o combustível a ser utilizado na transferência. Pelo contrario, enquanto maior é o tempo de viagem, menor é combustível utilizado na transferência. Porém, as duas situações são equivalentes para o problema biobjetivo. Adicionalmente, qualquer escolha de valores para os ângulos ϕ_0 e λ_1 que não pertencem ao Pareto ótimo obtido na Figura 6 vão produzir uma solução dominada, em outras palavras, a Figura 7 representa graficamente o conjunto de vetores ótimos para esta situação.

Adicionalmente, estes resultados mostram um fato que geometricamente pode ser comprovado analisando a Figura 4. Quando o ângulo ϕ_0 é pequeno (menor que 10°), temos que os valores do ângulo λ_1 que pertencem ao Pareto ótimo, estão entre 20° e 45° o que vão produzir um consumo menor de combustível (aprox. 3.7 km/s) e um tempo de viagem de aproximadamente 3 dias. Por outro lado, quando o ângulo ϕ_0 é alto (maior que

70°) o tempo de viagem se reduz (aprox. 2.3 dias) porém o preço que temos que pagar é um aumento de combustível de quase 10%. Finalmente, um fato muito interessante é que com este tipo de aproximação junto com a aplicação de conceitos multiobjetivo, o conjunto de soluções ótimas tiveram um tempo de viagem entre 2.3 e 2.9 dias, que é perto do tempo planejado para a missão Apollo chegar até a Lua, que foi 3 dias [Bate et al. 1971].

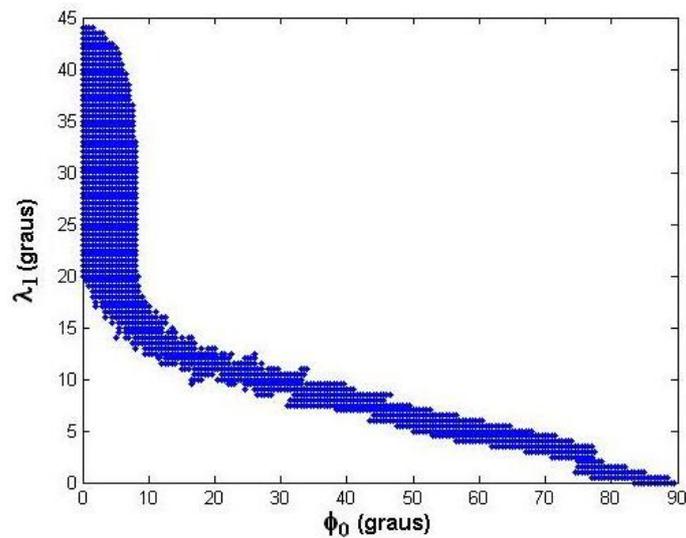


Figura 6. Pareto ótimo tendo como variáveis os ângulos ϕ_0 e λ_1

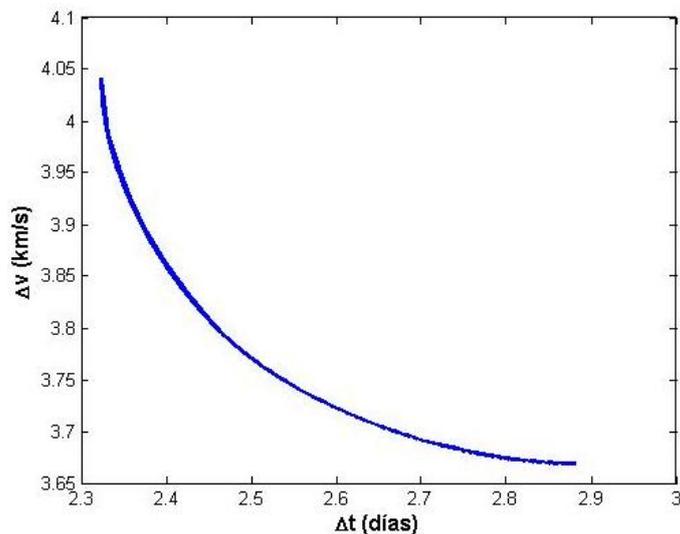


Figura 7. Fronteira de Pareto tendo como objetivos o tempo e o combustível

4. Conclusões

A aproximação de tipo 'Patched Conic' ajuda muito a simplificar um problema de transferência orbital que envolve três corpos: Terra, Lua e sonda. Nela, o problema pode ser dividido em dois problemas de dois corpos: 1) Terra-sonda (enquanto a sonda esteja fora

da esfera de influência da Lua) e 2) Lua-sonda, a partir do instante em que a sonda ingressa dentro da esfera de influência da Lua. Em cada caso, só a força gravitacional de um dos corpos é considerada. Desta forma, conhecendo o raio da órbita geocêntrica da sonda antes do primeiro empuxo, a velocidade e o ângulo de partida da sonda, como também o ponto em que a trajetória geocêntrica cruza a esfera de influência da Lua, é possível determinar facilmente, usando as equações do problema de dois corpos, o tempo de viagem e o combustível total para que a sonda chegue até a Lua fique girando ao redor dela.

Finalmente, o conceito de Pareto ótimo aplicado em nosso problema biobjetivo: tempo-combustível, nos permite classificar o conjunto de todas as possíveis soluções que satisfazem as restrições para esta situação em dominadas e não-dominadas. As soluções não-dominadas são aquelas que vetorialmente possuem o melhor valor em tempo e combustível, isto é, são elas que dão origem ao conjunto chamado de fronteira de Pareto, que reúne os vetores ótimos para este problema biobjetivo. Note-se a diferença do caso monobjetivo, onde valor ótimo é representado por um ponto só.

Referências

- Bate, R., Mueller, D., and White, J. (1971). *Fundamentals of Astrodynamics*. Dover Publications, INC., 1th edition.
- Battin, R. H. (1987). *An introduction to the Mathematics and Methods of Astrodynamics*. AIAA Education Series, 1th edition.
- Collette, Y. and Siarry, P. (2003). *Multiobjective Optimization: Principles and Case Studies*. Springer Verlag, 1th edition.
- Hohmann, W. (1925). *Die Erreichbarkeit der Himmelskörper*. Oldenbourg, Munich, Germany, 1th edition.
- Schaub, H. and Junkins, J. (2003). *Analytical Mechanics of Space Systems*. AIAA Education Series, 1th edition.