



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA E INOVAÇÃO  
**INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS**

sid.inpe.br/MTC-m13@80/2005/08.24.18.50-TDI

## **OTIMIZAÇÃO DE EMPUXO DE UM FOGUETE MOVENDO-SE NA ATMOSFERA**

Maxime Koffi

Dissertação de Mestrado do Curso de Pós-Graduação em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Combustão e Propulsão, orientada pelo Dr. Jerzy Tadeusz Sielawa, aprovada em 02 de junho de 2005.

URL do documento original:

<<http://urlib.net/6qtX3pFwXQZGivnJSY/HfKwM>>

INPE  
São José dos Campos  
2005

## **PUBLICADO POR:**

Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE

Gabinete do Diretor (GB)

Serviço de Informação e Documentação (SID)

Caixa Postal 515 - CEP 12.245-970

São José dos Campos - SP - Brasil

Tel.:(012) 3208-6923/6921

Fax: (012) 3208-6919

E-mail: pubtc@sid.inpe.br

## **COMISSÃO DO CONSELHO DE EDITORAÇÃO E PRESERVAÇÃO DA PRODUÇÃO INTELECTUAL DO INPE (DE/DIR-544):**

### **Presidente:**

Marciana Leite Ribeiro - Serviço de Informação e Documentação (SID)

### **Membros:**

Dr. Gerald Jean Francis Banon - Coordenação Observação da Terra (OBT)

Dr. Amauri Silva Montes - Coordenação Engenharia e Tecnologia Espaciais (ETE)

Dr. André de Castro Milone - Coordenação Ciências Espaciais e Atmosféricas  
(CEA)

Dr. Joaquim José Barroso de Castro - Centro de Tecnologias Espaciais (CTE)

Dr. Manoel Alonso Gan - Centro de Previsão de Tempo e Estudos Climáticos  
(CPT)

Dr<sup>a</sup> Maria do Carmo de Andrade Nono - Conselho de Pós-Graduação

Dr. Plínio Carlos Alvalá - Centro de Ciência do Sistema Terrestre (CST)

### **BIBLIOTECA DIGITAL:**

Dr. Gerald Jean Francis Banon - Coordenação de Observação da Terra (OBT)

Clayton Martins Pereira - Serviço de Informação e Documentação (SID)

### **REVISÃO E NORMALIZAÇÃO DOCUMENTÁRIA:**

Simone Angélica Del Ducca Barbedo - Serviço de Informação e Documentação  
(SID)

Yolanda Ribeiro da Silva Souza - Serviço de Informação e Documentação (SID)

### **EDITORAÇÃO ELETRÔNICA:**

Marcelo de Castro Pazos - Serviço de Informação e Documentação (SID)

André Luis Dias Fernandes - Serviço de Informação e Documentação (SID)



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA E INOVAÇÃO  
**INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS**

sid.inpe.br/MTC-m13@80/2005/08.24.18.50-TDI

## **OTIMIZAÇÃO DE EMPUXO DE UM FOGUETE MOVENDO-SE NA ATMOSFERA**

Maxime Koffi

Dissertação de Mestrado do Curso de Pós-Graduação em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Combustão e Propulsão, orientada pelo Dr. Jerzy Tadeusz Sielawa, aprovada em 02 de junho de 2005.

URL do documento original:

<<http://urlib.net/6qtX3pFwXQZGivnJSY/HfKwM>>

INPE  
São José dos Campos  
2005

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

---

Koffi, Maxime.

K821o Otimização de empuxo de um foguete movendo-se na atmosfera / Maxime Koffi. – São José dos Campos : INPE, 2005. xxii + 67 p. ; (sid.inpe.br/MTC-m13@80/2005/08.24.18.50-TDI)

Dissertação (Mestrado em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Combustão e Propulsão) – Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 2005.

Orientador : Dr. Jerzy Tadeusz Sielawa.

1. Trajetória do foguete. 2. Otimização. 3. Míssil. 4. Empuxo. 5 Cálculo variacional. 6. Combustível. I.Título.

CDU 629.7

---



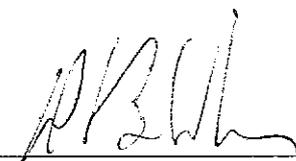
Esta obra foi licenciada sob uma Licença [Creative Commons Atribuição-NãoComercial 3.0 Não Adaptada](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/).

This work is licensed under a [Creative Commons Attribution-NonCommercial 3.0 Unported License](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/).

Aprovado (a) pela Banca Examinadora  
em cumprimento ao requisito exigido para  
obtenção do Título de Mestre em

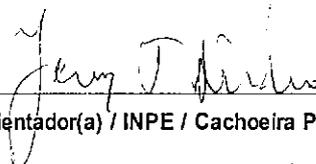
Engenharia e Tecnologia  
Espaciais/Combustão e Propulsão

Dr. Demétrio Bastos Netto



Presidente / INPE / Cachoeira Paulista - SP

Dr. Jerzy Tadeusz Sielawa



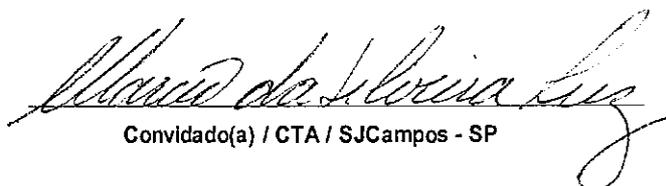
Orientador(a) / INPE / Cachoeira Paulista - SP

Dr. Fernando de Souza Costa



Membro da Banca / INPE / Cachoeira Paulista - SP

Dr. Márcio da Silveira Luz



Convidado(a) / CTA / SJCampos - SP

Aluno (a): Maxime Koffi

São José dos Campos, 02 de junho de 2005



*Com muito amor a meus pais,  
Koffi Kan Goerges e Oka Amenan Odette.*



## **AGRADECIMENTOS**

Ao meu orientador Prof. Dr. Jerzy Tadeusz Sielawa, a quem tenho uma grande admiração e respeito, agradeço pela predisposição, compreensão e amizade que teve comigo.

Aos meus professores do Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE), em especial ao Dr. Demétrio Bastos Netto e ao Dr. Fernando de Souza Costa pelo conhecimento compartilhado durante toda a realização do curso.

Aos membros da banca examinadora pelas sugestões recebidas e ao Governo Brasileiro através da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pela bolsa de mestrado concedida.

Aos meus colegas de trabalho e aos funcionários agradeço pela amizade e confiança.

Não poderia ainda esquecer da minha família, Maxime Koffi Junior e da minha esposa, Lúcia Helena Agostinho, que sempre estiveram presentes nas horas difíceis.



## RESUMO

O empuxo é tratado como uma variável de controle na otimização da altitude de um foguete movendo-se na atmosfera. São determinadas as características de empuxo para obter a altitude máxima de um foguete lançado verticalmente na atmosfera, com uma dada quantidade de combustível. Neste trabalho é mostrada passo a passo, a seqüência de controle ótima a ser aplicada desde o instante inicial do lançamento do foguete até o fim da queima, considerando-se a superfície da Terra como um sistema de referência inercial. Em seguida é feita também uma análise do alcance máximo do foguete, quando a superfície da Terra é considerada curvada, ou seja, admitindo-se os efeitos da rotação da Terra. Ao final, apresenta-se um exemplo de resolução numérica para um foguete hipotético. O presente estudo utiliza o cálculo variacional para a análise da trajetória de um foguete usando o empuxo como variável de controle, no entanto, o método pode ser aplicado a outros tipos de problemas, considerando outras variáveis de controle.



# **OPTIMIZATION OF THE PUSH OF A ROCKET MOVING IN THE ATMOSPHERE**

## **ABSTRACT**

In this work the thrust is considered as a control variable in order to maximize the altitude attained by a rocket. Initially, the Earth Surface is taken as an inertial reference frame. The rocket is launched vertically into the atmosphere with a given quantity of fuel. It is shown how optimal control can be applied from the initial launch point up to the burn-out. An example with a numerical solution is presented for a hypothetical rocket. The rocket trajectory launched vertically is also analyzed, considering the effects of the Earth rotation. The present study makes possible the analysis of a rocket trajectory from a mathematical point of view, using Variational Calculus, with thrust as a control variable; obviously the method can be applied using other control variables.



## LISTA DE SÍMBOLOS

### Latinos

- $a(h)$  - velocidade do som, P-20
- $A$  - constante de integração, eq(4.2.4-4)
- $A_e$  - área de saída da tubeira, eq(2.1.1-3)
- $B$  - constante de integração, eq(4.2.4-3)
- $C$  - constante de integração, eq(4.2.3-4)
- $C_D$  - coeficiente de arrasto, eq(2.1.2-2)
- $C_L$  - coeficiente de sustentação, P-20
- $\vec{D}$  - força de arrasto, eq(2.1-2)
- $Det$  - determinante, eq(3.1.5-2)
- $E_{Tot}$  - energia total do foguete, eq(5.1-24)
- $E_{m_{tot}}$  - energia mecânica total, eq(4.1.3-4)
- $e$  - excentricidade, eq(4.1.4-9)
- $\hat{e}_n$  - versor normal, eq(4.3.1-2)
- $\hat{e}_r$  - versor radial das bases do mesmo sistema, eq(4.1.1-1)
- $\hat{e}_t$  - versor tangencial, eq(4.3.1-3)
- $\vec{F}$  - força de tração, eq(2.1-1)
- $\vec{F}(r)$  - força do campo, eq(4.1.1-1)
- $g_i(t)$  - função genérica, eq(3.1.1-4)
- $g_0$  - aceleração gravitacional na superfície da Terra, eq(2.1.3-3)
- $g(h)$  - aceleração gravitacional no ponto onde se encontra o corpo, eq(2.1.3-3)
- $G$  - constante gravitacional, eq(2.1.3-2)
- $h(t)$  - altitude do foguete no instante t, eq(5.1-19)
- $h_q(tq)$  - altitude do foguete no final da queima, eq(5.1-22)

- $h_{\max}$  - altitude máxima do foguete, eq(5.1-23)
- $H$  - função Hamiltoniana, eq(3.1.2.1-1)
- $h$  - distancia entre o centro de massa do foguete e a superfície da Terra , eq(2.1.3-3)
- $\vec{h}$  - quantidade do movimento angular, eq(4.1.3-2)
- $J$  - funcional, eq(3.1-1)
- $k$  - variável de controle, eq(2.2.1-4c)
- $k_{\max}$  - variável de controle ótima, eq(5.1-20)
- $k_s^*$  - variável de controle singular, eq(3.1.4-9)
- $L$  - força de sustentação, P-20
- $m$  - massa do foguete, eq(2.1.3-1)
- $m_0$  - massa inicial do foguete (massa da estrutura + massa do propelente), eq(3.1-3c)
- $m(t)$  - massa instantânea do foguete, eq(5.1-11)
- $m_c$  - massa do combustível, eq(5.1-20)
- $m_f$  - massa final, eq(5.1-11)
- $\dot{m}$  - taxa mássica do foguete, eq(2.2.1-4c)
- $M_T$  - massa da Terra, eq(2.1.3-1)
- $M$  - numero de Mach, P-20
- $M$  - parâmetro, eq(4.2.5-6)
- $N$  - parâmetro, eq(4.2.5-7)
- $P(h)$  - força provocada no sentido do movimento, devido à diferença entre a pressão dos gases na saída da tubeira do motor e a pressão atmosférica no ponto onde se encontra o foguete, eq(2.1.1-3)
- $P_e$  - pressão dos gases na saída da tubeira do motor, eq(2.1.1-3)
- $P_1(h)$  - pressão atmosférica no ponto onde se encontra o foguete, eq(2.1.1-3)
- $p$  - semi latus rectum, eq(4.1.4-8)

- $Q$  - parâmetro, eq(4.2.5-8)
- $R_T$  - raio da Terra, eq(2.1.3-3)
- $r$  - coordenada radial do sistema cilíndrico, eq(4.1.4-7)
- $r_o$  - posição inicial do foguete em relação ao centro da Terra no “burn-out”, eq(4.2.2-1)
- $\dot{r}_0$  - componente radial da velocidade, eq(4.2.2-2)
- $S(t)$  - função Comutadora, eq(3.1.3-4)
- $S$  - fator de proporcionalidade, constante, eq(4.1.1-2)
- $T$  - empuxo, eq(2.1.1-2)
- $t_q$  - tempo de queima, eq(5.1-20)
- $t_f$  - tempo final, eq(3.1.2-9)
- $t_0$  - tempo inicial, eq(3.1.2-9)
- $T_c$  - energia cinética, eq(4.1.3-1)
- $\vec{v}(t)$  - velocidade instantânea do foguete, eq(5.1-8)
- $v_q(t_q)$  - velocidade no final da queima, eq(5.1-21)
- $v_E$  - velocidade de ejeção dos gases, eq(2.2.1-4)
- $\vec{v}_0$  - velocidade resultante inercial no lançamento, eq(4.3.1-3)
- $\vec{V}_0$  - velocidade do foguete em relação à superfície da Terra, eq(4.3.1-1)
- $\vec{V}_t$  - velocidade linear na direção tangencial, eq(4.3.2-3)
- $V$  - energia potencial, eq(4.1.1-4)
- $u$  - variável adimensional, eq(4.1.4-4)
- $W$  - força gravitacional terrestre, eq(2.1.3-2)
- $W_0$  - força gravitacional na superfície da Terra que age num corpo a uma altitude  $h$ , eq(2.1.3.1)
- $x_i(t)$  - componente vetorial das variáveis de estado, eq(3.1.1-1)

## Gregos

- $\alpha$  - parâmetro, eq(4.1.4-5)
- $\beta$  - ângulo de lançamento, eq(4.2.2-1)
- $\gamma$  - parâmetro, eq(4.1.4-5)
- $\beta_0$  - ângulo inicial da trajetória em relação á linha horizontal, eq(4.2.2-1)
- $\theta_{\max}$  - alcance da trajetória, eq(4.2.5-1)
- $\Omega$  - módulo da velocidade angular, eq(4.3.2-4)
- $\rho$  - densidade atmosférica, eq(2.1.2-2)
- $\rho_0$  - variável adimensional, eq(4.3.2-6)
- $\lambda_i$  - componentes vetoriais linha dos multiplicadores de Lagrange  
( $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ), eq(3.1.2-4)
- $\lambda_i^T$  - matriz transposta aos multiplicadores de lagrange, eq(3.1.2-4)
- $\dot{\theta}$  - componente polar da velocidade, eq(4.2.2-3)
- $\lambda_0$  - latitude do sítio do lançamento, eq(4.3.2-4)
- $\omega$  - velocidade angular, eq(4.2.1-1)
- $\delta$  - variação, eq(3.1.2-10)
- $\Delta t$  - intervalo de tempo, eq(4.3.2-8)
- $\Psi$  - denominador da variável de controle singular, eq(3.1.4-10)

## LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

CTA	- Centro Técnico Aeroespacial
DRAG	- Força de Arrasto
EUA	- Estados Unidos da América
INPE	- Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais



## LISTA DE FIGURAS

	<b>Pág.</b>
FIGURA 2.1 - Foguete lançado verticalmente na atmosfera. ....	5
FIGURA 4.1 - Configuração da curva cônica nas vizinhanças do foco ativo....	37
FIGURA 4.2 - Esquema da trajetória de um míssil.....	39
FIGURA 4.3 - Trajetória elíptica inercial de um míssil lançado da superfície da .....	45
FIGURA 4.4 - Ângulo $\beta_0$ de saída do foguete.....	48
FIGURA 5.1-Taxa de variação de massa versus tempo de queima.....	54
FIGURA 5.2 - Velocidade do foguete versus tempo de queima.....	55
FIGURA 5.3 - Altitude do foguete versus tempo de queima.....	56
FIGURA 5.4 -Altitude máxima do foguete versus tempo de queima. ....	57
FIGURA 5.5 - Energia total gasta pelo foguete versus tempo de queima. ....	58



## SUMÁRIO

	Pág.
<b>1 INTRODUÇÃO .....</b>	<b>1</b>
1.1 Objetivos .....	2
1.2 Hipóteses Admitidas.....	3
<b>2 ASPECTOS FÍSICO E MATEMÁTICO .....</b>	<b>5</b>
2.1 Aspecto Físico.....	5
2.1.1 Força de Tração .....	6
2.1.2 Força Aerodinâmica .....	7
2.1.3 Força Gravitacional .....	8
2.2 Aspecto Matemático.....	9
2.2.1 Equação Geral do Movimento .....	9
2.2.2 Observação .....	10
<b>3 OTIMIZAÇÃO DA ALTITUDE DE UM FOGUETE .....</b>	<b>11</b>
3.1 Otimização da Altitude .....	11
3.1.1 Formulação Matricial do Problema.....	12
3.1.2 Condição Necessária para Mínimo .....	14
3.1.2.1 Função Hamiltoniana.....	16
3.1.2.2 Equação de Euler para Variável de Controle .....	18
3.1.2.3 Equação de Euler para as Variáveis de Estados .....	20
3.1.3 Condição de Weierstrass .....	20
3.1.4 Condição de Controle Singular.....	21
3.1.5 Determinação da Seqüência de Variável de Controle Ótimo .....	25
<b>4 EFEITOS DA TERRA CURVADA, EM ROTAÇÃO .....</b>	<b>31</b>
4.1 Equacionamento de Trajetórias no Campo Gravitacional Newtoniano .....	31
4.1.1 Algumas Características do Campo Newtoniano .....	31
4.1.2 Leis de Kepler .....	33
4.1.3 Equação de Energia .....	34
4.1.4 Equação da Trajetória .....	35
4.1.5 Interpretação dos Parâmetros “p” e “e” .....	37
4.1.6 Forma Alternativa da Equação de Trajetória .....	38

4.2 Equação da Trajetória de um Míssil em relação à Superfície da Terra .....	38
4.2.1 Considerações Gerais .....	38
4.2.2 Condições Iniciais do Lançamento .....	39
4.2.3 Equação Diferencial e sua Solução Geral .....	40
4.2.4 Solução Particular .....	41
4.2.5 Alcance da Trajetória .....	43
4.3 Lançamento Vertical Considerando a Rotação da Terra.....	44
4.3.1 Considerações Gerais .....	44
4.3.2 O Ponto de Impacto considerando a Rotação da Terra .....	46
<b>5 RESOLUÇÃO NUMÉRICA .....</b>	<b>49</b>
5.1 Exemplo .....	49
5.2 Conclusão .....	60
5.3 Sugestão para Trabalho Futuro.....	61
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....</b>	<b>63</b>

## 1 INTRODUÇÃO

A explicação de como os corpos se movem em suas órbitas em torno da Terra foi dada pela lei da gravitação universal de Newton, no final do século XVII. Segundo esta lei, se um corpo fosse lançado para cima com uma velocidade suficientemente elevada ele poderia entrar em órbita da Terra. Tal princípio permeou os primeiros textos de ficção científica, principalmente os de Júlio Verne (1828-1905), que inspiraram todos os pioneiros da Astronáutica.

O cientista russo Konstantin Tsiolkowski (1857-1935) demonstrou matematicamente a possibilidade de vôos interplanetários por meio de foguetes no artigo “Exploração do Espaço Cósmico por meio de um Engenho Reativo”, publicado em 1896. Neste trabalho Tsiolkowski estabeleceu a equação clássica da velocidade de um foguete em termos da razão das massas inicial e final do foguete. Os primeiros foguetes utilizavam propelentes sólidos como a pólvora negra ou pólvoras de base simples (nitrocelulose), posteriormente passaram a empregar pólvoras de base dupla (nitroglicerina e nitrocelulose) e “composites”, explosivos contendo um ligante plástico.

Em 1926, o cientista americano Robert H. Goddard (1882-1945) lançou o primeiro foguete empregando propelentes líquidos. Os propelentes líquidos apresentam maiores velocidades de ejeção que os sólidos.

A segunda guerra mundial pôs em evidência o alemão Wernher Von Braun (1912-1977), chefe técnico da construção dos mísseis alemães das séries V1 e V2. Von Braun continuou seu trabalho nos Estados Unidos da América nos anos iniciais da guerra fria, comandando o desenvolvimento dos foguetes Saturno. Nos anos 1970, Von Braun esteve no Brasil e visitou o Centro Técnico Aeroespacial e o Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais.

## 1.1 Objetivos

O objetivo deste trabalho é determinar a altitude máxima alcançada por um foguete, lançado verticalmente na atmosfera, com características fixas, utilizando-se a taxa mássica  $\dot{m} = k = -dm/dt$ , na saída da tubeira do motor, como variável de controle. Admitindo-se que a velocidade de ejeção seja constante, então o empuxo pode ser considerado também como a variável de controle.

O problema é chamado de “Problema de Goddard” e foi proposto no ano de 1919. Vários pesquisadores como G. Hamel em (1927), Tsien e Evans (1951), Miele (1958) e Garfinked (1963), trataram deste assunto, bem como Fonseca, em 1977, no ITA/Brasil.

O problema aqui tratado envolve dois aspectos diferentes:

- **Aspecto Físico:** Consiste no estudo e análise do movimento dos foguetes na atmosfera, o que corresponde, fundamentalmente, à Mecânica de Vôo Atmosférico.
- **Aspecto Matemático:** Consiste na aplicação da otimização do empuxo, recorrendo-se aos resultados clássicos do Cálculo Variacional e/ou do Cálculo da Otimização dos Sistemas Dinâmicos, incluindo o problema de controle.

## 1.2 Hipóteses Admitidas

- A Terra é considerada como um sistema de referência inercial plano.
- No caso dos foguetes que se movem nas vizinhanças imediatas da Terra (por exemplo, dentro da atmosfera terrestre), a influência de outros corpos celestes é negligenciável em relação à força gravitacional terrestre.
- São desprezadas as forças menores como a força centrífuga e a de Coriolis, comparadas com as forças de Tração, Aerodinâmica e Gravitacional.
- O foguete, sendo lançado verticalmente na atmosfera, tem o ângulo de ataque  $\alpha = 0$  devido à sua simetria axial. Logo, a força de sustentação é  $L(v, h) = 0$ .
- No conjunto das forças não foram incluídas, forças elásticas devidas às oscilações de foguete, e também as forças devidas a mudanças da posição do centro de massa de foguete.
- A taxa mássica que sai da tubeira do motor do foguete será representada pela variável de controle  $\dot{m} = k = -dm/dt$ .
- A força  $P(h)$ , provocada pela diferença de pressão entre a pressão  $P_e$  na saída da tubeira do motor de foguete e a pressão atmosférica  $P_1(h)$ , na altitude  $h$ , é uma parcela de caráter corretivo.



## 2 ASPECTOS FÍSICO E MATEMÁTICO

### 2.1 Aspecto Físico

Queremos determinar a altitude máxima possível que um foguete lançado verticalmente pode alcançar, controlando seu consumo de combustível através da variável  $\dot{m} = k = -dm/dt$ , que representa a taxa mássica que sai da tubeira do motor do foguete, com parâmetros como altitude  $h(t)$ , pressão  $P(h)$ , densidade  $\rho(h)$ , temperatura  $T(h)$ , velocidade  $v(t)$ , arrasto  $C_D(h)$ , e a massa  $m(t)$ . As variáveis serão estabelecidas de acordo com o modelo conveniente da atmosfera.

A Figura 2.1 mostra um esquema de um foguete lançado verticalmente na atmosfera.

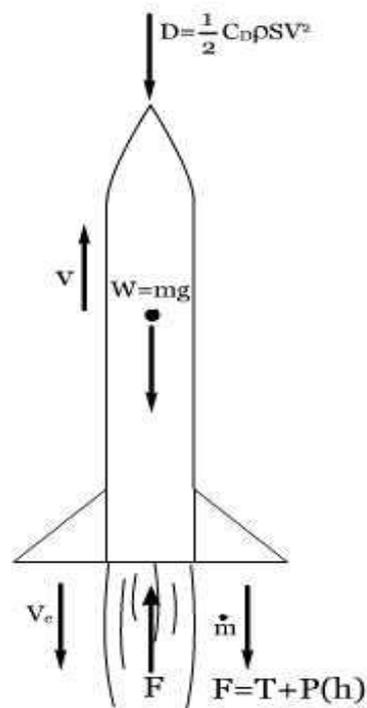


FIGURA 2.1 - Foguete lançado verticalmente na atmosfera.

As forças que agem sobre o foguete em movimento lançado verticalmente na atmosfera são:

$$\vec{F} = \text{força de tração} \quad (2.1-1)$$

$$\vec{D} = \text{força de arrasto} \quad (2.1-2)$$

$$\vec{W} = \text{força gravitacional} \quad (2.1-3)$$

As outras forças como as centrífugas e as de Coriolis são muito menores, portanto podem ser desprezadas se comparadas às três primeiras.

### 2.1.1 Força de Tração

É a força produzida pelo motor do foguete, que atua na direção do movimento.

$$F = T + P(h) \quad (2.1.1-1)$$

com

$$T = -\dot{m}v_E \quad (2.1.1-2)$$

$$P(h) = [P_e - P_1(h)]A_e \quad (2.1.1-3)$$

Substituindo (2.1.1-1) e (2.1.1-2) em (2.1.1-3), vem:

$$F = -\dot{m}v_E + \{P_e - P_1(h)\}A_e \quad (2.1.1-4)$$

onde:

$$\left\{ \begin{array}{l} T \equiv \text{força do empuxo devido ao fluxo dos gases;} \\ P(h) \equiv \text{força provocada no sentido do movimento, devido} \\ \quad \text{à diferença entre a } P_e \text{ (pressão na saída da tubeira} \\ \quad \text{do motor de foguete) e } P_1(h) \text{ (pressão atmosférica} \\ \quad \text{na altitude } h\text{), acompanhada de } A_e \text{ (área transversal} \\ \quad \text{da saída da tubeira do motor);} \\ \dot{m} \equiv \text{taxa de variação da massa do foguete } (\dot{m} \leq 0), \text{ (o sinal} \\ \quad \text{negativo é decorrente, do fato da massa decair com o tempo);} \\ v_E \equiv \text{velocidade de ejeção dos gases.} \end{array} \right.$$

### 2.1.2 Força Aerodinâmica

É a força exercida pelo ar sobre o foguete em movimento. Em nosso problema a única força aerodinâmica que age sobre o foguete em movimento é a força de arrasto. Esta força é a componente da força aerodinâmica na direção oposta à da trajetória do vôo, representada pela letra D (“Drag”).

$$D(v, h) = \frac{1}{2} \rho(h) v^2 S C_D(M, \alpha) \quad (2.1.2-1)$$

e

$$C_D(M, \alpha) = \frac{D(v, h)}{\frac{1}{2} \rho S v^2} \quad (2.1.2-2)$$

Onde:

$$\left\{ \begin{array}{l} D(v, h) \quad \equiv \text{força de arrasto;} \\ \rho(h) \quad \equiv \text{densidade atmosférica;} \\ S_e \quad \equiv \text{seção de referência do foguete (= cte);} \\ v(t) \quad \equiv \text{velocidade do foguete em relação ao ar;} \\ C_D(M, \alpha) \equiv \text{coeficiente de arrasto (é função do número de Mach);} \\ M = \frac{v}{a(h)} \equiv \text{número de Mach do foguete;} \\ a(h) \quad \equiv \text{velocidade do som no ar.} \end{array} \right.$$

Note-se que para  $M$  fixo e valores do ângulo de ataque  $\alpha$  pequenos,  $C_L$  é uma função aproximadamente linear de  $\alpha$ , sendo que no caso de foguetes, devido à simetria axial,  $\alpha = 0$  conseqüentemente  $C_L = 0$  e a força de sustentação  $L(v, h) = 0$ .

### 2.1.3 Força Gravitacional

É a força exercida sobre o foguete por todos os corpos celestes (sol, planetas, lua, etc.). Ela age na direção do centro de massa do corpo em questão. Esta força é chamada de “Peso” e é designada por  $W$ .

A força gravitacional na superfície da Terra é dada por:

$$W_0 = mg_0 = \frac{GM_T m}{R_T^2} \quad (2.1.3-1)$$

A força gravitacional na superfície da terra que age num corpo a uma altitude  $h$  é da forma:

$$W = mg(h) = \frac{GM_T m}{(R_T + h)^2} \quad (2.1.3-2)$$

dividindo (2.1.3-2) por (2.1.3 -1) temos:

$$g(h) = g_0 \left( \frac{R_T}{R_T + h} \right)^2 \quad (2.1.3-3)$$

onde:

$$\left\{ \begin{array}{l} m \equiv \text{massa do foguete;} \\ R_T \equiv \text{raio da Terra;} \\ G \equiv \text{constante gravitacional;} \\ M_T \equiv \text{massa da Terra;} \\ W_0 \equiv \text{força gravitacional na Superfície da Terra;} \\ W \equiv \text{força gravitacional terrestre no ponto onde se encontra o corpo;} \\ g(h) \equiv \text{aceleração da gravidade no ponto onde se encontra o corpo;} \\ g_0 \equiv \text{aceleração da gravidade na Superfície da Terra.} \\ h \equiv \text{distância entre o centro de massa do foguete e a Superfície da Terra.} \end{array} \right.$$

## 2.2 Aspecto Matemático

O estudo deste trabalho possibilitará a apresentação da análise da trajetória do foguete sob o ponto de vista matemático, recorrendo-se ao chamado Cálculo Variacional. O problema de cálculo variacional é determinar os valores extremos (máximos e mínimos) de uma função.

### 2.2.1 Equação Geral do Movimento

Com base na 2ª Lei de Newton, a Equação (2.1) pode ser escrita na forma:

$$F = m\dot{v} \quad (2.2.1-1)$$

onde

$$F = T + P(h) - D - W \quad (2.2.1-2)$$

Igualando as Equações (2.2.1-2) e (2.2.1-1) temos:

$$\dot{v} = \frac{1}{m} [-\dot{m}v_E + P(h) - D - W] \quad (2.2.1-3)$$

Admitindo que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{m} = -k = \frac{dm}{dt} \\ v_E = \text{depende de } \dot{m} \\ P = P(h) \\ D = D(v, h) \\ W = W(m, h) \end{array} \right. \quad (2.2.1-4)$$

Finalmente,

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{v} = \frac{1}{m} [k v_E + P(h) - D(v, h) - W(m, h)] \\ \dot{h} = v \\ \dot{m} = k = -\frac{dm}{dt} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (2.2.1-4a) \\ (2.2.1-4b) \\ (2.2.1-4c) \end{array}$$

As Equações acima formam o sistema de equações diferenciais do movimento do foguete.

### 2.2.2 Observação

A tubeira é um bocal que tem por objetivo acelerar os gases produzidos na câmara de combustão até velocidades supersônicas. A tubeira é dividida em três partes, o convergente, a garganta e o divergente:

O escoamento dos gases de combustão ocorre da seguinte forma:

Câmara de Combustão → Convergente → Garganta → Divergente

Na garganta da tubeira a velocidade dos gases não pode ultrapassar a velocidade sônica, portanto a variável de controle  $k$ , da Equação (2.2.1-4c), deve ser limitada fisicamente.

logo

$$0 \leq k \leq k_{\max} \quad (2.2.2-1)$$

### 3 OTIMIZAÇÃO DA ALTITUDE DE UM FOGUETE

#### 3.1 Otimização da Altitude

O problema de maximizar  $h(t_f)$  nos leva a minimizar o funcional  $J$  expresso através das Equações (2.2.1- 4a, b e c):

$$J(v, h, m, k) = -h(t_f), \quad (3.1-1)$$

sujeito aos seguintes vínculos:

$$\varphi_i(v, \dot{v}, h, \dot{h}, m, \dot{m}, k) = 0 \quad (3.1-2)$$

onde

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_1(v, \dot{v}, h, \dot{h}, m, \dot{m}, k) = \dot{v} - \frac{1}{m} [k v_E + P(h) - D(v, h) - W(m, h)] = 0 \quad (3.1-2a) \\ \varphi_2(v, \dot{v}, h, \dot{h}, m, \dot{m}, k) = \dot{h} - v = 0 \quad (3.1-2b) \\ \varphi_3(v, \dot{v}, h, \dot{h}, m, \dot{m}, k) = \dot{m} + k = 0 \quad (3.1-2c) \end{array} \right.$$

As condições iniciais

$$\left\{ \begin{array}{l} v(0) = 0 \end{array} \right. \quad (3.1-3a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} h(0) = 0 \end{array} \right. \quad (3.1-3b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} m(0) = m_0 \end{array} \right. \quad (3.1-3c)$$

e final:

$$\left\{ \begin{array}{l} m(t_f) = m_f \rightarrow \text{valor conhecido} \\ h(t_f) \rightarrow \text{valor a ser máximizado} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (3.1-4a) \\ (3.1-4b) \end{array}$$

Sendo que as variáveis de estado  $v, h, m$  e a variável de controle  $k$  são variáveis dependentes, funções do tempo, e o tempo estático  $t$ , a variável independente.

### 3.1.1 Formulação Matricial do Problema

Sejam  $x_1(t), x_2(t)$  e  $x_3(t)$  as coordenadas das variáveis de estados  $v, h, m$ , representadas da seguinte forma:

$$x_i(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v(t) \\ h(t) \\ m(t) \end{bmatrix} \quad (3.1.1-1)$$

onde  $i = 1, 2, 3, \dots$

Logo, tem-se que

$$\dot{x}_i(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{v}(t) \\ \dot{h}(t) \\ \dot{m}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{x_3(t)} \{k(t)v_E + P[x_2(t)] - D[x_1(t), x_2(t)] - W[x_2(t), x_3(t)]\} \\ x_1(t) \\ -k(t) \end{bmatrix} \quad (3.1.1-2)$$

Admitindo

$$g_i(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{x_3(t)} \{k(t)v_E + P[x_2(t)] - D[x_1(t), x_2(t)] - W[x_2(t), x_3(t)]\} \\ x_1(t) \\ -k(t) \end{bmatrix} \quad (3.1.1-3)$$

temos:

$$\dot{x}_i(t) = g_i(t) \quad (3.1.1-4)$$

ou, ainda

$$\dot{x}_i(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1[x_1(t), x_2(t), x_3(t), k(t)] \\ g_2[x_1(t), x_2(t), x_3(t), k(t)] \\ g_3[x_1(t), x_2(t), x_3(t), k(t)] \end{bmatrix} \quad (3.1.1-5)$$

Tendo em vista a Equação (3.1-2), a representação matricial tem a forma:

$$\varphi_i(v, \dot{v}, h, \dot{h}, m, \dot{m}, k) = \dot{x}_i(t) - g_i(t) = 0 \quad (3.1.1-6)$$

ou seja

$$\varphi[x_1(t), \dot{x}_1(t), x_2(t), \dot{x}_2(t), x_3(t), \dot{x}_3(t), k(t)] = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} g_1[x_1(t), x_2(t), x_3(t), k(t)] \\ g_2[x_1(t), x_2(t), x_3(t), k(t)] \\ g_3[x_1(t), x_2(t), x_3(t), k(t)] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.1.1-7)$$

### 3.1.2 Condição Necessária para Mínimo

Queremos determinar a função  $k = k(t)$ , que minimiza ( $-h_f$ ) ou maximiza ( $h_f$ ), a altitude do foguete. Usando a Equação (3.1-1) e os Multiplicadores de Lagrange temos:

$$J(x_1(t), x_2(t), x_3(t), k(t), t) = -h(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \lambda_i^T \varphi_i dt \quad (3.1.2-1)$$

onde:

$$h(t_f) = -x_2(t_f) \quad (3.1.2-2)$$

assim,

$$J(x_1(t), x_2(t), x_3(t), k(t), t) = -x_2(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \lambda_i^T \dot{x}_i(t) dt - \int_{t_0}^{t_f} \lambda_i^T g_i(t) dt \quad (3.1.2-3)$$

Usando a matriz transposta aos Multiplicadores de Lagrange temos:

$$\lambda_i^T = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}^T = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \quad (3.1.2-4)$$

sendo que, integrando por parte, vem:

$$\int_{t_0}^{t_f} \lambda_i^T \dot{x}_i(t) dt = \lambda_i^T x_i(t) \Big|_{t_0}^{t_f} - \int_{t_0}^{t_f} \dot{\lambda}_i^T x_i(t) dt \quad (3.1.2-5)$$

e substituindo a Equação (3.1.2-5) em (3.1.2-3) temos:

$$J(x_1(t), x_2(t), x_3(t), k(t), t) = -x_2(t_f) + \lambda_i^T x_i \Big|_{t_0}^{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} [-\lambda_i^T g_i(t) - \dot{\lambda}_i^T x_i(t)] dt \quad (3.1.2-6)$$

A função hamiltoniana do sistema acima é dada pela relação:

$$H_i = -\lambda_i^T g_i(t) \quad (3.1.2-7)$$

assim, substituindo a Equação (3.1.2-7) em (3.1.2-6) obtém-se:

$$J(x_1(t), x_2(t), x_3(t), k(t), t) = -x_2(t_f) + \lambda^T x_i \Big|_{t_0}^{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} [H_i - \dot{\lambda}_i^T x_i(t)] dt \quad (3.1.2-8)$$

Para que o funcional J, seja um mínimo é necessário que a primeira variação seja nula, isto é  $\delta J = 0$ .

Admitindo que,

$$\begin{cases} t_0 \rightarrow \text{fixo} \\ t_f \rightarrow \text{livre} \\ x_1(t_f) = 0 \\ x_2(t_f) \rightarrow \text{livre} \\ x_3(t_f) = m_f \end{cases} \quad (3.1.2-9)$$

temos:

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} \left[ \left( \frac{\partial J}{\partial x_i(t)} - \frac{d}{dt} \frac{\partial J}{\partial \dot{x}_i(t)} \right) \delta x_i(t) \right] dt = 0 \quad (3.1.2-10)$$

$$\delta J = \left[ \frac{-\partial x_2(t_f)}{\partial t_f} - H(t_f) \right] \delta t_f + [\lambda_2(t_f) - 1] \delta x_2(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \left[ \left( \frac{\partial H_i}{\partial x_i(t)} - \dot{\lambda}_i^T \right) \delta x_i(t) + \frac{\partial H}{\partial k(t)} \delta k(t) \right] dt = 0 \quad (3.1.2-11)$$

uma vez que  $\delta x_i(t)$  e  $\delta k(t)$  são independentes.

Anulando cada termo da Equação (3.1.2-11) em relação a zero, temos:

$$\begin{cases} H(t_f) = -\frac{\partial x_2(t_f)}{\partial t_f} \end{cases} \quad (3.1.2-12)$$

$$\begin{cases} \lambda_2(t_f) = 1 \end{cases} \quad (3.1.2-13)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial x_i(t)} = \dot{\lambda}_i^T \end{cases} \quad (3.1.2-14)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial k(t)} = 0 \end{cases} \quad (3.1.2-15)$$

### 3.1.2.1 Função Hamiltoniana

Para resolver nosso problema recorreremos ao elemento mais importante da otimização, a função Hamiltoniana descrita por Pontryagin [7], cuja sua expressão é da forma:

$$H(v, h, m, \lambda, k, t) = -\lambda_i^T g_i = -[\lambda_v, \lambda_h, \lambda_m] \begin{bmatrix} \frac{1}{m} [k v_E + P(h) - D(v, h) - W(m, h)] \\ v \\ -k \end{bmatrix} \quad (3.1.2.1-1)$$

logo,

$$H(v, h, m, \lambda, k, t) = \frac{\lambda_v}{m} [-k v_E - P(h) + D(v, h) + mg] + \lambda_m k - \lambda_h v \quad (3.1.2.1-2)$$

Para saber o comportamento da função hamiltoniana ao longo da trajetória ótima, basta derivar a Equação (3.1.2.1-2) em relação ao tempo:

Assim, temos:

$$\frac{dH}{dt} = -\dot{\lambda}_i^T g_i - \lambda_i^T \dot{g}_i = -\dot{\lambda}_i^T g_i - \lambda_i^T \frac{\partial g_i}{\partial x_i(t)} \dot{x}_i(t) - \lambda_i^T \frac{\partial g}{\partial k(t)} \dot{k}(t) \quad (3.1.2.1-3)$$

Sabemos que

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial k(t)} = \frac{\partial g}{\partial k(t)} \\ \frac{\partial H}{\partial x(t)} = \frac{\partial g}{\partial x_i(t)} \end{cases} \quad (3.1.2.1-4)$$

Levando as expressões (3.1.2.1-4) na Equação (3.1.2.1-3) vem:

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i(t)} g_i + \frac{\partial H}{\partial x_i(t)} \dot{x}(t) + \frac{\partial H}{\partial k(t)} \dot{k}(t) \quad (3.1.2.1-5)$$

Tendo em vista que:

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = g_i \\ \frac{dH}{dk(t)} = 0 \end{cases} \quad (3.1.2.1-6)$$

e substituindo (3.1.2.1-6) em (3.1.2.1-5) temos:

$$\frac{dH}{dt} = 0 \quad (3.1.2.1-7)$$

ou, ainda

$$\frac{\partial H(t_f)}{\partial t_f} = \partial \left[ \frac{-x_2(t_f)}{\partial t_f} \right] = 0 \quad (3.1.2.1-8)$$

como

$$H(t_f) = 0 \quad (3.1.2.1-9)$$

então

$$H = 0 \quad (3.1.2.1-10)$$

Concluiremos que ao longo da trajetória ótima, a função Hamiltoniana é nula.

### 3.1.2.2 Equação de Euler para Variável de Controle

Deseja-se transformar o intervalo fechado da variável de controle  $k$  da Equação (2.2.1-5) em um intervalo aberto para que a nova variável de controle assumira qualquer valor real:

Admitimos:

$$k = k_{\max} \cos^2 \theta, \theta \in R \quad (3.1.2.2-1)$$

e substituindo (3.1.2.2-1) em (2.2.1-5) vem:

$$0 \leq k_{\max} \cos^2 \theta \leq k_{\max} \quad (3.1.2.2-2)$$

onde

$$0 \leq \cos^2 \theta \leq 1 \quad (3.1.2.2-3)$$

Derivando parcialmente em relação à nova variável de controle vem:

$$\frac{\partial H}{\partial k} = \frac{\partial H}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial k} = 0 \quad (3.1.2.2-4)$$

Assim

$$\frac{\partial \theta}{\partial k} = \frac{-1}{k_{\max} \sin 2\theta} \neq 0 \Rightarrow \frac{\partial H}{\partial \theta} = 0 \quad (3.1.2.2-5)$$

Substituindo (3.1.2.2-1) em (3.1.2.1-2) temos:

$$H(v, h, m, \lambda, k, t) = -\lambda_v \left[ \frac{k_{\max} \cos^2 \theta v_E}{m} + \frac{P(h)}{m} - \frac{D(v, h)}{m} - g \right] - \lambda_h v + \lambda_m k_{\max} \cos^2 \theta \quad (3.1.2.2-6)$$

e derivando parcialmente (3.1.2.2-6) em relação a  $\theta$  vem:

$$\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \begin{cases} k = k_{\max} \neq 0 \\ \text{sen } 2\theta \left[ \frac{\lambda_v v_E}{m} - \lambda_m \right] = 0 \end{cases} \quad (3.1.2.2-7)$$

Analisando a Equação (3.1.2.2-7), são definidos os possíveis valores ótimos da variável de controle  $k$ :

$$\blacksquare \frac{\lambda_v v_E}{m} - \lambda_m \neq 0 \Rightarrow \text{sen } 2\theta = 0 \Rightarrow \begin{cases} \theta = \frac{\alpha\pi}{2} \\ \alpha = 0 \pm 1 \pm 2 \pm 3 \dots \end{cases} \quad (3.1.2.2-8)$$

Substituindo, a Equação (3.1.2.2-8) em (3.1.2.2-1), obtem-se uma solução da forma:

$$k = k_{\max} \cos^2 \left[ \frac{\alpha\pi}{2} \right] \Rightarrow \begin{cases} \text{para } \alpha_{\text{pares}} = 0, 2, 4, \dots & k^* = k_{\max} & (3.1.2.2-9) \\ \text{para } \alpha_{\text{impares}} = 1, 3, 5, \dots & k^* = 0 & (3.1.2.2-10) \end{cases}$$

$$\blacksquare \frac{\lambda_v v_E}{m} - \lambda_m = 0 \quad (3.1.2.2-11)$$

O caso (3.1.2.2-11) não pode ser determinado, pois não fornece nenhuma informação de como obter a variável de controle  $k$ . Este caso será objeto de estudo no próximo Capítulo.

### 3.1.2.3 Equação de Euler para as Variáveis de Estados

Derivando a função Hamiltoniana em relação a cada variável de estado temos:

$$\dot{\lambda} = \begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial x_1} \\ \frac{\partial H}{\partial x_2} \\ \frac{\partial H}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \begin{cases} \dot{\lambda}_v = -\lambda_h + \frac{\lambda_v D_v}{m} & (3.1.2.3-1) \\ \dot{\lambda}_h = -\frac{\lambda_v}{m} [P_h - D_h - mg_h] & (3.1.2.3-2) \\ \dot{\lambda}_m = \frac{\lambda_v}{m^2} [k v_E + P(h) - D(v, h)] & (3.1.2.3-3) \end{cases}$$

### 3.1.3 Condição de Weierstrass

A condição necessária do mínimo para satisfazer o controle ótimo é dada pela seguinte equação:

$$\Delta H = H(x, k, \lambda, t) - H(x, k^*, \lambda, t) \geq 0 \quad (3.1.3-1)$$

$$\Delta H = [\lambda_v, \lambda_h, \lambda_m] \begin{bmatrix} \frac{1}{m} [k v_E + P - D - W] - \frac{1}{m} [k^* v_E + P - D - W] \\ 0 \\ -k + k^* \end{bmatrix} \geq 0 \quad (3.1.3-2)$$

Para  $\lambda_h \neq 0$  temos:

$$\Delta H = \left( \lambda_v \left[ \frac{v_E}{m} \right] - \lambda_m \right) (k - k^*) \geq 0 \quad (3.1.3-3)$$

O termo  $\left( \lambda_v \left[ \frac{v_E}{m} \right] - \lambda_m \right)$  é chamado de função comutadora (**“Switching-Function”**) e é denotado como  $S(t)$  .:

$$S(t) = \left[ \frac{\lambda_v v_E}{m} - \lambda_m \right] \quad (3.1.3-4)$$

A função comutadora  $S(t)$  é o processo que permite determinar a altitude máxima do foguete em três casos possíveis.

$$\left\{ \begin{array}{ll} (1) \quad k^* = k_{\max} & \text{se } S(t) > 0 \end{array} \right. \quad (3.1.3-5)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} (2) \quad 0 \leq k^* \leq k_{\max} & \text{se } S(t) = 0 \end{array} \right. \quad (3.1.3-6)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} (3) \quad k^* = 0 & \text{se } S(t) < 0 \end{array} \right. \quad (3.1.3-7)$$

[8]

Note-se, que os casos (3.1.3-5) e (3.1.3-7), definem os sub-arcos não singulares, embora seja importante ressaltar que, quando a variável de controle ótima, passa bruscamente do valor máximo para o valor mínimo, sem passar pela variável de controle ótima singular, trata-se de Problema do tipo “Bang-Bang”. O caso (3.1.3-6), chama-se de controle singular ou sub-arcos singulares.

### 3.1.4 Condição de Controle Singular

Queremos determinar a solução da Equação (3.1.3-6), calculando a primeira derivada da função comutadora  $S(t)$ , até que se encontre explicitamente a variável de controle ótima procurada.

Derivando a função comutadora ( $S(t)$ ), em relação ao tempo temos:

$$\dot{S}(t) = \frac{d}{dt} \left[ \frac{\lambda_v v_E}{m} - \lambda_m \right] = \frac{\dot{\lambda}_v v_E}{m} - \frac{\dot{m} \lambda_v v_E}{m^2} - \dot{\lambda}_m \quad (3.1.4-1)$$

Introduzindo as expressões  $\dot{\lambda}_v$  e  $\dot{\lambda}_m$  na equação vem:

$$\dot{S}(t) = -\frac{\lambda_h v_E}{m} - \frac{\lambda_v}{m^2} [P(h) - D_v v_E - D(v, h)] \quad (3.1.4-2)$$

se  $\dot{S}(t) = 0$  e  $m \neq 0$  temos:

$$\lambda_v = -\frac{m v_E \lambda_h}{[P(h) - D_v v_E - D(v, h)]} \quad (3.1.4-3)$$

Pode-se ver que na primeira derivada de ( $\dot{S}(t)$ ), nenhum termo da variável de controle  $k$  foi encontrada. Logo, calcularemos em seguida a segunda derivada de ( $\ddot{S}(t)$ ) e assim por diante, até que seja explicitamente encontrada a variável de controle ótima de  $k$  procurada.

Assim

$$\ddot{S}(t) = \frac{d^2}{dt^2} [S(t)] = \frac{d}{dt} [-\lambda_h m v_E - \lambda_v [P(h) - D_v v_E - D(v, h)]] \quad (3.1.4-4)$$

ou ainda,

$$\ddot{S}(t) = [-\dot{\lambda}_h m v_E - \lambda_h \dot{m} v_E - \dot{\lambda}_v [P(h) - D_v v_E - D(v, h)] - \lambda_v [\dot{P}(h) - \dot{D}_v v_E - \dot{D}(v, h)]] \quad (3.1.4-5)$$

mas

$$\dot{D}_v = D_{vv} \dot{v} + D_{vh} \dot{h} \quad (3.1.4-6a)$$

$$\dot{D}(v, h) = D_v \dot{v} + D_h \dot{h} \quad (3.1.4-6b)$$

$$\dot{P}(h) = P_h \dot{h} \quad (3.1.4-6c)$$

Substituindo as Equações (3.1.4-6a, b, c) e (3.1.4-3) em (3.1.4-5) temos:

$$\begin{aligned}
\ddot{S}(t) = & -\lambda_h \left[ \frac{m v_E^2 [P_h - D_h - m g_h] - v_E D_v [P(h) - D(v, h) - D_v v_E]}{[P(h) - D_v v_E - D(v, h)]} \right] + \dots \\
& - \lambda_h \left[ \frac{(D_{vv} v_E^2 + v_E D_v) [k v_E - P(h) + D(v, h) - W(m, h)]}{[P(h) - D_v v_E - D(v, h)]} \right] + \\
& - \lambda_h \left[ \frac{m v v_E [-P_h + D_h + D_{vh} v_E]}{[P(h) - D_v v_E - D(v, h)]} \right] + \lambda_h [k v_E - P(h) + D_v v_E + D(v, h)]
\end{aligned}
\tag{3.1.4-7}$$

Para  $\lambda_h \neq 0$  e  $\ddot{S}(t) = 0$  temos:

$$\begin{aligned}
k = & \frac{m v_E [-P_h + D_h + m g_h] + m v [P_h - D_h - D_{vh} v_E] + D_{vv} v_E [-P(h) + D(v, h) + W(m, h)]}{[D_{vv} v_E^2 + 2 D_v v_E + D(v, h) - P(h)]} + \dots \\
& \frac{-2 D_v^2 v_E + D_v [2 P(h) - 2 D(v, h) + W(m, h)]}{[D_{vv} v_E^2 + 2 D_v v_E + D(v, h) - P(h)]} - \frac{[P(h) - D(v, h)]^2}{v_E [D_{vv} v_E^2 + 2 D_v v_E + D(v, h) - P(h)]}
\end{aligned}
\tag{3.1.4-8}$$

Finalmente, manipulando a Equação acima, a variável de controle procurada na Equação (3.1.3-6) apareceu explicitamente em (3.1.4-8), e será chamada de variável de controle singular  $k^*_S$ .

$$\begin{aligned}
k^*_S = & \frac{m v_E [-P_h + D_h + m g_h] + m v [P_h - D_h - D_{vh} v_E] + D_{vv} v_E [-P(h) + D(v, h) + W(m, h)]}{[D_{vv} v_E^2 + 2 D_v v_E + D(v, h) - P(h)]} + \dots \\
& \frac{-2 D_v^2 v_E + D_v [2 P(h) - 2 D(v, h) + W(m, h)]}{[D_{vv} v_E^2 + 2 D_v v_E + D(v, h) - P(h)]} - \frac{[P(h) - D(v, h)]^2}{v_E [D_{vv} v_E^2 + 2 D_v v_E + D(v, h) - P(h)]}
\end{aligned}
\tag{3.1.4-9}$$

Admitindo que:

$$\Psi = D_{vv}v_E^2 + 2D_vv_E + D(v, h) - P(h) \quad (3.1.4-10)$$

e, levando a Equação (3.1.4-10) em (3.1.4-9) vem:

$$k^*_s = \frac{1}{\Psi} \left[ \begin{array}{l} [-m v_E P(h) + m v_E D_h + m^2 v_E g] + [m v P_h - m D_h v + m v v_E D_{vh} - D(v, h)] + \dots \\ -\frac{1}{v_E} [P(h) - D(v, h)]^2 + D_{vv} v_E [-P(h) + D(v, h) + W(m, h)] - 2D_v^2 v_E + \dots \\ D_v [2P(h) - D(v, h) + W(m, h)] \end{array} \right] \quad (3.1.4-11)$$

Resumido:

$$\left\{ \begin{array}{ll} (1) \quad k^* = k_{\max} & \text{se } S(t) > 0 \end{array} \right. \quad (3.1.4-12)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} (2) \quad k^* = k^*_s & \text{se } S(t) = 0 \quad (\text{controle singular}) \quad [\text{vide eq (3.1.3-6)}] \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} (3) \quad k^* = 0 & \text{se } S(t) < 0 \end{array} \right. \quad (3.1.4-13)$$

### 3.1.5 Determinação da Seqüência de Variável de Controle Ótimo

Para que possamos calcular a altitude máxima de um foguete lançado verticalmente na atmosfera, deve-se primeiramente determinar a seqüência de variável de controle ótima a ser aplicada no instante inicial do movimento do vôo. Deseja-se determinar os multiplicadores de Lagrange das Equações anteriores (3.1.2.1-2), (3.1.3 -4) e (3.1.4-2), que formam um sistema de três equações com três incógnitas conforme mostrado abaixo:

Resolvendo o sistema temos:

$$\begin{cases} \lambda_v(-k v_E - P(h) + D(v, h) + mg) - \lambda_h m v + \lambda_m m k = 0 & (3.1.5-1a) \\ \lambda_v(P(h) - D_v v_E - D(v, h)) + \lambda_h m v_E = 0 & (3.1.5-1b) \\ \lambda_v v_E = 0 - \lambda_m m = 0 & (3.1.5-1c) \end{cases}$$

e, onde

$$Det = \begin{bmatrix} [-k v_E - P(h) + D(v, h) + mg] & -m v & +m k \\ [P(h) - D_v v_E - D(v, h)] & m v_E & 0 \\ v_E & 0 & -m \end{bmatrix} \quad (3.1.5-2)$$

$$Det = -m^2 v_E [-k v_E - P(h) + D(v, h) + mg] - m^2 v [P(h) - D_v v_E - D(v, h)] - m^2 k v_E^2 = 0$$

- Para  $m \neq 0$  e  $Det = 0$  temos:

$$v = \frac{v_E [P(h) - D(v, h) - mg]}{[P(h) - D_v v_E - D(v, h)]} \quad (3.1.5-3)$$

Substituindo a Equação (3.1.5-3) no sistema de equação acima vem:

$$\lambda_v [+P(h) - D(v, h) - D_v v_E] + \lambda_h m v_E = 0 \quad (3.1.5-4)$$

Introduzindo a Equação (3.1.5-4) no sistema de equações acima chega-se às seguintes :

$$\begin{cases} \lambda_v = \frac{-m v_E}{[P(h) - D(v, h) - D_v v_E]} \\ \lambda_m = \frac{-v_E}{[P(h) - D(v, h) - D_v v_E]} \\ \lambda_h = 1 \end{cases} \quad (3.1.5-5)$$

levando as expressões  $\lambda_v, \lambda_m$  e  $\lambda_h$  da Equação (3.1.5-5), nas Equações (3.1.2.1-2), (3.1.3 -4) e (3.1.4-2).

Obtem-se:

$$\begin{cases} S(t) = 0 \\ \dot{S}(t) = 0 \\ H(t) = 0 \end{cases} \quad (3.1.5-6)$$

Convém salientar mais uma vez que, quando tivermos a condição (3.1.5-3), teremos as condições da Equação (3.1.5-6).

Então, ao longo da trajetória ótima

$$\begin{cases} H(t) = 0 \\ S(t) = 0 \end{cases} \quad (3.1.5-7)$$

Neste caso, como já foi dito antes, a variável de controle a ser aplicada será, obviamente,  $k^* = k^*_s$  [vide eq (3.1.3-6)].

- Para  $m \neq 0$  e  $Det \neq 0$  temos:

$$v \neq \frac{v_E [P(h) - D(v, h) - mg]}{[P(h) - D_v v_E - D(v, h)]} \quad (3.1.5-8)$$

aplicaremos as variáveis de controle seguinte,  $k^* = k_{\max}$  e  $k^* = 0$  [vide eq (3.1.4-12) e (3.1.4-14)].

É interessante notar que, para determinar a seqüência de variável de controle a ser aplicada ao movimento do foguete no instante inicial  $t = 0$ , analisaremos a Equação (3.1.5-3), recorrendo às Equações (3.1-3 a), (3.1-3b) e (3.1-3c):

Aplicando as condições iniciais na Equação (3.1.5-3) vem:

$$v(0) = \frac{v_E [P(0) - D(v(0), h(0)) - W(m(0), h(0))]}{[P(0) - D_v v_E (v(0), h(0)) - D(v(0), h(0))]} \quad (3.1.5-9)$$

Como

$$D(v(0), h(0)) = (0, 0); \quad D_v(v(0), h(0)) = (0, 0) \quad (3.1.5-10)$$

então

$$v(0) = \frac{v_E [P(0) - W(m_0, 0)]}{[P(0)]} \quad (3.1.5-11)$$

Recorrendo à Equação (2.1.1-1) vem:

$$F_1 = T + P(h) = -\dot{m}v_E + \{P_e - P_1(h)\}A_e \quad (3.1.5-12)$$

onde:

$\left\{ \begin{array}{l} P(h) \equiv \text{força causada na saída da tubeira do motor do foguete} \\ \text{devido à diferença de pressão é uma parcela à caráter} \\ \text{corretivo sendo, no instante inicial } (t = 0), \text{ muito menor} \\ \text{do que a parcela estático } (T = -\dot{m}v_E), \text{ e muito menor que} \\ \text{a força gravitacional, } W(m, h). \end{array} \right.$

e, finalmente:

$$\left\{ \begin{array}{l} P(0) < W(m_0, 0) \\ v_E > 0 \end{array} \right. \quad (3.1.5-13)$$

Portanto, para que haja movimento no instante inicial ( $t = 0$ ) do vôo, a taxa mássica que sai da tubeira do motor tem que ser diferente de zero ( $k = -\dot{m} \neq 0$ ), o que confirma a condição da Equação (3.1.5-8).

ou seja,

$$v(0) \neq \frac{v_E [P(0) - W(m_0, 0)]}{[P(0)]} \quad (3.1.5-15)$$

Logo,

$$v(0) \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} k(0) = k^*(0) = k_{\max} \\ k(0) = k^*_s(0) = k_{\max} \end{cases} \quad (3.1.5-16)$$

Finalmente, da Equação (3.1.5-16), concluiremos que a variável de controle a ser aplicada no início do movimento é  $k = k^* = k_{\max}$  .



## 4 EFEITOS DA TERRA CURVADA, EM ROTAÇÃO

Neste Capítulo são estudados os efeitos da rotação da Terra sobre a trajetória de um foguete lançado verticalmente.

### 4.1 Equacionamento de Trajetórias no Campo Gravitacional Newtoniano

#### 4.1.1 Algumas Características do Campo Newtoniano

Como se sabe, o equacionamento do movimento em campo central de forças do tipo newtoniano é dado pela equação.

$$\vec{F}(r) = -\left(\frac{S}{r^2}\right)\hat{e}_r \quad (4.1.1-1)$$

onde

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{F}(r) \equiv \text{força do campo;} \\ r \quad \equiv \text{coordenada radial do sistema cilíndrico;} \\ \hat{e}_r \quad \equiv \text{versor radial das bases do mesmo sistema;} \\ S \quad \equiv \text{fator de proporcionalidade, constante.} \end{array} \right.$$

A Equação (4.1.1-1) pode ser escrita na forma:

$$F(r) = -\frac{S}{r^2} \quad (4.1.1-2)$$

com

$$F(r) = |\vec{F}(r)| \quad (4.1.1-3)$$

### Nota -1

A origem do sistema de coordenadas é colocada no centro de massa Terra & míssil. Como a massa do míssil é  $m \lll M_T$  (massa da Terra), para todos os fins práticos, podemos admitir que a origem esteja colocada no centro da Terra. Veremos mais adiante que, para as velocidades iniciais que não ultrapassam a velocidade de escape do míssil, este vai-se mover ao longo de uma elipse cujo foco, “ativo” vai coincidir com o centro da Terra.

É fácil ver que o campo representado pela Equação (4.1.1-1) é potencial. De fato, o potencial é.

$$V = -\frac{S}{r}, \quad (4.1.1-4)$$

pois

$$-\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{S}{r^2} = F(r) \quad (4.1.1-5)$$

Recorrendo à variável

$$u = \frac{1}{r} \Rightarrow r = \frac{1}{u} \quad (4.1.1-6)$$

e substituindo a Equação (4.1.1-4) em (4.1.1-2) temos:

$$F\left(\frac{1}{u}\right) = -Su^2 \quad (4.1.1-7)$$

No campo Newtoniano atrativo (tal como o campo gravitacional), tem-se  $S > 0$ . Comparando-se as Equações (2.1.3-1) e (5.1.1-2) temos:

$$F(r) = -\frac{GM_T m}{r^2} = -\frac{S}{r^2} \Rightarrow S = GM_T m \quad (4.1.1-8)$$

### 4.1.2 Leis de Kepler

Como se sabe da Mecânica Celeste, a trajetória no campo do tipo da Equação (4.1.1-7) satisfaz as chamadas leis de Kepler:

- 1) - Todos os planetas movem-se em torno do Sol, em órbita elíptica, estando o Sol em um dos dois focos, chamado de “ativo”.
- 2) - O vetor posição do planeta em relação ao Sol varre a mesma área em intervalos iguais de tempo.
- 3) - O quadrado do período de revolução do planeta é diretamente proporcional ao cubo da distância média do Sol.

Como uma das conseqüências das leis de Kepler, temos:

- As órbitas dos planetas são planares; assim, o equacionamento do movimento pode ser expresso num sistema de coordenadas polares, com a origem no foco “ativo” do campo gravitacional.
- A chamada “velocidade areal”, isto é, referida à área varrida pelo vetor-posição, é constante. Ela pode ser expressa pela chamada “quantidade de movimento angular”,  $\vec{h}$ .

#### **Nota -2**

As leis de Kepler valem para qualquer campo gravitacional. Por exemplo, no caso de um míssil movendo-se no campo terrestre, a palavra “Sol” deve ser substituída pela “Terra” e a palavra “Planeta” por “Míssil” (por exemplo)

### 4.1.3 Equação de Energia

Sendo o campo gravitacional potencial, a energia mecânica global é preservada.

Temos:

- 1) A equação da energia cinética é dada por:

$$T_c = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) \quad (4.1.3-1)$$

onde, pela segunda lei de Kepler, temos:

$$h = r^2\dot{\theta} \quad (\text{constante}) \quad (4.1.3-2)$$

Assim, temos

$$T_c = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + \frac{h^2}{r^2}\right) \quad (5.1.3-3)$$

- 2) A energia potencial,  $V$ , é dada pela Equação (4.1.1-4).

Assim, a energia mecânica total é

$$E_{m_{tot}} = T_c + V = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + \frac{h^2}{r^2}\right) - \frac{S}{r} \quad (4.1.3-4)$$

#### 4.1.4 Equação da Trajetória

como

$$\frac{d\theta}{dr} = \frac{\dot{\theta}}{\dot{r}} = \frac{h}{r^2} \quad (4.1.4-1)$$

associando as Equações (4.1.3-4) e (4.1.4-1), temos:

$$d\theta = \frac{hmr^{-2}dr}{\sqrt{2m\left[E + \frac{S}{r}\right] - \frac{h^2}{r^2}}} \quad (4.1.4-2)$$

ou então,

$$\theta - \theta_0 = \pm \int \frac{hmr^{-1}dv}{\sqrt{2mEr^2 + 2mSr + h^2m}} \quad (4.1.4-3)$$

introduzindo a variável

$$u = \frac{1}{r}, \quad (4.1.4-4)$$

resulta que:

$$\theta - \theta_0 = - \int \frac{du}{\sqrt{\frac{2E}{mh^2} + \frac{2Su}{mh^2} - u^2}} \quad (4.1.4-5)$$

Chamando

$$\alpha = \frac{2E}{mh^2}; \quad \beta = \frac{2S}{mh^2}; \quad \gamma = -1$$

e recorrendo às tabelas de integrais, temos:

$$\theta - \theta_0 = \frac{1}{\sqrt{-\gamma}} \arccos \left\{ - \frac{\beta + 2\gamma u}{\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}} \right\}$$

ou seja,

$$\theta - \theta_0 = \arccos \left\{ \frac{u - \frac{S}{mh^2}}{\sqrt{\frac{S^2}{m^2 h^2} - \frac{2E}{mh^2}}} \right\} \quad (4.1.4-6)$$

onde  $\theta_0$  é uma constante de integração que pode ser determinada pelas condições iniciais. Voltando à variável  $r$ , [vide eq (4.1.4-4)], obtem-se.

$$r = \frac{p}{1 - e \cos(\theta - \theta_0)} \quad (4.1.4-7)$$

onde

$$p = \frac{mh^2}{S} \quad (4.1.4-8)$$

$$e = \sqrt{1 + \frac{2Eh^2}{S^2}} \quad (4.1.4-9)$$

O parâmetro “ $p$ ” é chamado de “semi latus rectum” e “ $e$ ” de “excentricidade” (em latim, “latus rectum” significa “lado reto”). Como se sabe da Geometria Analítica, a Equação (4.1.4-7) representa as chamadas curvas cônicas (elípticas, incluindo circunferência, parábola ou hipérbole) com a origem colocada num dos focos chamado “ativo” da curva.

#### 4.1.5 Interpretação dos Parâmetros “p” e “e”

Observemos que a Equação (4.1.4-7) é expressa em coordenadas polares  $r, \theta$ . Notemos o valor mínimo de  $r$  corresponde ao valor  $\theta = \theta_0$  neste caso:

$$r = r_{\min} = \frac{p}{(1-e)} \quad (4.1.5-1)$$

Assim,  $\frac{p}{(1-e)}$  é a distância mais curta entre o foco e a curva. Notemos ainda que, se  $\theta = \theta_0 \pm \frac{\pi}{2}$ , e  $e < 1$ , tem-se:

$$r = r_L = p \quad (\text{semi latus rectum}) \quad (4.1.5-2)$$

Desta maneira podemos admitir  $\theta_0 = 0$  e o eixo  $x$  a direção da distância mais curta. A Figura 4.1 mostra um esquema da configuração da curva cônica nas vizinhanças do foco ativo.

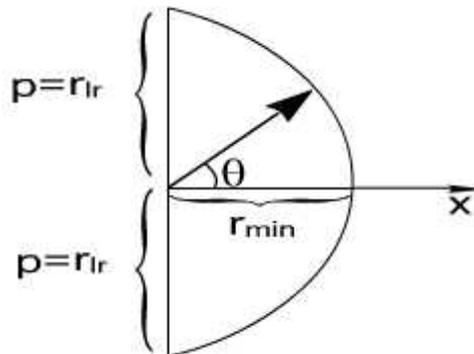


FIGURA 4.1 - Configuração da curva cônica nas vizinhanças do foco ativo.

A expressão “e” (excentricidade) denota o tipo de curva cônica.

Assim temos:

$0 \leq e \leq 1 \rightarrow$  Elipse (quando  $e = 0 \rightarrow$  circunferência);

$e = 1 \rightarrow$  Parábola;

$e > 1 \rightarrow$  Hipérbole.

Em nosso caso só interessam trajetórias fechadas, isto é com  $0 \leq e \leq 1$ .

#### 4.1.6 Forma Alternativa da Equação de Trajetória

Diferenciando duas vezes a Equação (4.1.4-5) em relação a  $u$ , obtém-se uma equação diferencial linear de ordem 2, extremamente simples:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = C \quad (\text{constante}) \quad (4.1.6-1)$$

A solução da Equação (4.1.6-1) é imediata:

$$u = \frac{1}{r} = A \sin \theta + B \cos \theta + C \quad (4.1.6-2)$$

da qual, recorrendo-se às condições iniciais e calculando A,B,C obtém-se a solução (4.1.6-1). Embora a solução geral seja simples, o cálculo das constantes de integração apresenta certa dificuldade.

## 4.2 Equação da Trajetória de um Míssil em relação à Superfície da Terra

### Curvada, sem Movimento

#### 4.2.1 Considerações Gerais

Qualquer míssil lançado da superfície da Terra move-se num campo gravitacional Terrestre e, portanto, após o instante de “burn-out”, não levando em conta a resistência do ar, move-se ao longo da trajetória cônica, com um dos focos (o ativo) colocado no centro da Terra [8].

O movimento parabólico só poderia ser considerado, se a superfície da Terra fosse sem curvatura.

A trajetória do tipo em questão sofrerá a ação dos fatores diferentes:

- 1) - A própria curvatura da superfície, como já foi mencionado.

2) - A rotação Terrestre com a velocidade angular:

$$\omega = \frac{2\pi \text{ rad}}{24h} \quad (4.2.1-1)$$

que agirá impondo uma componente tangencial ao movimento do míssil em relação à superfície fixa.

#### 4.2.2 Condições Iniciais do Lançamento

A Figura 4.2 mostra um esquema da trajetória de um míssil.

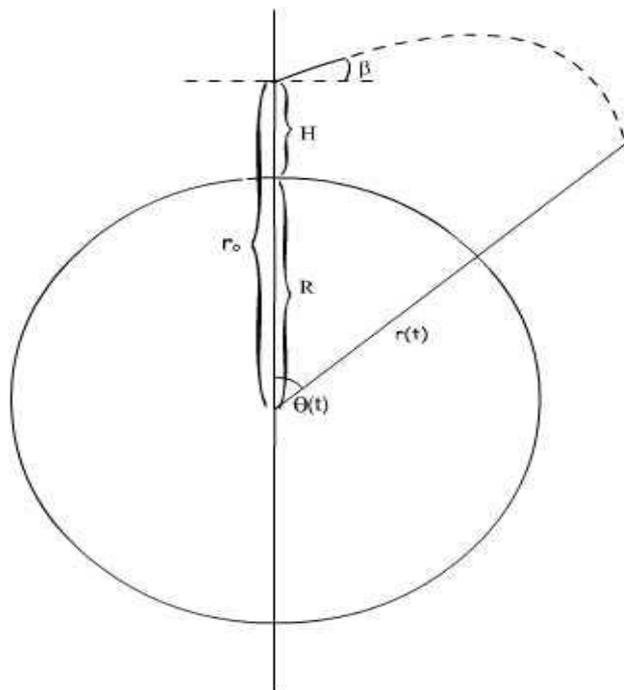


FIGURA 4.2 - Esquema da trajetória de um míssil.

Como na Seção anterior, introduziremos um sistema polar de coordenadas,  $r, \theta$  com a origem no centro da Terra.

Sejam:

$$\left\{ \begin{array}{l} r_0 \equiv \text{posição inicial do foguete em relação ao centro da Terra no "burn-out";} \\ R \equiv \text{raio da Terra;} \\ H \equiv \text{altitude do ponto inicial da trajetória em cima da superfície;} \\ \beta_0 \equiv \text{ângulo inicial da trajetória em relação à linha horizontal local.} \end{array} \right.$$

As expressões  $r(t)$  e  $\beta(t)$  são as mesmas que  $r_0$  e  $\beta_0$ , só que num instante genérico,  $t$ . Escolhendo um certo instante como inicial ( $t=0$ ) é fácil verificar que no instante inicial temos:

$t = 0,$

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta = \beta_0 \\ r = r_0 \\ \theta = 0 \end{array} \right. \quad (4.2.2-1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{r}_0 = v_0 \sin \beta_0 \Rightarrow \text{componente radial da velocidade} \\ \dot{\theta} = \frac{v_0}{r_0} \cos \beta_0 \Rightarrow \text{componente polar da velocidade} \end{array} \right. \quad (4.2.2-2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\theta} = \frac{v_0}{r_0} \cos \beta_0 \Rightarrow \text{componente polar da velocidade} \end{array} \right. \quad (4.2.2-3)$$

O valor de  $h$  pode ser também determinado das condições iniciais, embora permaneça invariante durante toda a trajetória.

$$h = \dot{\theta} r^2 = \frac{v_0}{r_0} [\cos \beta_0] r_0^2 = v_0 r_0 \cos \beta_0 \quad (= \text{constante}) \quad (4.2.2-4)$$

### 4.2.3 Equação Diferencial e sua Solução Geral

Levando em conta a Equação (4.1.6-1) temos:

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = C \quad (4.2.3-1)$$

onde

$$C = \frac{GMm}{mh^2} = \frac{GM}{v_0^2 r_0^2 \cos^2 \beta_0} \quad (= \text{constante}) \quad (4.2.3-2)$$

Introduzindo uma variável adimensional

$$\rho = \frac{rv^2}{GM} \quad (4.2.3-3)$$

temos, da Equação (4.2.3-2)

$$C = \frac{GMm}{r_0 v_0^2} \frac{1}{r_0 \cos^2 \beta_0} = \frac{1}{\rho_0} \frac{1}{r_0 \cos^2 \beta_0} \quad (4.2.3-4)$$

A Equação (4.2.3-1) é, obviamente, linear, não homogênea, de ordem 2, com coeficientes constantes. Como é fácil verificar a sua solução geral é;

$$u = \frac{1}{r} = A \sin \theta + B \cos \theta + C \quad (4.2.3-5)$$

onde A e B são constantes de integrações e C é dada por (4.2.3-2)

#### 4.2.4 Solução Particular

Diferenciando (4.2.3-5) em relação ao tempo, temos:

$$\dot{u} = -\frac{1}{r^2} \dot{r} = A \dot{\theta} \cos \theta - B \dot{\theta} \sin \theta \quad (4.2.4-1)$$

Substituindo as Equações (4.2.2-1) em (4.2.3-5) temos:

$$u = \frac{1}{r_0} = A \sin(0) + B \cos(0) + C \Rightarrow B + C = \frac{1}{r_0} \quad (4.2.4-2)$$

ou, então,

$$B = \frac{1}{r_0} - C = \frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_0} \frac{1}{\rho_0 \cos^2 \beta_0} \quad (4.2.4-3)$$

$$Br_0 = 1 - \frac{1}{\rho_0 \cos^2 \beta_0}$$

Substituindo as Equações (4.2.2-2) em (4.2.4-1) temos:

$$\dot{u} = -\frac{v_0 \sin \beta_0}{r_0^2} = A \frac{v_0}{r_0} \cos \beta_0 \cos(0) - B \frac{v_0}{r_0} \cos \beta_0 \sin(0)$$

$$-v_0 \sin \beta_0 = A v_0 r_0 \cos \beta_0 \Rightarrow A = -\frac{\sin \beta_0}{r_0 \cos \beta_0} \quad (4.2.4-4)$$

$$\Rightarrow Ar_0 = -tg\beta_0$$

Assim, a Equação (4.2.3-5) fica:

$$u = \frac{1}{r} = -\frac{tg\beta_0}{r_0} \sin \theta + \frac{1}{r_0} \left( 1 - \frac{1}{\rho_0 \cos^2 \beta_0} \right) \cos \theta + \frac{1}{r_0} \frac{1}{\rho_0 \cos^2 \beta_0} \quad (4.2.4-5)$$

ou, então

$$\frac{r_0}{r} = -tg\beta_0 \sin \theta + \frac{1}{r_0} \left( 1 - \frac{1}{\rho_0 \cos^2 \beta_0} \right) \cos \theta + \frac{1}{r_0} \frac{1}{\rho_0 \cos^2 \beta_0}$$

$$= \frac{-\sin \beta_0}{\cos \beta_0} \sin \theta + \cos \theta + \frac{1 - \cos \theta}{\rho_0 \cos^2 \beta_0}$$

$$\frac{r_0}{r} = \frac{-\sin \beta_0 \sin \theta + \cos \beta_0 \cos \theta}{\cos \beta_0} + \frac{1 - \cos \theta}{\rho_0 \cos^2 \beta_0} \quad (4.2.4-6)$$

assim, obtém-se

$$\frac{r_0}{r} = \frac{\cos(\beta_0 - \theta)}{\cos \beta_0} + \frac{1 - \cos \theta}{\rho_0 \cos^2 \beta_0} \quad (4.2.4-7)$$

### **Nota- 3**

Como se sabe da Mecânica Celeste, esta é a equação de qualquer curva cônica, com foco ativo no ponto  $r = 0$  (centro da Terra). Curvas cônicas, não

degeneradas, são: elipse (incluindo o círculo), parábola e hipérbole. As duas últimas constituem trajetórias que se estendem até o infinito. Neste trabalho estudaremos somente trajetórias fechadas: elipse ou, no caso particular, a circunferência.

#### 4.2.5 Alcance da Trajetória

O alcance da trajetória ( $\theta_{\max}$ ) é obtido quando o míssil tocar na superfície terrestre, isto é, quando  $r = R$ . Assim, a relação entre  $\theta_{\max}$  e as condições iniciais, é dada por:

$$\frac{r_0}{r} = \frac{\cos(\beta_0 - \theta_{\max})}{\cos \beta_0} + \frac{1 - \cos \theta_{\max}}{\rho_0 \cos^2 \beta_0} \quad (4.2.5-1)$$

onde as grandezas  $\rho_0, r_0, e \beta_0$  denotam as condições iniciais. Se a trajetória começar na superfície terrestre, a relação entre  $\theta_{\max}$  e os valores iniciais é:

$$\frac{\cos(\beta_0 - \theta_{\max})}{\cos \beta_0} + \frac{1 - \cos \theta_{\max}}{\rho_0 \cos^2 \beta_0} = 1 \quad (4.2.5-2)$$

A relação acima pode fornecer uma dependência explícita entre o alcance  $\theta_{\max}$  e as condições iniciais. Realmente, (4.2.5-2) pode ser escrito da seguinte forma:

$$\rho_0 \cos \beta_0 (\cos \beta_0 \cos \theta_{\max} + \sin \beta_0 \sin \theta_{\max}) + 1 - \cos \theta_{\max} = \rho_0 \cos^2 \beta_0$$

ou, então,

$$(\rho_0 \cos^2 \beta_0 - 1) \cos \theta_{\max} + \rho_0 \cos \beta_0 \sin \beta_0 \sin \theta_{\max} = -1 - \rho_0 \cos^2 \beta_0 \quad (4.2.5-3)$$

Observemos que a equação, acima tem a forma:

$$M(\rho_0, \beta_0) \cos \theta_{\max} + N(\rho_0, \beta_0) \sin \theta_{\max} + Q(\rho_0, \beta_0) = 0$$

e, assim,

$$M \cos \theta_{\max} \pm N \sqrt{1 - \cos^2 \theta_{\max}} + Q = 0$$

$$\Rightarrow (M \cos \theta_{\max} + Q)^2 = -N^2 - N^2 \cos^2 \theta_{\max}$$

$$M^2 \cos^2 \theta_{\max} + 2MQ \cos \theta_{\max} + N^2 + N^2 \cos^2 \theta_{\max} = 0 \quad (4.2.5-4)$$

e, finalmente,

$$(M^2 + N^2) \cos^2 \theta_{\max} + 2MQ \cos \theta_{\max} + N^2 = 0 \quad (4.2.5-5)$$

A Equação (4.2.5-5), é uma equação quadrática da qual se pode calcular  $\cos \theta_{\max}$  ou termos das expressões M, N, Q que dependem apenas das condições iniciais.

#### **Nota- 4**

Os valores de M, N e Q são:

$$\left\{ \begin{array}{l} M = \rho_0 \cos^2 \beta_0 \end{array} \right. \quad (4.2.5-6)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} N = \rho_0 \cos \beta_0 \sin \beta_0 \end{array} \right. \quad (4.2.5-7)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Q = 1 + \rho_0 \cos^2 \beta_0 \end{array} \right. \quad (4.2.5-8)$$

### **4.3 Lançamento Vertical Considerando a Rotação da Terra**

#### **4.3.1 Considerações Gerais**

Notemos que o movimento rotacional da Terra não influencia a trajetória do míssil, descrita nas Seções 4.3.1 e 4.3.2, no plano inercial da força central (pois o centro da Terra não se move em relação à superfície). Assim, no plano inercial o míssil move-se, ao longo de uma cônica com foco ativo no centro da Terra. Ademais, se a trajetória for uma curva fechada, ela tem que ser elíptica. A Figura 4.3 mostra um esquema da trajetória elíptica inercial de um míssil lançado da superfície da Terra Curvada (esférica).

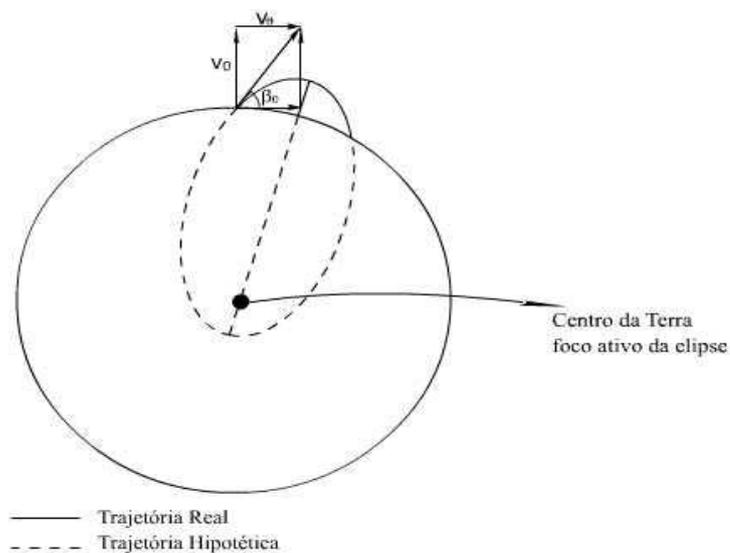


FIGURA 4.3 - Trajetória elíptica inercial de um míssil lançado da superfície da Terra Curvada (esférica).

Na Seção anterior, a velocidade inicial do míssil foi determinada em relação à superfície da Terra, tendo duas componentes:

- 1) - A vertical  $V_v$
- 2) - A tangencial,  $V_t$

Notemos que as duas componentes determinam também

- a) - O ângulo  $\beta_0$ , pois.

$$\operatorname{tg}\beta_0 = \frac{V_0}{V_\theta} \quad (4.3.1-1)$$

b) - O versor  $\hat{e}_n$  normal ao plano inercial (isto é, plano aonde é aplicado a 2ª Lei de Newton).

$$\hat{e}_n = (V_0\hat{e}_r) + (V_t\hat{e}_t) \quad (4.3.1-2)$$

Conhecendo-se estes dois elementos e a velocidade inercial temos:

$$\vec{v}_0 = V_0\hat{e}_r + V_t\hat{e}_t \quad (4.3.1-3)$$

bem como as coordenadas geográficas do sitio do lançamento, a equação da trajetória pode ser imediatamente determinada (incluindo o alcance  $\theta_{\max}$  ).

#### 4.3.2 O Ponto de Impacto considerando a Rotação da Terra

A velocidade linear (na direção tangencial) é dada pela equação:

$$v_t = R\Omega \quad (4.3.2-1)$$

onde:

$\Omega$  = módulo da velocidade angular da Terra da Equação (4.2.1-1)

- Notemos que para, um observador no plano inercial, valem os resultados das seções anteriores deste Capítulo.
- Porém, um observador fixo na superfície vê o míssil sujeito às forças de Coriolis e às centrífugas.

A velocidade resultante,  $\vec{v}_0$ , inercial no lançamento, é composta da velocidade de  $\vec{V}_0$  do foguete em relação à superfície da Terra, mais a velocidade  $\vec{V}_t$  imposta pelo movimento da Terra em relação ao plano inercial, onde, obviamente temos:

$$\vec{V}_t = \vec{r}_0 \vec{\Omega} \quad (4.3.2-3)$$

com

$$|\vec{\Omega} \vec{r}_0| = \Omega r \cos \lambda_0 \quad (4.3.2-4)$$

onde  $\lambda_0$  é a latitude do sítio do lançamento.

Assim

$$\vec{v}_0 = \vec{V}_0 + \vec{\Omega} \vec{r}_0 \quad (4.3.2-5)$$

A variável adimensional inicial,  $\rho_0$ , fica:

$$\rho_0 = \frac{r_0 v_0^2}{GM} = \frac{r_0 |V_0 + \Omega r_0|^2}{GM} \quad (4.3.2-6)$$

Para lançamento vertical (em relação ao observador na superfície), o ângulo  $\beta_0$  pode ser determinado da seguinte equação:

$$\operatorname{tg} \beta_0 = \frac{v_0}{v_\theta} \quad (4.3.2-7)$$

A Figura 4.4 mostra um esquema do ângulo  $\beta_0$  de saída do foguete.

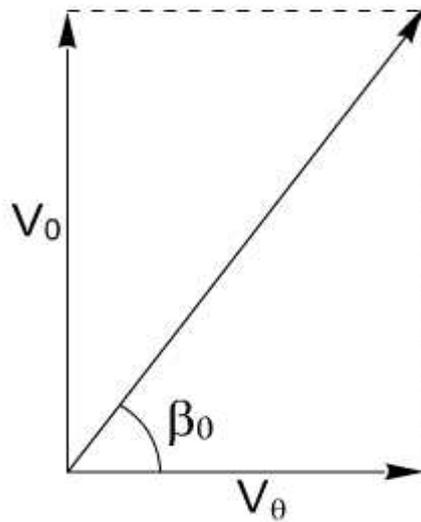


FIGURA 4.4 - Ângulo  $\beta_0$  de saída do foguete.

O versor que normaliza o plano inercial pode ser determinado pela Equação (4.3.1-2).

O alcance,  $\theta_{\max}$  pode ser determinado da Equação (4.2.5-5). Quanto ao ponto de impacto (isto é, latitude e longitude), temos que levar em conta, que durante o percurso da trajetória o intervalo  $\Delta t$ , a posição da Terra em relação ao plano inercial fica deslocada de ângulo.

$$\alpha = \Omega \Delta t \quad (4.3.2-8)$$

Para determinar o tempo  $\Delta t$  decorrido durante a trajetória, pode-se recorrer à Equação (4.1.3-2).

## 5 RESOLUÇÃO NUMÉRICA

### 5.1 Exemplo

Queremos através de um exemplo, resolver o problema de otimização da altitude de um foguete hipotético lançado verticalmente na atmosfera com os seguintes dados:

Massa inicial do foguete	$m_0 = 1000 \text{ kg}$
Massa de combustível	$m_c = 750 \text{ kg}$
Massa final	$m_f = \frac{1}{4} m_0 = 250 \text{ kg}$
Tempo de queima	$t_q = 60 \text{ s}$

$$\text{Considerar constante; } \begin{cases} \text{fluxo de massa} \rightarrow k^* = k_{\max} \\ \text{aceleração gravitacional} \rightarrow g_0 = 9,81 \left( \frac{m}{s^2} \right) \\ \text{velocidade de escape dos gases} \rightarrow v_E = 2000 \left( \frac{m}{s} \right) \end{cases}$$

Determinar, nos diferentes casos considerados:

- 1) O fluxo de massa;
- 2) A velocidade  $v_q(t_q)$  do foguete na fase final 1 ( $t = t_q$ );
- 3) A altitude  $h_q(t_q)$  no instante ( $t = t_q$ );
- 4) A altitude máxima do foguete;
- 5) A energia total do foguete,  $E_f = m_f \left( \frac{1}{2} v_q^2(t_q) + g h_q(t_q) \right)$ ;
- 6) Apresentar a tabela dos resultados para todos os casos considerados

## Resolução

Pela 2ª Lei de Newton:

$$F = m\dot{v} \quad (5.1-1)$$

Como sabemos, um foguete movendo-se no espaço livre (isto é, no vácuo), sem a pressão P(h) e sem ângulo de ataque os resultantes das forças durante o vôo são dados pela seguinte equação.

$$F = T - W = |\dot{m}|v_E - mg_0 \quad (5.1-2)$$

Igualando as Equações (5.1-1) e (5.1-2) temos:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{v_E}{m} \frac{dm}{dt} - g_0 \quad (5.1-3)$$

A Equação (5.1-3) pode integrada imediatamente entre  $t = 0$  e  $t$  genérico.

$$\int_0^t dv = -\int_0^t \frac{v_E}{m} dm - \int_0^t g_0 dt \quad (5.1-4)$$

As condições iniciais são:

$$\begin{cases} v(0) = 0 \\ m(0) = m_0 \end{cases} \quad (5.1-5)$$

assim

$$v(t) - v(0) = -v_E \ln m \Big|_0^t - g_0 t \quad (5.1-6)$$

logo

$$v(t) = v_E \ln \frac{m_0}{m(t)} - g_0 t \quad (5.1-7)$$

A velocidade  $v(t)$  do foguete no instante  $t$  (arbitrário) da fase1 ( $0 \leq t \leq t_q$ )

$$v(t) = v_E \ln \frac{m_0}{m(t)} - g_0 t \quad (5.1-8)$$

onde

$$\left\{ \begin{array}{l} m_0 - m_c = m_f \rightarrow \text{massa final do foguete (isto é, sem propelente)} \\ t_q \rightarrow \text{instante final da fase propulsiva ("burn-out")} \\ m_c \rightarrow \text{massa combustivel} \end{array} \right.$$

A altitude  $h(t)$  do Foguete no Instante  $t$  (arbitrário) da fase 1 ( $0 \leq t \leq t_q$ )

O caminho,  $h(t)$ , percorrido pelo foguete é, obviamente:

$$h(t) = \int_0^t v(t) dt \quad (5.1-9)$$

ou, então,

$$h(t) = v_E \int_0^t \ln \frac{m_0}{m(t)} dt - \int_0^t g_0 t dt \quad (5.1-10)$$

É obvio que

$$\left\{ \begin{array}{l} m(t) = m_0 - \int_0^t |\dot{m}| dt \\ m(t_q) = m_f = m_0 - m_c \end{array} \right. \quad (5.1-11)$$

Substituindo (5.1-11) em (5.1-10) vem:

$$h(t) = v_E \int_0^t \ln \frac{m_0}{m_0 - \dot{m}t} dt - \int_0^t g_0 t dt \quad (5.1-12)$$

Como sabemos a velocidade  $v_q(t_q)$ , não depende da distribuição temporal da função  $m(t)$  e sim, da quantidade do propelente gasto,  $m_c = m_0 - m_f$  assim, o caminho  $h_q(t_q)$  é dada pela seguinte equação:

$$h_q(t_q) = v_E \int_0^{t_q} \ln \frac{m_0}{m(t)} dt - \int_0^{t_q} g_0 t dt \quad (5.1-13)$$

Fazendo-se uma mudança de variáveis, temos:

$$h(t) = -v_E t_q \int_0^t \ln \left( 1 - \frac{\dot{m}t}{m_0} \right) \frac{dt}{t_q} - \int_0^t g_0 t dt \quad (5.1-14)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} X = \frac{t}{t_q} \\ dX = \frac{dt}{t_q} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} t = X t_q \\ dt = dX t_q \end{array} \right. \quad (5.1-15)$$

Substituindo (5.1-15) em (5.1-14), resulta:

$$h(t) = -v_E t_q \int_0^t \ln \left( 1 - \frac{\dot{m}X t_q}{m_0} \right) dX - \int_0^t g_0 t dt \quad (5.1-16)$$

Admitindo que:

$$\begin{cases} Y = 1 - \frac{\dot{m}Xt_q}{m_0} \\ dY = -\frac{\dot{m}t_q}{m_0} dX \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = 0 \Rightarrow Y = 1 \\ X = 1 \Rightarrow Y = 1 - \frac{\dot{m}t_q}{m_0} \end{cases} \quad (5.1-17)$$

Temos

$$h(t) = \frac{m_0 v_E}{\dot{m}} \int_1^{1 - \frac{\dot{m}t_q}{m_0}} \ln Y dY - \int_0^t g_0 t dt \quad (5.1-18)$$

usando a tabela de integração dos logaritmos temos:

$$h(t) = v_E \left[ t_q + \left( \frac{m_0}{\dot{m}} - t_q \right) \ln \left( 1 - \frac{\dot{m}t_q}{m_0} \right) \right] - \int_0^t g_0 t dt \quad (5.1-19)$$

A equação da taxa de variação de massa  $\dot{m}$  é:

$$k_{\max} = \dot{m} = \frac{m_c}{t_q} \quad (5.1-20)$$

A Figura 5.1 mostra um gráfico da taxa de variação de massa versus tempo de queima.

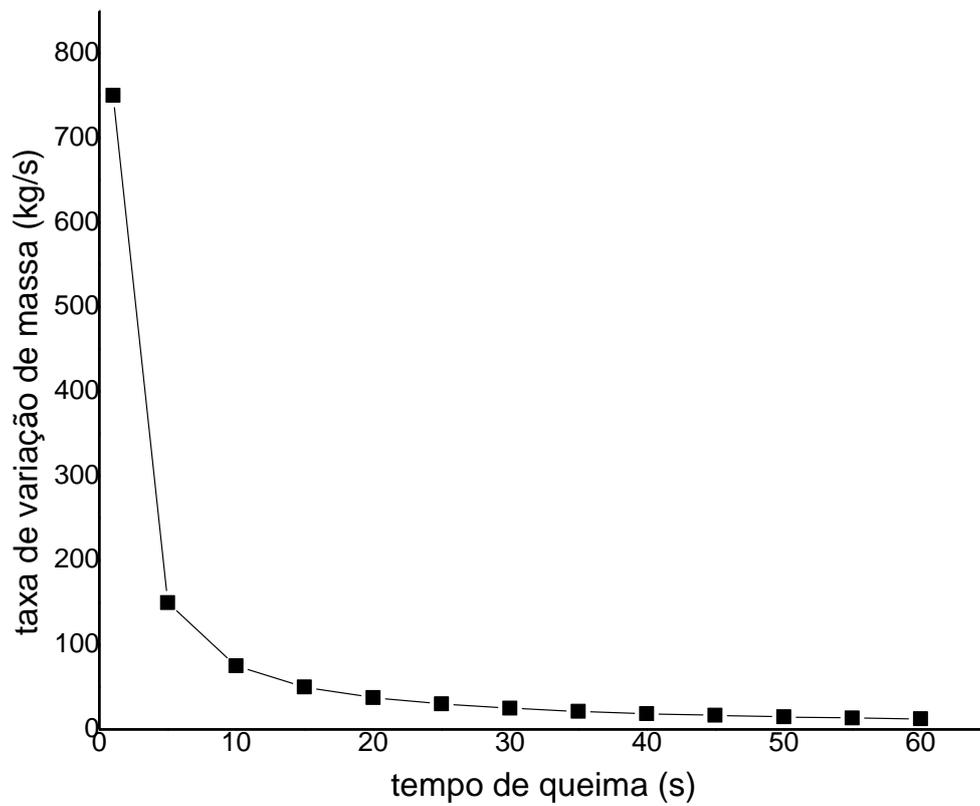


FIGURA 5.1-Taxa de variação de massa versus tempo de queima.

A equação da velocidade do foguete  $v_q(t_q)$  no final da queima é:

$$v_q(t_q) = v_E \ln \frac{m_0}{m_f} - g_0 t_q \quad (5.1-21)$$

A Figura 5.2 mostra um gráfico da velocidade do foguete versus tempo de queima.

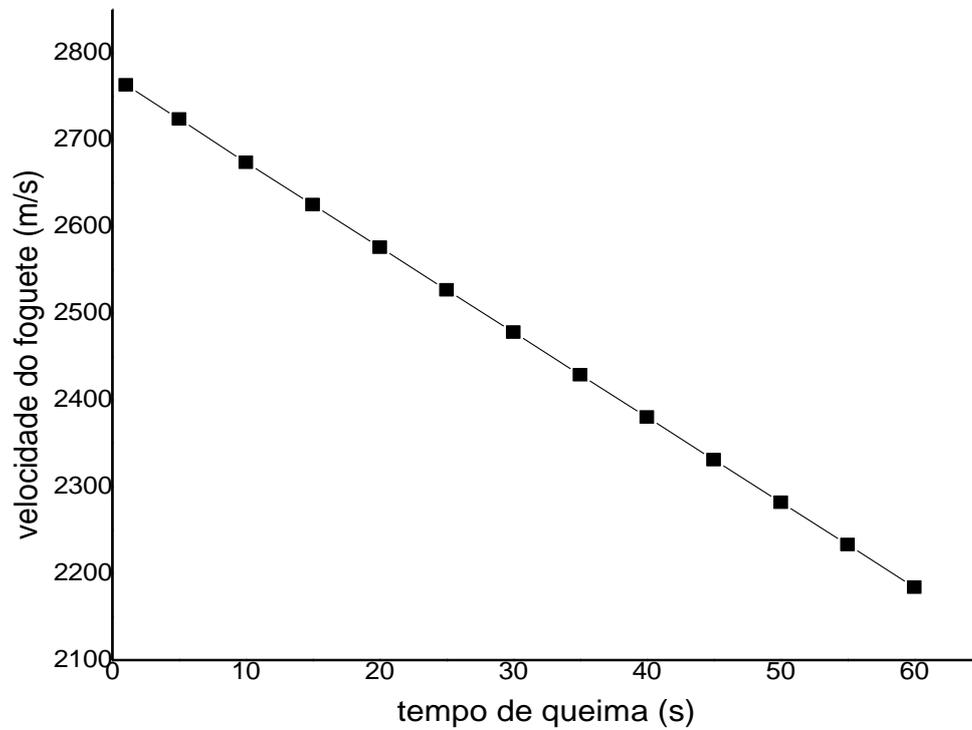


FIGURA 5.2 - Velocidade do foguete versus tempo de queima.

A equação da altitude do foguete no final da queima  $h_q(t_q)$  é:

$$h_q(t_q) = v_E t_q \left[ 1 + \left( \frac{m_f}{m_c} \right) \ln \left( \frac{m_f}{m_0} \right) \right] - g_0 \frac{t_q^2}{2} \quad (5.1-22)$$

A Figura 5.3 mostra um gráfico da altitude do foguete versus tempo de queima.

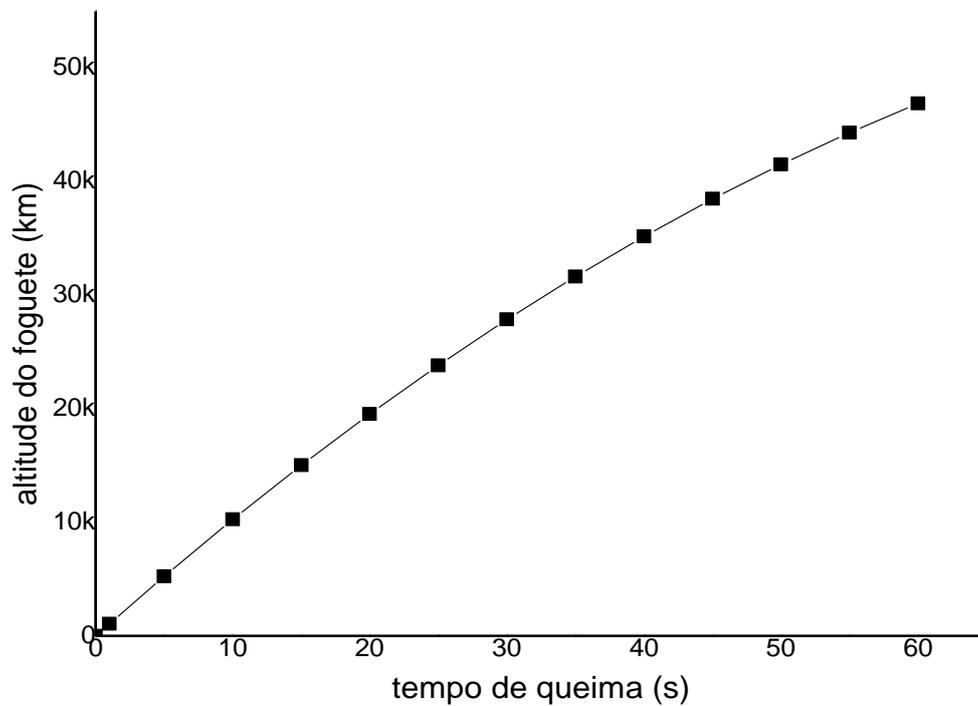


FIGURA 5.3 - Altitude do foguete versus tempo de queima.

A equação da altitude máxima do foguete  $h_{\max}$  é:

$$h_{\max} = \left( \frac{v_q^2(t_q)}{2g} + h_q(t_q) \right) \quad (5.1-23)$$

A Figura 5.4 mostra um gráfico da altitude máxima do foguete versus tempo de queima.

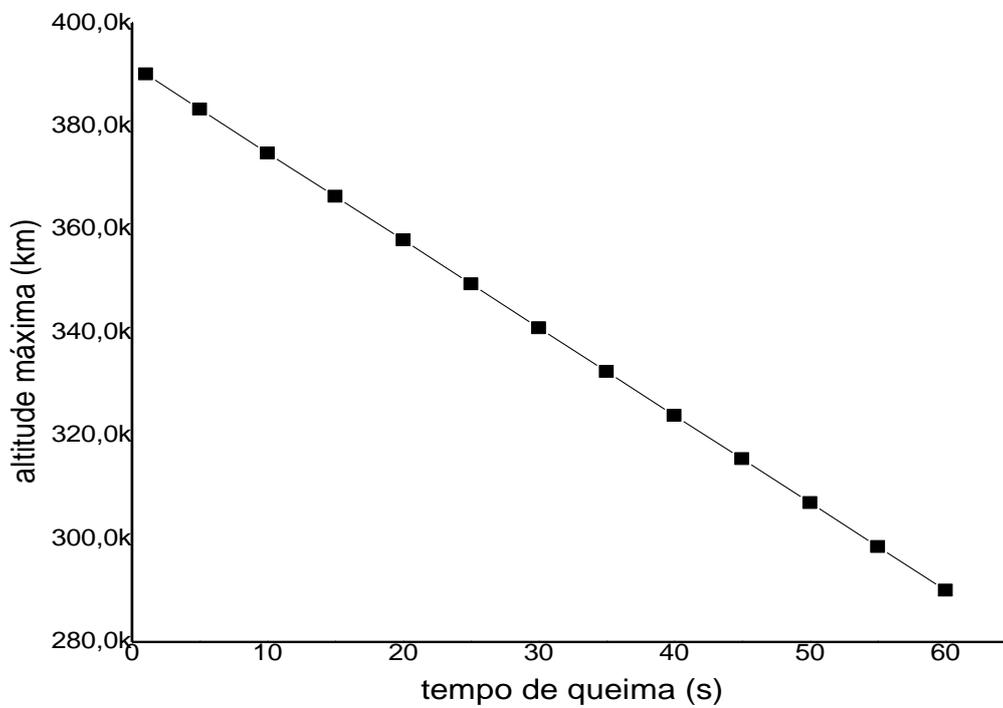


FIGURA 5.4 -Altitude máxima do foguete versus tempo de queima.

A equação da energia total gasto do foguete é:

$$E_T = m_f \left( \frac{1}{2} v_q^2(t_q) + g h_q \right) \quad (5.1-24)$$

A Figura 5.5 mostra um gráfico da energia total gasto do foguete versus tempo de queima.

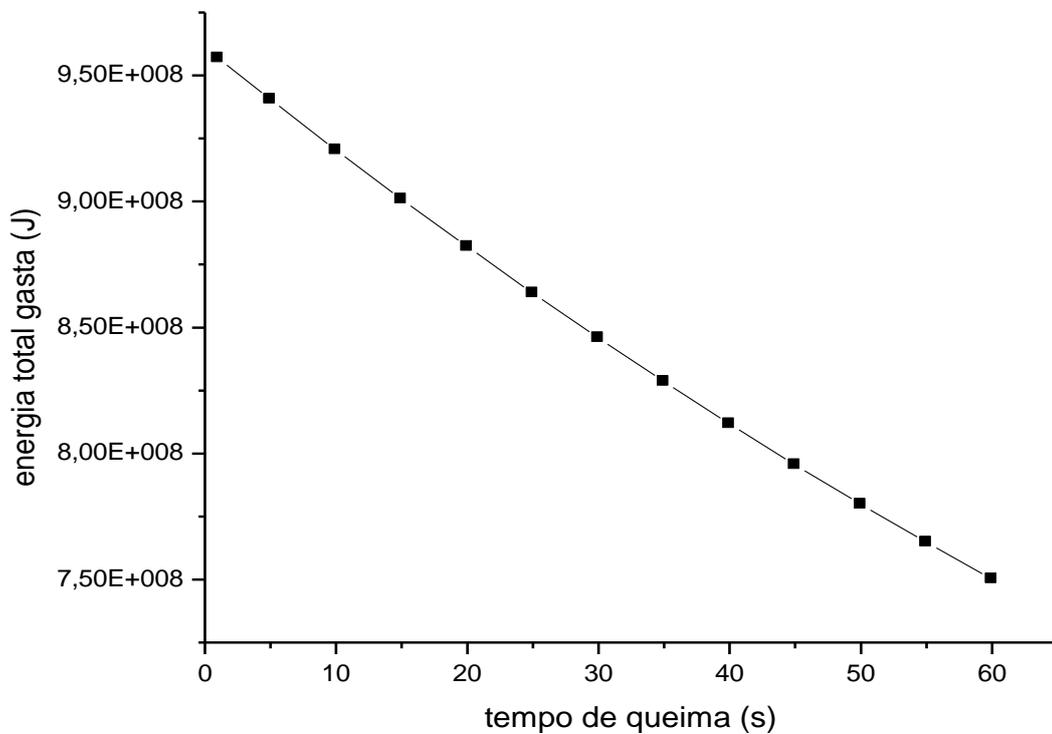


FIGURA 5.5 - Energia total gasta pelo foguete versus tempo de queima.

A Tabela 5.1 a seguir mostra os resultados de todos os casos considerados.

TABELA 5.1 - Resultados dos casos considerados.

Tempos (s)	$k_{\max}$ ( $kg/s$ )	$v_q(t_q)$ ( $km/s$ )	$h_q(t_q)$ km	$h_{\max}$ km	$E_{Tot}$ $10^6 x(J)$
0	-	0	0	0	0
1	750	2.763	1.071	390.1	956.8
5	150	2.724	5.256	383.3	940.4
10	75	2.674	10.27	374.8	920.4
15	50	2.625	15.03	366.4	900.9
20	37.5	2.576	19.55	357.9	882.0
25	30	2.527	23.83	349.4	863.6
30	25	2.478	27.86	340.9	845.8
35	21.4	2.429	31.64	332.4	828.5
40	18.8	2.380	35.18	323.9	811.7
45	16.7	2.331	38.48	315.5	795.5
50	15	2.282	41.53	300.7	779.8
55	13.6	2.233	44.33	298.5	764.7
60	12.5	2.184	46.89	290	750.1

(5.1-25)

## 5.2 Conclusão

No início do movimento do foguete o valor da variável de controle a ser aplicado deve ser  $k = k_{\text{max}}$ . Este valor deve ser mantido até que a função comutadora,  $S(t)$ , e a velocidade,  $v$ , atinjam a igualdade, ou seja,  $S(t) = v$ . Quando acontecer a condição da Equação (3.14-13), aplicaremos, então, a lei de variação singular de controle ao sistema:

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = 0 \\ \frac{d^2S(t)}{dt^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow k^* = k^*_s.$$

Quando a função comutadora é nula ( $S(t) = 0$ ), a variável de controle singular deverá permanecer atuante até que toda a quantidade total de combustível se esgote (ou até que seu valor se anule). Caso a variável de controle singular se anular ( $k^*_s = 0$ ), antes de combustível se esgotar, não teria sentido físico a aplicação da variável de controle singular. Após o instante em que  $k^*_s = 0$ , a aplicar  $k^* = 0$ , o foguete perderá energia cinética sob a ação das forças (gravitacional e de arrasto). Portanto não é viável a aplicação de  $k^* = 0$ , após que ( $k^*_s = 0$ ) uma vez que isso fugiria da solução ótima. Mas se o combustível se esgotar durante a aplicação da variável de controle singular obviamente o próximo e último valor ótimo que a variável poderia assumir é  $k^* = 0$ , neste caso, a seqüência de controle ótima a ser aplicado será  $k^* = k_{\text{max}}$ ,  $k^* = k^*_s$ ,  $k^* = 0$ . No final da queima ( $t = t_q$ ) toda a quantidade de combustível está esgotada, portanto o foguete vai voar com sua inércia, ou seja, a energia armazenada ou adquirida até o final da queima.

No limite quando o tempo de queima  $t_q \rightarrow 0$ , a aceleração  $\dot{v} \rightarrow \infty$ , isto deixa claro que o tempo de queima  $t_q$  não pode ser arbitrariamente curto.

Para se obter um vôo rigorosamente vertical de um míssil, será necessário introduzir continuamente correções na variação de massa dos gases de saída o que não seria prático. Assim, um lançamento vertical pode ser considerado apenas como uma aproximação muito boa para altitude de ordem de até 10 km. Para ter noção do desvio do lançamento vertical, pode-se recorrer às equações válidas para sistemas de coordenadas fixas na superfície da Terra – introduzindo-se as forças de Coriolis e centrífugas.

### **5.3 Sugestão para Trabalho Futuro**

Minimizar o tempo gasto, para se obter o alcance máximo de um foguete a partir de uma dada quantidade de combustível.



## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1].Azimov, M.D. Intermediate-thrust arcs in Mayer's variation problem. **Journal of Applied Mathematics and Mechanics**, v. 64, n. 1, p. 87-95, 2000.
- [2].Azimov, D.M. Analytic solutions for intermediate-thrust arcs of rocket trajectories in a Newtonian field. **PMM Journal of Applied Mathematics and Mechanics**, v. 60, n. 3, p. 421-427, 1996.
- [3].Azizov, G. A.; Korshunova, N.A. An analytical solution of the optimum trajectory problem in gravitational field. **Celestial Mechanics**, v. 38, n. 4, p. 297-306, Apr. 1986.
- [4].Bate, R.R.; Muelles, D. D.; While, J. E. **Fundamentals of astrodynamics**. New York: Dover, 1971.
- [5].Bliss, G. A. **Lectures on the calculus of variations**. Chicago: University of Chicago, 1946.
- [6].Boas, L. M. **Mathematical methods in the physical sciences**. New York, NY: John Wiley, 1966.
- [7].Boltyanskii, V.G; Gamkrelidze, R.V; Pontryagin, L.S. **The mathematical theory of optimal processes**. New York: Inter-sciences, 1962.
- [8].Bryson Jr., A. E.; Ho, Y-C. **Applied optimal control**. New York, NY: John Wiley, 1975.
- [9].Chern, J.-S.; Hong, Z. C. Optimal trajectory for vertical ascent to geosynchronous Earth orbit. **Acta Astronautica**, v. 29, n. 7, p. 497-502, July 1993.
- [10].Cornelisse, W.J. **Rocket propulsion and space flight dynamics**. London, England: Pitman, 1979.

- [11].Elsgolts, L. **Differential equations and the calculus of variations.**  
Moscow: MIR, 1973.
- [12].Fonseca, M. A. F. **Otimização da altitude de foguete lançado verticalmente numa atmosfera com densidade variável.** 1977.  
Dissertação (Mestrado em Física) – Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos, 1977.
- [13].Garfinkel, B. Solution of goddard problem. **Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics, Series A: Control**, v. 1, n. 3, p. 319-348, 1962.
- [14].Gelfand, I. M.; Fomin. S.V. **Calculus of variations.** New Jersey: Prentice-Hall, 1963.
- [15].Goldstein, H. **Classical mechanics.** Reading, MA: Addison-Wesley, 1980.
- [16].Hestenes, R. M. **Calculus of variations and optimal control theory.**  
New York, NY: Wiley, 1966.
- [17].Hildebrand, F. **Methods of applied mathematics.** New Delhi, India: Prentice Hall, 1968.
- [18].Jacoby, S. L. S; Kowalik, J. S.; Pizzo, T. J. **Iterative methods for nonlinear optimization problems.** New Jersey: Prentice-Hall, 1972.
- [19].Kelley, J. H.; Uzzell, B. R.; McKay, S. S. Rocket trajectory optimization by a second-order numerical technique. **AIAA Journal**, v. 7, n. 5, p. 879-884, 1969.
- [20].Kelley, J. H; Tsiotras, P. Drag-law effect in the goddard problem. **Acta Astronáutica**, v. 27, n. 3, p. 481-490, May 1991.

- [21].Kelley, J, H. A second variation test for singular extremals. **AIAA, Journal**, v. 2, n. 8, p. 1380-1382, 1964.
- [22].Kulakowski, J. L.; Stancil. **Rocket boots trajectories for maximum burn out velocity**. Texas: Convair-Fort Worth, [S.d.].
- [23].Lawden, F. D. Rocket trajectory optimization. **Journal of Guidance, Control and Dynamics**, v. 14, n. 4, p. 705-711, July-Aug. 1991.
- [24].Lawden, F. D. **Optimal trajectories for space navigation**. London: Butterworth, 1963.
- [25].Lawden, F. D. Optimal rocket trajectories. **Jet Propulsion**, v. 27, n. 12, p. 1263-1264, 1957.
- [26].Lawden, F. D. **Necessary conditions for optimal trajectories**. New Zealand: University of Canterbury, 1958.
- [27].Lawden, H. G. Trajectory optimization for a rocket with a generalized thrust characteristic. **Astronautica Acta**, v. 10, n. 5-6, p. 279-281, 1964.
- [28].Leitmann, G. **Optimization techniques**. New York, NY: Academic Press, 1962.
- [29].Marec, P. J. **Optimal space trajectories**. Amsterdam, Netherlands: Elsevier, 1979.
- [30].McDanell, J. P.; Powers, W. F. Necessary conditions for joining optimal singular and nonsingular subarcs. **Siam Journal of Control**, v. 9, n. 2, p. 161-173, May 1971.
- [31].McDanell, J. P.; Powers, W. F. New jacobi-type necessary and sufficient conditions for singular optimization problems. **AIAA Journal**, v. 8, n. 8, p. 1416-1420, 1970.

- [32].Meirovitch, L. **Methods of analytical dynamics**. New York, NY: McGraw-Hill, 1970.
- [33].Miele, A. Flight mechanics and variation problems of a linear type. **Journal of the Aerospace Sciences**, v. 25, n. 9, p. 581-590, 1958.
- [34].Miele, A. **Mathematical programming and calculus of variations**. Houston, Texas: Rice University, 1969-1970. Manuscripts of courses.
- [35].Nash, S. G.; Sofer, A. **Linear and nonlinear programming**. New York, NY: McGraw-Hill, 1996.
- [36].National Aeronautics and Space Administration (NASA). **US Standard Atmosphere Supplements**. Washington, DC: NASA, 1966-1976.
- [37].Pierson, L. B Ong, S. Y. Minimum-fuel aircraft transition trajectories. **Advances in Space Research**, v. 11, n. 12, p. 19-27, 1991.
- [38].Ross, I. M. An analysis of first-order singular thrust-arcs in rocket trajectory optimization. **Acta Astronautica**, v. 39, n. 6, p. 417-422, Sept. 1996.
- [39].Shen, Y. C. Formulation of the optimum rocket trajectory. **ARS Journal**, v. 31, n. 1, p. 89-0-, 1961.
- [40].Sielawa, J. T. **Apontamentos de aulas sobre cálculo variacional**. São José dos Campos: Instituto Tecnológico de Aeronáutica, 1987. Anotações de aulas.
- [41].Sielawa, J. T ; Baêta Segundo, J. A. **Mecânica analítica**. São José dos Campos: ITA, 1987. Apostila.
- [42].Sielawa, J. T; Luz, M. S. **Mecânica**. [S.l.]: Os autores, 2000.

- [43].Singe, J. L.; Griffith, B. A. **Principles of mechanics**. New York, NY: McGraw-Hill, 1959.
- [44].Struble, R. A.; Stewart, C. E.; Granton, J. The trajectory of a rocket with thrust. **Jet Propulsion**, v. 28, n. 7, p. 472-478, 1958.
- [45].Tsien, S. H.; Evans, R. E. Optimum thrust programming for a sounding rocket. **Journal of the American Rocket Society**, v. 21, n. 5, p. 99-107, 1951.
- [46].Well, K. H.; Tandon, S. R. Rocket ascent trajectory optimization via recursive quadratic programming. **Journal of the Astronautically Sciences**, v. 30, n. 2, p. 101-116, 1982.
- [47].William, T.T. **Introduction to space dynamics**.New York, NY: Dover, 1986.