

# Prevendo o Fenômeno de Intermitência em Sistemas Caóticos

Rodolfo M. Almeida\*

Elbert E. N. Macau\*

José Demisio S. da Silva\*

\*Laboratório Associado de Computação e Matemática Aplicada (LAC)

Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE)

rodolfo@lac.inpe.br elbert@lac.inpe.br demisio@lac.inpe.br

## Resumo

O fenômeno de intermitência em sistemas que apresentam caos manifesta-se na alternância entre comportamentos regulares e irregulares para determinados valores de parâmetros. O objetivo deste trabalho é apresentar uma forma de se prever quando o próximo comportamento irregular irá acontecer. Para realizar esta previsão um trecho da série temporal do sistema é fornecido e a partir desse conjunto de informações uma rede de funções de base radial sofre o processo de treinamento com os seus parâmetros ajustados para possibilitar a previsão do restante da série temporal.

**Palavras Chaves:** reconstrução de séries temporais, intermitência caótica, sistemas caóticos.

## 1. Introdução

As primeiras evidências de intermitência em sistemas caóticos foi observada por Maneville e Pomeau (1980) no modelo de Lorenz que simplifica a convecção de Rayleigh-Béarnard. O fenômeno de intermitência manifesta-se quando o valor do parâmetro de um sistema dinâmico que corresponde a comportamento caótico aproxima-se de um ponto de bifurcação que dará origem a um ciclo limite atrativo ultrapassando um valor crítico chamado de limiar de intermitência. Para o parâmetro além deste valor crítico o sistema passa a apresentar oscilações regulares e periódicas (laminar phases) intermitentemente no tempo interrompidos por oscilações irregulares (turbulent bursts).

A intermitência é um situação em que o simples e o complexo se alternam constantemente. Por exemplo, em amplificadores eletrônicos de grande precisão ocasionalmente se produzem certas descargas de eletrecidade estática. Isso não se deve a uma interferência externa e sim como consequência dos efeitos não-lineares da interação dos componentes do circuito produzindo certos períodos de comportamento caótico. Com a aparição de relógios atômicos se descobriu que a Terra sofre alterações em sua rotação: ao passo do tempo terrestre não é especificamente regular porque de vez em quando surtos intermitentes de caos. Para prever o processo de intermitência,

torna-se necessário o desenvolvimento de um mecanismo que possibilite reconstruir a dinâmica a partir de um trecho de uma série temporal. Uma solução a este problema pode se dá através de uma rede de funções de base radial.

## 2. Intermitência em Sistemas Caóticos

As primeiras evidências experimentais de intermitência em sistemas caóticos foi observada por Manneville e Pomeau (1980) Manneville and Pomeau (1979) no modelo tri-dimensional de Lorenz que simplifica o problema da convecção de Rayleigh-Béarnard. O mecanismo de intermitência manifesta-se quando o valor do um parâmetro  $r$  de um sistema dinâmico, próximo a um ponto de bifurcação  $r_b$  que dá origem a um ciclo limite atrativo, ultrapassa um valor crítico  $r_i$  chamado de limiar de intermitência. Para  $r$  ultrapassando este valor crítico, o sistema responde com uma oscilação regular representada por um ciclo limite (laminar phases) que são intermitentemente interrompidos por intervalos irregulares (turbulent bursts).

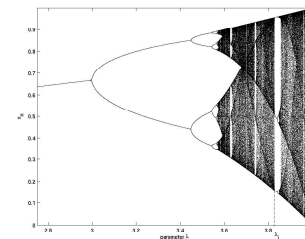


Figura 1: Diagrama de órbitas do mapa logístico.

Um exemplo de sistema dinâmico determinístico com tempo discreto que apresenta o fenômeno é o mapa logístico

$$x_{n+1} = F_\lambda(x_n) = \lambda x_n(1 - x_n) \quad (1)$$

onde  $0 \leq x_n \leq 1$  e  $0 \leq \lambda \leq 1$ . A intermitência que caracteriza-se pela ocorrência da alternância entre estados regulares e irregulares se dá para  $\lambda$  próximo a um ponto de bifurcação tangente  $\lambda_t$  onde podemos ve-lo através do diagrama da figura 1 que mostra o comportamento assintótico do mapa à medida que  $\lambda$  varia. Para o mapa logístico

simulou-se o diagrama de órbitas que representa o comportamento assintótico da equação 1 para  $2,75 \leq \lambda \leq 4$  (veja figura 1). Estamos interessados no valor do parâmetro  $\lambda_b = 1 + \sqrt{8}$  que corresponde ao ponto onde ocorre uma bifurcação tangente NAYfeh and Balachandran (2001) e dando origem ao ciclo limite de período 3. O limiar de intermitência encontra-se na  $\epsilon$ -vizinhança a

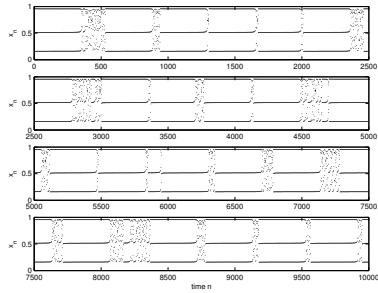


Figura 2: Série temporal do mapa logístico para  $n = 10000$  iterações e  $\lambda = \lambda_b - \epsilon$ .

esquerda de  $\lambda_b$  ( $\lambda_i \in (\lambda_b - \epsilon, \lambda_b)$ ). Utilizando  $\epsilon = 10^{-5}$  e  $x_0 = 0.5$  graficamos a série temporal da equação 1 para  $\lambda = \lambda_b - \epsilon$  e  $n = 1000$  iterações (figura 2).

### 3. Reconstruindo a Dinâmica para Previsão

As redes de regularização foram inicialmente criadas para resolver problemas de interpolação. De acordo com esta técnica, a solução aproximada  $F_\lambda^*(\cdot)$  é expandida em uma série finita:

$$F_\lambda^*(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m w_i \varphi_i(\mathbf{x}), \quad (2)$$

onde  $\{\varphi_i(\mathbf{x}) | i = 1, 2, \dots, m\}$  é um conjunto de funções que assumimos serem linearmente independentes sem perda de generalidade e  $\{w_i | i = 1, 2, \dots, m\}$  são os pesos lineares da camada de saída da rede. Para que esta solução seja ótima, fazendo com que a rede seja um aproximador universal, a série infinita (eq. 2) deve ser expandida em termos de funções de Green  $\varphi_i(\mathbf{x}) = G(\mathbf{x}, \mathbf{t}_i) = G(\|\mathbf{x} - \mathbf{t}_i\|)$ , sendo que nestas condições ela assume a forma de uma função de base radial Haykin (2001). Um exemplo de função de Green é a função gaussiana

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) = e^{-\frac{1}{2\sigma_i^2} \|\mathbf{x} - \mathbf{t}_i\|^2}, \quad (3)$$

com  $\mathbf{t}_i$  representando o centro e  $\sigma$  o espalhamento da curva. Uma família de funções de base radial são suficiente para aproximar qualquer função contínua sobre um conjunto compacto. Consideremos então uma rede de funções de base radial alimentada adiante com três camadas, a de entrada, a oculta e a de saída. A camada de entrada é composta pelo conjunto de  $Q$  pontos diferentes

$\{\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n | i = 1, 2, \dots, Q\}$  e o seu conjunto correspondente de números reais  $\{d_i \in \mathbb{R} | i = 1, 2, \dots, Q\}$  estão ligados à camada de saída (veja figura 3). A solução do problema de interpolação consiste em encontrar uma função  $F : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$F(\mathbf{x}_i) = d_i, \quad i = 1, 2, \dots, Q \quad (4)$$

e neste caso estrito a função obtida é obrigada a passar por todos os pontos dos dados de treinamento. Assumindo as funções  $\varphi$  como funções de Green na forma gaussiana que é o caso da Equação 3, então a solução obtida por esta rede será uma solução “ótima” afirmada pelo o teorema da *aproximação universal* para redes de funções de base radial (Haykin (2001) pag. 320). A primeira camada é com-

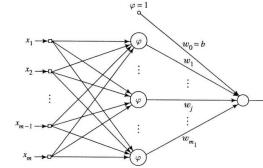


Figura 3: Rede de função de base radial.

posta pelos nós de entrada cujo número é  $N$ . A segunda camada é uma camada oculta composta de  $M$  unidades não-lineares que são conectadas a todos os nós de entradas adiante alimentadas e totalmente conectadas à camada de saída. A camada de saída consiste de uma única unidade linear que executa a soma ponderada entre as saídas de cada elemento da camada oculta  $\varphi_k(\mathbf{x}_i)$  pelo peso da conexão  $w_k$  e um termo independente  $w_0 = b$  com peso 1, onde  $i = 1, 2, \dots, N$  representando os nós de entrada e  $k = 1, 2, \dots, M$  as funções da camada oculta. Desta forma a saída produzida pela rede será

$$y(\mathbf{x}) = F^*(\mathbf{x}) \sum_{k=1}^M w_k G(\|\mathbf{x} - \mathbf{t}_k\|) + b \quad (5)$$

para a rede ajustar os dados de treinamento, exigimos que

$$y(\mathbf{x}_j) = d_j \quad j = 1, 2, \dots, Q \quad (6)$$

onde  $\mathbf{x}_j$  é o valor de entrada e  $d_j$  é o valor de saída desejada. Após obtidos os valores dos pesos parâmetros da rede devidamente ajustados a rede está apta para melhor representar o mapeamento dos dados treinados.

### 4. Resultados e Discussões

A princípio foi utilizada uma série temporal gerada pela equação 1 com condição inicial  $x_0 = 0.5$ , parâmetro  $\lambda_b - \lambda_b = 10^{-5}$  e  $n=10000$  iterações. A rede de funções de base radial proposta para ajustar-se à equação 1 consiste de três funções de base radial na camada oculta com uma entrada e uma saída com funções gaussianas de parâmetros escolhidos  $t_1 = 1/4$ ,  $t_2 = 1/2$  e  $t_3 = 3/4$  com

espalhamento  $\sigma = 10$ . Com isso os pesos podem ser obtidos de maneira direta no treinamento. Após a obtenção dos pesos a rede é então realimentada partindo do último valor treinado e o restante da série é previsto. Inicialmente

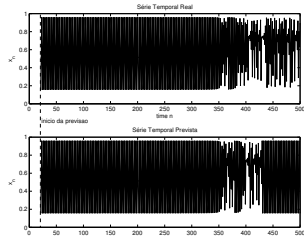


Figura 4: Comparação entre as séries temporais prevista e real após treinamento com dados regulares.

utiliza-se para o treinamento as 20 primeiras iterações da série temporal e tentaremos prever as 480 próximas iterações (figura 4). Percebe-se pela margem de erro que

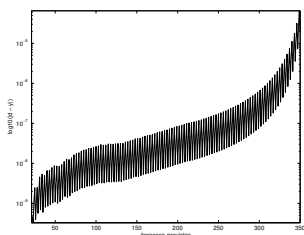


Figura 5: Erro obtido na previsão durante os intervalos regulares (iterações 51-354).

as fases regulares generalizam quase que perfeitamente. No momento em que se inicia a *burst* caótico a previsão é comprometida. Partindo do treinamento sobre um conjunto de dados em cima de um *burst* caótico presente no intervalo de iterações  $n = 350, \dots, 400$  obteve-se a previsão que pode ser observada a seguir. Constata-se na figura

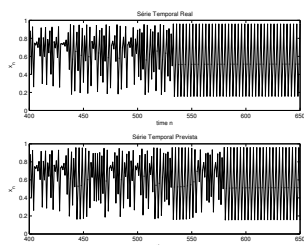


Figura 6: Comparação entre as séries temporais prevista e real após treinamento com dados caóticos.

6 que após o treinamento o *burst* caótico previsto se assemelha bastante com o real mas nada podemos concluir. Analisando o erro obtido em cada iteração na previsão do *burst* podemos verificar que a margem de erro permanece grande e que cresce no momento que o *burst* caótico ter-

mina e o periódico inicia-se. a margem de erro na previsão encontra-se na figura 7.

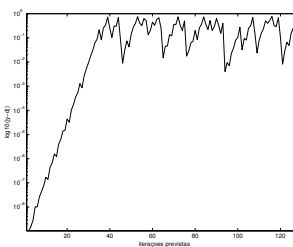


Figura 7: Erro obtido na previsão dos *bursts* caóticos (iterações 401-532).

## 5. Conclusões

Verifica-se através da simples aproximação executada que as redes de funções de base radial apresentam-se como excelentes ferramentas para o ajuste de funções em problemas de interpolação. A estratégia de aprendizagem colocada aqui limitou-se a estabelecer os centros e espalhamentos fixos, mas essa iniciativa só foi tomada pois a priori conhecia-se a função na qual queria-se ajustar a rede. Para situações mais complicadas, onde não se sabe o mapeamento definido, torna-se necessária a adoção de estratégias de aprendizado mais eficientes que consiste em métodos de otimização que faz com que os pesos, centros e espalhamentos sejam atualizados no decorrer do processo de treinamento, ajustando a rede de maneira mais eficiente aos dados do problema. A generalização para o processo de reconstrução dinâmica dos intervalos regulares teve pequena margem de erro. Quando continua-se a previsão e surge um *burst* caótico e esta margem de erro amplifica-se mais rapidamente. O mesmo fenômeno pôde-se constatar durante a tentativa de se prever um *burst* caótico a partir do treinamento com dados caóticos.

## Referências

- Haykin, S. (2001). *Redes Neurais: Princípios e Prática*. Bookman, 2a. edition.
- Manneville, P. and Pomeau, Y. (1979). Intermittency and the lorenz model. *Physical Letters A*, 75(1):1.
- Nayfeh, A. H. and Balachandran, B. (2001). *Applied Nonlinear Dynamics: analytical, computational and experimental methods*. John Wiley & Sons, Inc., 2a. edition.