



Ministério da
Ciência e Tecnologia



INPE-16223-TDI/1544

**COMPORTAMENTO DE LÍQUIDOS NO
ESPAÇO-SLOSHING E AMORTECEDORES DE
NUTAÇÃO VISCOSOS**

Delfim Pinto Carneiro Júnior

Dissertação de Mestrado do Curso de Pós-Graduação em Engenharia e Tecnologia
Espaciais/Mecânica Espacial e Controle, orientada pelo Dr. Ijar Milagre da
Fonseca, aprovada em 27 de maio de 2009.

Registro do documento original:

<<http://urlib.net/sid.inpe.br/mtc-m18@80/2009/05.22.12.56>>

INPE
São José dos Campos
2009

PUBLICADO POR:

Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE

Gabinete do Diretor (GB)

Serviço de Informação e Documentação (SID)

Caixa Postal 515 - CEP 12.245-970

São José dos Campos - SP - Brasil

Tel.:(012) 3945-6911/6923

Fax: (012) 3945-6919

E-mail: pubtc@sid.inpe.br

CONSELHO DE EDITORAÇÃO:**Presidente:**

Dr. Gerald Jean Francis Banon - Coordenação Observação da Terra (OBT)

Membros:

Dr^a Maria do Carmo de Andrade Nono - Conselho de Pós-Graduação

Dr. Haroldo Fraga de Campos Velho - Centro de Tecnologias Especiais (CTE)

Dr^a Inez Staciarini Batista - Coordenação Ciências Espaciais e Atmosféricas (CEA)

Marciana Leite Ribeiro - Serviço de Informação e Documentação (SID)

Dr. Ralf Gielow - Centro de Previsão de Tempo e Estudos Climáticos (CPT)

Dr. Wilson Yamaguti - Coordenação Engenharia e Tecnologia Espacial (ETE)

BIBLIOTECA DIGITAL:

Dr. Gerald Jean Francis Banon - Coordenação de Observação da Terra (OBT)

Marciana Leite Ribeiro - Serviço de Informação e Documentação (SID)

Jefferson Andrade Ancelmo - Serviço de Informação e Documentação (SID)

Simone A. Del-Ducca Barbedo - Serviço de Informação e Documentação (SID)

REVISÃO E NORMALIZAÇÃO DOCUMENTÁRIA:

Marciana Leite Ribeiro - Serviço de Informação e Documentação (SID)

Marilúcia Santos Melo Cid - Serviço de Informação e Documentação (SID)

Yolanda Ribeiro da Silva Souza - Serviço de Informação e Documentação (SID)

EDITORAÇÃO ELETRÔNICA:

Viveca Sant´Ana Lemos - Serviço de Informação e Documentação (SID)



Ministério da
Ciência e Tecnologia



INPE-16223-TDI/1544

**COMPORTAMENTO DE LÍQUIDOS NO
ESPAÇO-SLOSHING E AMORTECEDORES DE
NUTAÇÃO VISCOSOS**

Delfim Pinto Carneiro Júnior

Dissertação de Mestrado do Curso de Pós-Graduação em Engenharia e Tecnologia
Espaciais/Mecânica Espacial e Controle, orientada pelo Dr. Ijar Milagre da
Fonseca, aprovada em 27 de maio de 2009.

Registro do documento original:

<<http://urlib.net/sid.inpe.br/mtc-m18@80/2009/05.22.12.56>>

INPE
São José dos Campos
2009

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Carneiro Júnior, Delfim Pinto.

C214c Comportamento de líquidos no espaço-sloshing e amortecedores de natação viscosos / Delfim Pinto Carneiro Júnior. – São José dos Campos : INPE, 2009.

113p. ; (INPE-16223-TDI/1544)

Dissertação (Mestrado em Mecânica Espacial e Controle) – Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 2009.

Orientador : Dr. Ijar Milagre da Fonseca.

1. Sloshing. 2. Comportamento de líquido. 3. Amortecedores de natação. 4. Microgravidade. 5. Número de Bond I. Título.

CDU 629.7.017.2

Copyright © 2009 do MCT/INPE. Nenhuma parte desta publicação pode ser reproduzida, armazenada em um sistema de recuperação, ou transmitida sob qualquer forma ou por qualquer meio, eletrônico, mecânico, fotográfico, reprográfico, de microfilmagem ou outros, sem a permissão escrita da Editora, com exceção de qualquer material fornecido especificamente no propósito de ser entrado e executado num sistema computacional, para o uso exclusivo do leitor da obra.

Copyright © 2009 by MCT/INPE. No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted in any form or by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording, microfilming or otherwise, without written permission from the Publisher, with the exception of any material supplied specifically for the purpose of being entered and executed on a computer system, for exclusive use of the reader of the work.

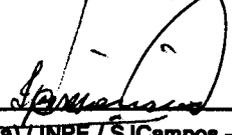
Aprovado (a) pela Banca Examinadora
em cumprimento ao requisito exigido para
obtenção do Título de Mestre em
Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica
Espacial e Controle

Dr. Mario Cesar Ricci



Presidente / INPE / SJC Campos - SP

Dr. Ijar Milagre da Fonseca



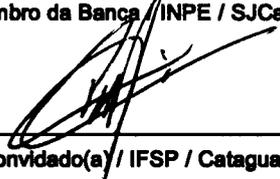
Orientador(a) / INPE / SJC Campos - SP

Dr. Valdemir Carrara



Membro da Banca / INPE / SJC Campos - SP

Dr. Paulo Marcos Aguiar



Convidado(a) / IFSP / Cataguases - MG

Aluno (a): Delfim Pinto Carneiro Júnior

São José dos Campos, 27 de maio de 2009

“O mal é, fundamentalmente, privação de bem”

“Ame e faça o que quiseres”

Santo Agostinho

A meus pais, esposa, filhos e netos.

AGRADECIMENTOS

A meus pais, Delfim e Tereza, porque, sem eles eu não existiria e, principalmente, sem a presença deles eu não seria o que sou.

A meus irmãos, José Roberto, Sérgio, Marina, Eugênio, Antônio, Terezinha e Cecília, com os quais aprendi que viver em comunidade é a melhor forma de viver.

A minha esposa, Neusa, que, com sua família não menos numerosa que a minha, ampliou o universo de minha existência.

A meus filhos, Artur, Heitor, Débora e Sara, sem os quais eu seria menos feliz.

A meus netos, Livia e Caio, que juntos com sua mãe, Rosângela, mostraram-me que sempre é possível ser mais feliz.

A meus sobrinhos e sobrinhas que juntamente com meus filhos e netos mostram-me que é possível ter esperança no ser humano.

Ao Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais.

Ao Prof. Dr. Ijar Milagre da Fonseca que além de orientador, função que exerceu com dedicação e sabedoria tornou-se um amigo.

Aos professores do INPE em especial a André Fenili, Evandro, Hélio Kuga, Marcelo Lopes, Mario Ricci e Valdemir Carrara.

Ao amigo Paulo Marcos que aceitou meu convite de participar neste projeto com alegre entusiasmo.

A todas as pessoas que direta ou indiretamente contribuíram neste processo, em especial aos amigos que se citados aqui formariam uma lista além do razoável e sem levar em conta que eu poderia cometer alguma injustiça ao esquecer-me de alguns.

RESUMO

A dinâmica de atitude de um veículo espacial em órbita da Terra refere-se ao movimento deste veículo em torno do seu centro de massa. O conhecimento do movimento de atitude é fundamental para o cumprimento dos objetivos da missão espacial. O uso adequado de sensores e atuadores, computadores de bordo, GPS, radares e estações terrestres são tecnologias que permitem o controle e estabilização da atitude para manter a atitude do veículo espacial de acordo com suas especificações nominais. Lições aprendidas durante o início da era espacial têm mostrado que a análise dinâmica representa um importante suporte e orientação para o planejamento e o desenvolvimento do subsistema de controle de atitude dos satélites (ACS). Uma dessas lições refere-se ao movimento de peças internas e a associada dissipação de energia interna. As estruturas móveis podem ser dispositivos atuadores como rodas de reação, líquidos dentro recipientes, dispositivos passivos para a estabilização de atitude, robôs manipuladores e entre outros. Este trabalho trata do comportamento de líquidos contidos em contêineres e amortecedores líquidos geralmente usados para a estabilização de satélites estabilizados por rotação. O *sloshing* associado com o movimento de líquidos dentro de contêineres, em veículos espaciais, afeta a atitude deste veículo e deve ser analisado, a priori, para impedir que efeitos indesejáveis afetem o desempenho do controle em manter a atitude do satélite em torno das especificações nominais. Neste sentido, este trabalho procura dar uma contribuição para a melhor compreensão do fenômeno de *sloshing* em ambiente de microgravidade e, dessa forma, proporcionar um melhor entendimento do impacto do *sloshing* no movimento de atitude de satélites artificiais.

FLUID BEHAVIOR IN THE SPACE – SLOSHING AND VISCOUS NUTATION DAMPERS

ABSTRACT

The attitude dynamics refers to the space vehicle motion around its center of mass while orbiting the Earth. The knowledge of the attitude motion is fundamental for the accomplishment of the space mission objectives. The use of appropriate sensors and actuators, onboard computers, GPS and radars and ground stations are among technologies allowing the attitude control and stabilization to keep the spacecraft attitude according to the nominal specifications. Lessons learned during the early days of the space era have shown that the dynamic analysis represents a strong support and guide when planning and developing attitude and control subsystem for satellites (ACS). One of the lessons learned belongs to the context of internal moving parts and the associated internal energy dissipation. The moving components may be actuator devices such as reaction wheels, liquid inside containers, passive devices for attitude stabilizations, robot manipulators and so on. This work deals with the fluid behavior inside tanks and fluid dampers generally used for the sake of stabilization for spin stabilized satellites. The sloshing associated with the fluid dynamics inside spacecraft containers affects the space vehicle attitude and must be analyzed a priori to prevent undesirable effects that affect control performance in keeping the satellite attitude around the nominal specifications. In addition it discusses the passive fluid dampers commonly used in spin-stabilized satellites. Finally, this work intends to contribute to better understanding of the phenomenon of sloshing in microgravity environment, and thus provide a better understanding the sloshing impact in the attitude motion of spacecraft.

SUMÁRIO

Pág.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

LISTA DE SÍMBOLOS

1 INTRODUÇÃO.....	25
2 REVISÃO DA LITERATURA.....	33
3 CONCEITOS SOBRE O COMPORTAMENTO DOS LÍQUIDOS.....	45
3.1. <i>Sloshing</i> em ambiente com gravidade.....	45
3.2. <i>Sloshing</i> em ambiente com microgravidade	49
3.3. Modelo Mecânico para <i>Sloshing</i> em ambiente com gravidade	49
3.4. Modelo Mecânico <i>Sloshing</i> em ambiente com microgravidade	51
4 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA.....	53
4.1. Modelo Matemático	53
4.2. Equações do movimento	54
4.3. Dinâmica de Atitude	60
5 SIMULAÇÕES.....	63
5.1. <i>Sloshing</i> Atuando como Amortecedor de Natação	63
5.2. <i>Sloshing</i> Atuando Como Perturbação na Atitude de um Satélite	65
5.3. Massa líquida em repouso excitada por velocidades transversais	67
6 CONCLUSÃO.....	69
APÊNDICE A - COMPORTAMENTO DOS LÍQUIDOS EM AMBIENTE COM GRAVIDADE	73
A.1. <i>Sloshing</i> Lateral	73
A.1.1. Modelos mecânicos equivalentes de <i>sloshing</i>	73
A.1.2. Respostas de <i>sloshing</i> de ordem superior	74
A.2. Fundamento Matemático	74
A.2.1. Equações diferenciais básicas e condições de contorno	75
A.2.2. Potencial de velocidade Φ	75
A.2.3. Equações de movimento	76
A.2.4. Condições de contorno para a superfície livre.....	76
A.2.5. Condições de contorno nas paredes do tanque	77
A.2.6. Solução das Equações para um Tanque Retangular	79
A.3. Modelo Mecânico	89

A.3.1 Dedução Analítica dos Parâmetros do Modelo	89
A.3.2 Equações do movimento para o modelo mecânico.....	90
A.3.3 Tanque retangular	92

APÊNDICE B - COMPORTAMENTO DOS LÍQUIDOS EM MICROGRAVIDADE	95
B.1.Fundamento Matemático (Cinética e Geometria da Superfície Livre do Líquido) ..	95
B.1.1.Tensão Superficial e Número de Bond	95
B.1.2.Ângulo de Contato Estático e Dinâmico.....	98
B.1.3.Cinemática da Superfície Esférica	103
B.2.Análise Modal.....	105
B.3.Modelo Mecânico	108

LISTA DE FIGURAS

2.1 Ilustração esquemática de uma onda de <i>sloshing</i>	35
2.2 Mesa de mancal esférico aerostático	43
3.1 Ilustração esquemática de uma onda de <i>sloshing</i>	45
3.2 Modelos mecânicos equivalentes do <i>sloshing</i>	46
3.3 Sistema de coordenadas para a obtenção das equações do <i>slosh</i>	47
3.4 Forma de onda do <i>Slosh</i> para os três primeiros modos assimétricos em x de um tanque retangular.	48
3.5 Formas de onda de <i>Slosh</i> para os três primeiros modos simétricos em x para um tanque retangular.	48
3.6 Esquemático do modelo mecânico equivalente para <i>sloshing</i>	50
3.7 Esquemático do modelo mecânico equivalente.....	51
3.8 Massa e constante elástica do <i>slosh</i> fundamental.....	52
4.1 Modelo Físico do Satélite.....	53
4.2 Modelo mecânico equivalente para o modo 1	54
4.3 Ilustração tri-dimensional	56
5.1 Decaimento das velocidades angulares transversais ω_x e ω_y no tempo.....	64
5.2 Decaimento do ângulo de nutação, θ (em graus) e H_z em função do tempo	64
5.3 Comportamento das componentes transversais da quantidade de movimento angular	65
5.4 Decaimento das velocidades angulares transversais no tempo: a) ω_x ; b) ω_y	66
5.5 Variação dos ângulos de atitude	66
5.6 Comportamento de x no tempo.....	67
5.7 Comportamento da velocidade da massa m_1 no tempo	68
A.8 Ilustração esquemática de uma onda de <i>sloshing</i>	73
A.9 Modelos mecânicos equivalentes do <i>sloshing</i>	74
A.10 Sistema de coordenadas para a obtenção das equações do <i>slosh</i>	75
A.11 Forma de onda do <i>Slosh</i> para os três primeiros modos assimétricos em x de um tanque retangular.	82
A.12 Formas de onda de <i>Slosh</i> para os três primeiros modos simétricos em x para um tanque retangular.	83
A.9 Modelos mecânicos equivalentes do <i>sloshing</i>	89
A.10 Esquemático do modelo mecânico equivalente para <i>sloshing</i> lateral.....	90
B.1 Forças de superfície agindo em elemento da superfície do líquido.....	97
B.2 Efeito da tensão de superfície em tubos capilar: (a) Elevação da coluna para um líquido que molha o tubo. (b) Depressão da coluna para um líquido que não molha a parede do tubo.....	97
B.3 Tensão de superfície entre gás, líquido e superfície sólida em equilíbrio estático..	98
B.4 Dependência do ângulo de contato θ_1 na velocidade da linha de contato.....	100
B.6 Esquemático do modelo mecânico equivalente	109
B.7 Força de tensão de superfície na linha de contato líquido-tanque.	110
B.8 Massa e constante elástica do <i>slosh</i> fundamental	112

LISTA DE TABELAS

5.1 – Parâmetros de integração.....	63
-------------------------------------	----

LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

SCD	Satélite de Coleta de Dados
CBERS	Satélite Cino-Brasileiro
ATS	Satélite de Aplicação Científica
SACI	Satélite Científico
AMNUT	Amortecedor de Nutação

LISTA DE SÍMBOLOS

g	Aceleração da gravidade
L	Comprimento da haste do pêndulo
k	Constante elástica
m	Massa
x, y, z	Sistema de coordenada do satélite
X, Y, Z	Sistema de coordenada inercial
Φ	Potencial de velocidade
u, v, w	Velocidades nas direções x , y e z , respectivamente
p	Pressão do fluido
ρ	Densidade do fluido
$\delta(x, y, t)$	Pequeno deslocamento da superfície livre do líquido
h	Altura do líquido
$X(t)$	Deslocamento em função do tempo na direção de x
Ω	Frequência do movimento
ω_n	Frequência natural de <i>slosh</i> do modo assimétrico n
ω_m	Frequência natural de <i>slosh</i> do modo simétrico m
N_{Bo}	Número de Bond
σ	Tensão superficial do líquido
k_n	Constante elástica do modo n
m_n	Massa do modo n
L	Função lagrangiana
T	Energia cinética
V	Energia potencial
q_i	Coordenadas generalizadas
Q_i	Forças externas associadas às coordenadas generalizadas q_i
\vec{r}	Vetor posição
\vec{v}	Vetor velocidade
T_L	Energia cinética do líquido
T_S	Energia cinética do satélite
V_L	Energia potencial do líquido
V_S	Energia potencial do satélite
ω_x, ω_y e ω_z	Velocidade angulares nos eixos X , Y e Z
A , B e C	Momentos principais de inércia do satélite
θ_1, θ_2 e θ_3	Ângulos de Euler

1 INTRODUÇÃO

Wertz (1978) e Hughes (1986) referem-se à orientação de um satélite, em relação a um sistema de referência conhecido, como sendo atitude e o movimento de rotação em torno do seu centro de massa como sendo movimento de atitude. Assim, a atitude e o movimento de atitude definem a orientação espacial e o movimento rotacional em torno do centro de massa de um satélite. A atitude de um satélite em relação a um sistema de referência é vital para a sua missão, por isso, todos os satélites possuem sistemas de controle para manter a atitude nominal do veículo.

A implementação de um sistema de controle de atitude implica no conhecimento dos requisitos da missão (por exemplo, satélites de telecomunicações exigem que a antena do satélite fique apontada para uma antena na superfície da terra) e das forças perturbadoras que agem sobre o satélite. Como a grande maioria dos satélites possuem cargas líquidas, seja na forma de combustível, dissipadores de calor, dentre outras, a força de *sloshing* é uma destas forças perturbadoras da atitude do satélite.

Outro fenômeno que sabidamente resulta na influência do *sloshing* é o *jitter* causado por acelerações residuais (acelerações espúrias sofridas por veículos espaciais em um ambiente de microgravidade). Conforme Ibrahim (2005) o campo de aceleração residual pode ser decomposto em uma componente quase-estável (ou componente sistemática) e uma componente flutuante conhecida como *g-jitter* (vibrações de natureza aleatória). Os valores típicos do componente quase-estável estão em torno de $10^{-6}g_E$ (g_E é a aceleração da gravidade na superfície da Terra). A contribuição flutuante, $g(t)$, é aleatória por natureza e tem frequência característica de 1Hz ou mais. O estudo do *g-jitter* não é objeto deste trabalho.

Os satélites podem ser estabilizados em apenas um eixo, como o SCD1 e SCD2, e em dois eixos, dito também como estabilização em três eixos, uma vez que a estabilização do terceiro eixo é garantida pela estabilização de dois eixos, como o CBERS1 e CBERS2 por exemplo. A terminologia utilizada para o movimento de atitude é a mesma utilizada pela aeronáutica. Denomina-se rolamento (*roll*), o movimento em torno da

direção da velocidade orbital, arfagem (*pitch*), o movimento em torno da direção normal à órbita, e guinada (*yaw*), o movimento em torno da direção Nadir/Zênite. A força de *sloshing* tem impacto sobre esses três movimentos.

Sloshing significa qualquer movimento de uma superfície líquida livre dentro de um recipiente. É causado por qualquer distúrbio em recipientes que estão parcialmente ocupados com líquido. Dependendo do tipo de distúrbio e da forma do container, a superfície líquida livre experimenta tipos diferentes de movimentos incluindo plano, não plano, rotacional, pulsante irregular, simétrico, assimétrico, quase-periódico e caótico. Ao interagir com seu recipiente ou sua estrutura de suporte, a superfície líquida livre pode gerar diversos tipos de movimentos na forma de troca de energia entre os modos de interação. A superfície livre pode entrar em movimento modulado e ocorre quando este movimento interage com a dinâmica da estrutura de apoio próximo das condições de ressonância interna. Sob campo de baixa gravidade, a tensão de superfície é dominante e o líquido pode se orientar aleatoriamente dentro do recipiente dependendo essencialmente das características de molhamento das paredes do recipiente.

O problema básico do *sloshing* implica na estimativa da distribuição da pressão hidrodinâmica, forças, momentos e frequências naturais da superfície livre do líquido. Estes parâmetros têm um efeito direto na estabilidade dinâmica e desempenho dos recipientes em movimento.

Em geral, a pressão hidrodinâmica de líquidos em recipientes rígidos em movimento tem duas componentes distintas. Uma componente é diretamente proporcional à aceleração do tanque. Esta componente é produzida pela parte do fluido movendo-se com a mesma velocidade do tanque. A segunda é conhecida como pressão “convectiva” e representa o movimento da superfície líquida livre. Os modelos mecânicos como massa-mola-amortecedor ou sistema pendular são normalmente usados para modelar a parte do *sloshing*.

Um movimento de líquido dentro de seu recipiente tem um número infinito de frequências naturais, mas os modos mais baixos são os mais susceptíveis de serem

excitados pelo movimento de um veículo. Portanto, a maior parte dos estudos tem se concentrado na investigação de oscilações harmônicas forçadas próximas das frequências naturais mais baixas, previstas pelas equações lineares de campo de fluido. Entretanto, efeitos não lineares resultam em frequência de resposta máxima ligeiramente diferente da frequência natural linear e dependente da amplitude.

As soluções analíticas estão limitadas às formas de tanques geometricamente regulares como cilíndricas e retangulares. A natureza da dinâmica do *sloshing* em tanques cilíndricos é melhor entendida do que para tanques na forma de prisma. Entretanto, técnicas analíticas para prever *sloshing* de grande amplitude ainda não estão totalmente desenvolvidas. Tais cargas são extremamente importantes no estágio de projeto de estruturas de suporte e componentes internos dos tanques de veículos. Para evitar *sloshing* catastróficos em veículos espaciais, as frequências do sistema de controle, as frequências da estrutura elástica do veículo, e as frequências do *sloshing* do fluido devem estar suficientemente separadas.

Os fenômenos de *sloshing* em tanques retangulares em movimento normalmente podem ser descritos considerando-se apenas duas dimensões do fluxo do fluido se a largura do tanque for muito menor que seu comprimento. O *Sloshing* em tanques esféricos ou cilíndricos é normalmente descrito nas três dimensões do fluxo. Tanques com duas dimensões de fluxo são divididos em duas classes: baixa e alta profundidade do líquido. O caso de baixa profundidade é caracterizado pela formação de ressaltos hidráulicos e propagação de ondas para períodos de excitação ao redor da ressonância. Para altas profundidades, geralmente formam-se grandes ondas estacionárias na faixa de frequência de ressonância. Os ressaltos hidráulicos ou propagação de ondas, quando presentes, podem gerar pressões de impacto extremamente altas nas paredes do tanque. As pressões de impactos são avaliadas somente experimentalmente e não podem ser estimadas teórica ou numericamente.

O comportamento dinâmico dos líquidos em recipientes em movimento tem sido motivo de estudo de pesquisadores em diversas áreas como, geofísica, sismologia, engenharia entre outras. Na área espacial, este estudo tem particular importância devido a sua

influência no comportamento dos veículos espaciais, tanto para foguetes quanto para satélites em órbita da Terra. O fluido faz parte do sistema satélite:

- a) na forma de combustível líquido (hidrazina), seja em satélites ou em estações espaciais, como a ISS com grandes tanques de combustíveis;
- b) dissipadores de calor como os *heat pipes*;
- c) dispositivos de controle passivo de atitude como os amortecedores de natação com líquidos viscosos; e
- d) água para consumo, no caso de astronautas em estações espaciais.

A presença de líquido na estrutura das espaçonaves requer cuidadosa análise uma vez que seu movimento dissipa energia interna no veículo além de alterar as propriedades de inércia e simetria da espaçonave. Em alguns casos podem ocorrer problemas de estabilidade nas espaçonaves, associados ao *sloshing*. Por outro lado, o fenômeno de dissipação interna de energia associada ao *sloshing* pode ser utilizado para efeitos de estabilização passiva dos veículos estabilizados por rotação, como é o caso dos amortecedores de natação. A aprendizagem e uso dos amortecedores de natação líquido-viscosos decorreram do acidente com o satélite ATS-5 (*Application Technological Satellite*) – Satélite de Aplicação Científica, cuja missão se perdeu por causa da dissipação interna de energia provocada pelo sistema de refrigeração (*heat pipe*). O satélite possuía um sistema de controle de natação ativo para evitar desvio do eixo de *spin* uma vez que, na fase transitória, o satélite tinha em sua estrutura um motor de apogeu que seria descartado após as manobras orbitais. A presença desse motor fazia com que, durante a queima do combustível, o eixo de rotação fosse o de menor momento de inércia. Esse eixo é sabidamente um eixo instável na presença de dissipação interna de energia (neste caso, causada pela queima do combustível), condição prevista no projeto do subsistema de controle. Porém, como não foi prevista no projeto a dissipação interna de energia provocada pelo seu subsistema de dissipação de calor (*heat pipe*), o subsistema de controle não conseguiu manter a atitude

especificada para esta fase. Nestas circunstâncias, o subsistema de dissipação de calor funcionou como um excelente amortecedor de nutação, levando o satélite à configuração de *flat spin*, ou seja, o eixo de *spin* desviou buscando o eixo estável de maior momento de inércia. Quando o motor de apogeu foi ejetado, o eixo antes instável, tornou-se o eixo de maior momento de inércia. Novamente a dissipação interna de energia, causada pelo *heat pipe*, levou o eixo de *spin* a migrar para o eixo de maior momento de inércia. Porém o eixo de *spin* orientou-se na direção do zênite e não havia mais combustível para nova manobra para a reorientação correta do eixo de *spin*. Perdeu-se, portanto, a missão (KAPLAN, 1976).

No caso do ATS o subsistema de controle projetado para o satélite não conseguiu efetuar o controle na presença da dissipação causada pelo *heat pipe*. Na verdade, desde 1958, com a perda do Explorer-I (primeiro satélite americano) foi constatado que na presença do fenômeno de dissipação interna de energia o eixo de menor momento de inércia se torna instável. A lição aprendida com o ATS-5 é a da utilização de tais dissipadores para garantir a estabilidade direcional do eixo de *spin* em caso de perturbações na atitude do veículo espacial. Recomenda-se que todos os satélites estabilizados por rotação incluam amortecedores de nutação. Os amortecedores de nutação líquido-viscosos são muito eficientes nesses casos. Trata-se ainda de um sistema passivo de amortecimento.

Os satélites brasileiros SCDs são estabilizados por rotação em torno do eixo de maior momento de inércia e contêm eficientes amortecedores de nutação líquido-viscosos em sua estrutura. Os satélites científicos da família SACI também continham amortecedores de nutação líquido-viscosos.

Para o Programa Espacial Brasileiro, estudo do *sloshing* tem indiscutível relevância, uma vez que os satélites normalmente levam combustível líquido para operações de controle de órbita e atitude. A compreensão do impacto do *sloshing* no movimento de atitude contribui para o projeto e implementação de subsistemas de controle mais eficientes. Neste sentido, esse trabalho procura dar uma contribuição para melhor

compreensão do fenômeno de *sloshing* em ambiente de micro-gravidade e, dessa forma, proporcionar um melhor entendimento do impacto do *sloshing* no movimento de atitude de satélites artificiais.

Este trabalho tem como objetivos:

- a) discutir o comportamento do fluido em ambiente de micro-gravidade;
- b) estudar as soluções usadas para minimizar o problema do *sloshing* em veículos espaciais;
- c) estudar as aplicações de fluidos favoráveis ao melhor desempenho do controle de atitude de satélites estabilizados por rotação (spin);
- d) discutir as dificuldades associadas à modelagem e simulação de sistemas contendo líquidos. As equações associadas ao movimento de líquidos são equações a derivadas parciais cuja integração é muito complicada;
- e) discutir as diversas técnicas de modelagem matemática do problema de *sloshing*;
- f) estudar os amortecedores de Nutação e suas aplicações para o SCD1, SCD2 e SACIs; e
- g) gerar um documento (Dissertação) que possa servir de referência para suporte a projeto de futuros satélites no que diz respeito aos subsistemas de controle de atitude, principalmente na presença de *sloshing*.

Utilizou-se dos seguintes meios e recursos para o desenvolvimento deste trabalho:

- a) pesquisa bibliográfica utilizando os recursos da biblioteca do INPE e artigos publicados na literatura da área; e
- b) uso dos recursos computacionais para simulação como MATLAB para o desenvolvimento das simulações.

O desenvolvimento do trabalho proposto está fundamentado nas seguintes metodologias:

- a) Modelagem matemática da dinâmica do *sloshing* em um veículo espacial;
- b) Análise dinâmica via simulação computacional do modelo matemático.

A dissertação está organizada conforme segue.

No Capítulo 1 é feita uma breve introdução sobre *sloshing* onde se procura contextualizar o trabalho aqui apresentado, bem como, descrever as dificuldades inerentes às características de não linearidade do *sloshing*. Está contida também neste capítulo a motivação para o desenvolvimento do trabalho, bem como os objetivos e os recursos e as metodologias utilizadas.

O Capítulo 2 apresenta a revisão bibliográfica.

No Capítulo 3 são apresentados alguns conceitos sobre o *sloshing* em contêineres em movimento em ambiente com gravidade e com microgravidade, bem como, considerações sobre seus modelos mecânico equivalentes.

No Capítulo 4 é apresentada a formulação matemática para a cinemática e dinâmica de um satélite levando-se em conta os efeitos do *sloshing* em ambiente de microgravidade.

No Capítulo 5 são apresentadas as simulações da modelagem matemática envolvendo *sloshing* em ambiente de microgravidade. É feita também a análise dos resultados.

No Capítulo 6 é feita a análise dos resultados e sugestões para futuros trabalhos.

2 REVISÃO DA LITERATURA

A presença de líquidos a bordo de satélites artificiais e estações espaciais como a ISS, por exemplo, dá origem a problemas dinâmicos que afetam significativamente o movimento de atitude do veículo espacial. O estudo e o conhecimento prévio das interações entre o movimento de atitude de satélites e o movimento interno de líquido é fundamental para o projeto eficiente de um subsistema de controle de atitude.

Problemas encontrados em missões espaciais durante o início da era espacial deixaram lições muito interessantes. Dentre elas uso da interação entre o movimento rotacional de veículos espaciais e o de fluido em seus contêineres para fins de estabilidade. Uma dessas lições se refere ao uso de amortecedores de natação viscosos para garantir a estabilidade direcional de satélites estabilizados por rotação. Apresenta-se a seguir uma revisão da literatura na área, visando contextualizar esse trabalho no cenário da dinâmica de atitude de satélites artificiais contendo líquido ou sistemas líquido-viscosos em sua estrutura.

Stofan e Pavli (1962) apresentam os resultados obtidos em experimento realizado pelo *NASA Lewis Research Center* para avaliar a eficácia de amortecimento de *sloshing* para um sistema com fluido contido em bolsa de expulsão positiva (*positive-expulsion bags*) e diafragmas em tanques esféricos. Esses são recursos utilizados para reduzir os efeitos do *sloshing* na dinâmica do veículo espacial. Essa investigação experimental teve por objetivo avaliar a eficácia do amortecimento de *sloshing* das bolsas de expulsão positiva e diafragmas em um tanque esférico de 9,5 polegadas de diâmetro, para aplicações espaciais. Foram usadas no experimento bolsas e diafragmas de borracha butílica, com espessura variando de 0,010 a 0,020 de polegada nos tanques modelados em um bloco de lucite montado em rolamentos livre para oscilar em uma plataforma horizontal. O movimento oscilatório do bloco é fornecido por um motor elétrico que pode impor amplitudes de 0 a 0,100 de polegada e frequências de 0 a 5 Hz. Durante o experimento, o movimento oscilatório pode ser rapidamente interrompido de modo que as forças horizontais residuais resultantes do *sloshing* do líquido possam ser sentidas por um medidor de força montado entre o bloco de lucite e a plataforma. As frequências

variaram de 0 até as frequências naturais dos dois primeiros modos do líquido contido no tanque. Os testes foram configurados com bolsas com espessuras de 0,015 e 0,020 de polegadas e diafragmas com espessuras de 0,010, 0,015 e 0,020 de polegadas. Cada configuração foi testada com amplitudes de 0,050 e 0,100 de polegada. A maior parte dos testes foi feita com uma taxa de profundidade (profundidade do líquido/diâmetro do tanque) de 0,50, a fim de se obter forças de *sloshing* máximas para uma dada amplitude de excitação. Contudo, também foram feitos teste com taxa de profundidade de 0,25. As forças máximas de *sloshing*, usando-se as configurações com bolsa e diafragma, ocorreram na frequência natural do primeiro modo e foram aproximadamente de 50% a 60% menores do que as forças com o líquido sem restrição, ou seja, líquido em tanques sem bolsas e diafragmas. Dentro do intervalo das variáveis examinadas, a eficácia de supressão do *sloshing* das configurações com bolsa e diafragma foi essencialmente similar e pareceu ter sido afetada somente pela espessura da bolsa ou diafragma. Quando a espessura do material foi aumentada, as forças de *sloshing* tenderam a diminuir, e a frequência natural do primeiro modo tendeu a aumentar. O experimento mostrou também que o aumento da espessura da bolsa ou diafragma aumenta a taxa de amortecimento.

Sumner (1963) apresenta os resultados de uma investigação experimental para determinar as frequências modais naturais e as forças de *sloshing* resultantes da oscilação de líquidos em três tanques toroidais orientados horizontalmente conforme ilustrado na Figura 2.1, os três tanques com os raios r (raio da seção transversal) iguais (2,5 polegadas) e os raios R variáveis (3,75, 6,25 e 9,75 polegadas). A amplitude de excitação foi mantida constante, e a variação da frequência de excitação foi feita de modo a envolver as frequências do primeiro e do segundo modo dos líquidos contidos nos tanques dentro de um intervalo de taxas de profundidade do líquido. Os três tanques toroidais foram construídos em um bloco de lucite montado em rolamentos livre para oscilar em uma plataforma horizontal. O movimento senoidal do tanque foi produzido por um mecanismo (*slider-crank*) controlado através de um sistema transmissão de velocidade acionado por um motor elétrico. A amplitude de excitação foi mantida constante em 0,050 de polegada, e a frequência de excitação foi variada de 0 a 5 Hz. Durante o experimento, o movimento oscilatório pode ser rapidamente interrompido de

modo que as forças horizontais residuais resultantes do *sloshing* do líquido pudessem ser sentidas por um medidor de força montado entre o bloco de lucite e a plataforma.

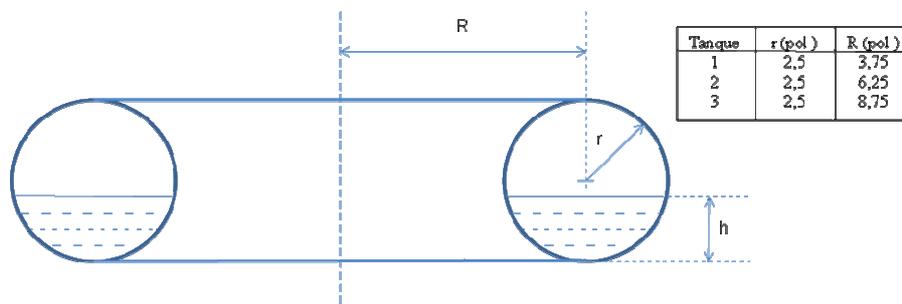


Figura 2.1 Ilustração esquemática de uma onda de *sloshing*

Inicialmente foram usados água e mercúrio como líquidos contidos nos tanques de modo a cobrir uma faixa de densidades e forças de *sloshing* para a dada amplitude de excitação. Estes dois líquidos foram escolhidos por terem uma grande diferença de densidade e valores quase iguais de viscosidade absoluta. O tetrabrometo de acetileno (TBE) também foi usado como conteúdo líquido nos tanques para determinar o máximo das forças do *sloshing* dos primeiro e segundo modos na faixa de taxas de profundidade de líquido. O tanque e o líquido nele contido foram submetidos a um movimento oscilatório com amplitude de 0,050 de polegada e uma frequência pré-selecionada até ser obtida a máxima altura de onda; então o movimento foi rapidamente interrompido, e as forças do *sloshing* residual foram registradas. Os testes iniciais com água, mercúrio e TBE foram feitos para uma taxa de profundidade de líquido de 0,50. Posteriormente os testes foram feitos com TBE cobrindo uma faixa de taxas de profundidade de líquido de 0,1 a 0,95.

Sumner concluiu que:

- a) as frequências naturais dos primeiro e segundo modo diminuem com um decréscimo na taxa de profundidade de 0,5 do líquido e um aumento do raio R do tanque;
- b) as forças de *sloshing* aumentam para os valores de pico quando a frequência de excitação aproximam-se das frequências naturais dos primeiro e segundo modos e então decrescem com aumentos adicionais na frequência;

- c) não há uma tendência consistente das forças de *sloshing* do primeiro modo com o aumento do raio R para uma taxa de profundidade de líquido constante;
- d) as forças máximas de *sloshing* associadas ao primeiro modo aumentam com um aumento do raio r do tanque (dentro da faixa investigada) e ocorre para taxas de profundidade de líquido progressivamente mais altas;
- e) as forças máximas de *sloshing* do segundo modo aumentam e tornam-se significativamente maiores do que aquelas do primeiro modo à medida que o raio R aumentou;
- f) as forças máximas de *sloshing* do segundo modo sempre ocorrem para uma taxa de profundidade de líquido de 0,5 e variam entre 5,4 e 8,7% da altura aparente do líquido contido no tanque (tetrabrometo de acetileno);
- g) as forças de *sloshing* são diretamente proporcionais à densidade do líquido de mesma viscosidade absoluta; e
- h) as taxas de amortecimento associadas às forças dos primeiro e segundo modos são aproximadamente do mesmo valor, são independentes da configuração do tanque, e tendem alcançar o valor mínimo para as taxas de profundidade de líquido onde as forças de *sloshing* alcançam um valor máximo.

Stofan e Sumner (1963) apresentam os resultados de uma investigação experimental para avaliar a eficácia do amortecimento de *sloshing* das bolsas de expulsão positiva (*positive-expulsion bags*) e diafragmas em tanques esféricos de 9,5 a 32 polegadas de diâmetro. Neste experimento são usados tanques esféricos de 20,5 e 32 polegadas de diâmetro, uma vez que o tanque de 9,5 polegadas de diâmetro já fora usado no experimento de Stofan e Pavli (1962) com o mesmo objetivo. Os tanques são montados em uma plataforma de teste livre para oscilar no plano horizontal. Um sistema de pistão hidráulico fornece a força de controle. As amplitudes e frequências podem variar continuamente de 0 a 1 polegada e de 0 a 20 Hz, respectivamente. É usada uma forma de onda senoidal para a excitação. Os circuitos de controle hidráulico e elétrico são projetados para que o movimento oscilatório possa ser instantaneamente interrompido

no ponto de máxima aceleração e velocidade zero. As forças horizontais são sentidas por uma célula de carga horizontal e registradas por um oscilógrafo. É usado como líquido o tetrabrometo de acetileno, com densidade específica de 2,96 para aumentar o potencial de precisão dos dados. Bolsas e diafragmas de borracha butílica, com espessura variando de 0,010 a 0,040 de polegada são instaladas no interior dos tanques esféricos. Para cada bolsa e diafragma, o tanque é submetido a um movimento oscilatório com amplitude e frequência pré-selecionadas, o movimento é então instantaneamente interrompido, e as forças horizontais de *sloshing* residuais são registradas. Os resultados registrados mostram que amplitude varia de 0 a 0,60 de polegada e a frequência varia desde zero passando pelas frequências dos dois primeiros modos do líquido contido no tanque para *sloshing* sem restrição. Todos os testes foram conduzidos com uma taxa de profundidade de líquido de 0,50.

Seguem abaixo alguns dos resultados obtidos:

- a) a força parametrizada, $F_s / \rho g d^3$, onde F_s é a força de sloshing parametrizada, ρ a densidade do líquido, g a aceleração da gravidade e d o diâmetro do tanque, aumenta quando a frequência de oscilação parametrizada, $\alpha / \sqrt{R/g}$, onde α é a frequência, R o raio do tanque e g a aceleração da gravidade, aumenta para um valor de pico próximo ao do primeiro modo para *sloshing* não restrito, obtidos em tanques sem bolsas e diafragmas, e então decresce com o aumento da frequência. Para os valores maiores de amplitude de excitação, existe uma pequena diferença nos valores de pico da força parametrizada entre os tanques de 20,5 e 32 polegadas de diâmetro;
- b) a taxa de amortecimento é essencialmente independente da amplitude de excitação para o tanque de 32 polegadas de diâmetro. A taxa de amortecimento decresce quando o diâmetro do tanque cresce;
- c) quando a espessura do diafragma cresce, a força de *sloshing* parametrizada decresce e as forças de pico ocorrem no maior valor da frequência de oscilação parametrizada. Existe uma pequena diferença na magnitude da força

de *sloshing* parametrizada entre os tanques de 20,5 e 32 polegadas de diâmetro; e

- d) quando a espessura do diafragma aumenta, a taxa de amortecimento aumenta. A frequência de oscilação parametrizada essencialmente não afeta a taxa de amortecimento para o tanque de 20,5 polegadas de diâmetro. Há algum efeito da frequência de oscilação na taxa de amortecimento para o tanque de 32 polegadas de diâmetro.

Alper (1965) apresenta uma análise de um amortecedor passivo pendular projetado para reduzir oscilação cônica (*wobble*) ou precessão livre do eixo de rotação de um corpo assimétrico girante. Observe que não há unanimidade no uso da terminologia para o que a maior parte dos especialistas em dinâmica de atitude chama de nutação. Este fenômeno é frequentemente chamado de precessão, movimento de cone e *wobble motion* que pode ser traduzido para Português como movimento de bambolear. Voltando ao trabalho de Alper, o amortecedor por ele estudado é um pêndulo com uma massa concentrada ao final de uma haste rígida e delgada. Um material viscoelástico provê no ponto de articulação do pêndulo, pivô, duas características, o de uma mola torcional omnidirecional (em todas as direções) e um amortecedor viscoso. O pêndulo está localizado no corpo paralelo à direção desejada do eixo de rotação. A vantagem de um amortecedor viscoelástico como um dissipador de energia sobre outros tipos de amortecedores mecânicos passivos é o fato de que ele não cessa sua função para ângulos pequenos de oscilação em nutação devido ao atrito de Coulomb. Posicionando o pêndulo paralelo à localização desejada do eixo de rotação e incorporando uma mola no seu pivô, é possível sintonizar a frequência do amortecedor à frequência de precessão, melhorando a eficácia do amortecedor. Um pêndulo paralelo ao plano dos eixos transversais do veículo terá uma frequência de ressonância igual ou maior que a taxa de rotação, dependendo da localização do seu pivô. Não é possível sintonizar esta configuração para a frequência de precessão.

Alper considera o problema do movimento esférico do pêndulo, e analisa o caso geral de um corpo girante assimétrico. Em seguida ele apresenta um exemplo numérico para ilustrar a eficiência deste tipo de amortecedor passivo para certas aplicações.

Finalmente conclui que a taxa de amortecimento do ângulo de nutação é exponencial e pode ser simplesmente expressa em termos da metade do ângulo de oscilação inicial do cone, das constantes físicas do satélite e das propriedades do amortecedor.

Silverman e Abramson (1966) apresentam um estudo referente ao comportamento de *sloshing* de líquidos em contêineres rígidos de diversos formatos. Eles começam com uma introdução teórica assumindo algumas simplificações, uma vez que uma solução “exata” para o problema de oscilações de fluídos em contêineres em movimento é extremamente difícil. Tais simplificações são:

- a) tanque rígido;
- b) fluido não viscoso;
- c) fluido incompressível;
- d) pequenos deslocamentos, velocidades, e inclinações da superfície livre do líquido;
- e) campo de fluxo não-rotacional;
- f) fluido homogêneo; e
- g) sem escoamento ou fonte, ou seja, volume do líquido constante.

Na seqüência, Silverman e Abramson apresentam um estudo para tanques retangulares. A partir da escolha apropriada de um sistema de referências ortogonal xyz, eles analisam o efeito de um movimento horizontal ao longo do eixo x, “*pitching*” sobre o eixo y e “*yawing*” sobre o eixo z. Continuam com o estudo de tanques cilíndricos circulares, dando a este caso maior importância devido a sua relação com a maioria dos

veículos lançadores. Apresentam ainda, estudos sobre tanques esféricos, toroidais e esferoidais oblatos.

Dodge e Garza (1967) apresentam análises e comparações experimentais para *sloshing* de líquidos em um tanque cilíndrico rígido sob condições de acelerações axiais moderadamente pequenas. Os resultados analíticos são postos na forma de um modelo mecânico equivalente, mostrando que a massa em *sloshing* e a frequência natural do primeiro modo, para um líquido que tenha um ângulo de contato de zero grau em relação às paredes do tanque, são menores que para as condições de alta gravidade. Os dados experimentais, obtidos para tanques de diversos diâmetros pequenos e três líquidos diferentes, são comparados aos previstos pelo modelo matemático. Na maioria dos casos, foi encontrada uma boa correlação para as forças de *sloshing* e frequências naturais em função do número de Bond. No Apêndice B são apresentados sobre este artigo.

Alfriend (1973) faz uma análise de um amortecedor de nutação em forma de anel parcialmente preenchido com líquido viscoso para satélites estabilizados por rotação. Ele modela o líquido como um bloco rígido, tarugo (*slug*), de comprimento finito movendo-se em um tubo sob o efeito de uma força de atrito viscosa linear. Mostra que há dois modos de movimentos distintos, chamados de modo síncrono com o giro (*spin*) e modo síncrono com a nutação. As constantes de tempo para cada modo são obtidas para satélites simétricos e assimétricos. Analisa também o efeito de um pequeno desvio (*offset*) do eixo do anel em relação ao eixo de rotação (*spin*). O *offset* do eixo do anel aumenta a eficiência do amortecedor de nutação. Os estudos dos trabalhos de Alfriend dentre outros, serviram para nortear os estudos do amortecedor de nutação para o SCD1.

Sayar e Baumgarten (1982) apresentam uma análise linear e não linear dos Amortecedores de *Sloshing*. Neste artigo, os autores consideram uma estrutura vibrando acoplada com um recipiente parcialmente preenchido com fluido em um modo de vibração livre. Para simplificar a análise matemática eles usam um modelo de um pêndulo para reproduzir o movimento do fluido e um amortecedor massa-mola amortecido, representando a vibração da estrutura. As equações do movimento são

obtidas pelo método de Lagrange e expressas na forma paramétrica. Os autores verificam excelente conformidade entre os prognósticos teóricos e as observações experimentais. Concluem finalmente que para uma apropriada seleção de parâmetros de projeto, recipientes parcialmente preenchidos com fluídos viscosos servem como bons amortecedores de vibração.

Hinada e Inatani (1984) apresentam estudo de vários tipos de amortecedores de nutação passivos para satélites estabilizados por rotação e discutem o desempenho de um amortecedor anular parcialmente preenchido com fluido. Os autores representam o fluido dentro do anel por tarugo rígido, obtendo fórmulas simples para as características do amortecedor. Realizam também um estudo experimental sobre o comportamento do fluido movimentando-se em um amortecedor anular, para discutir os efeitos da tensão superficial. Analisam os casos do álcool e mercúrio, utilizados como fluido no amortecedor de nutação.

Fonseca (1986) em seus trabalhos no grupo AMNUT que desenvolveu o amortecedor de nutação para o SCD1, apresenta a partir da formulação lagrangiana as equações do movimento de um Amortecedor de Nutação constituído por um Anel Parcialmente Preenchido com líquido viscoso. Sua abordagem foi assumir que o fluído comporta-se como um tarugo rígido, seguindo Alfriend e Hinada. Uma vez que o fluído ocupa um ângulo relativamente grande do anel, o tarugo foi modelado como um bloco rígido de comprimento finito. As equações do movimento foram obtidas e comparadas com as equações simplificadas de outros trabalhos, utilizadas como ponto de partida no projeto do amortecedor de nutação do SCD-1. Os ângulos de nutação são em geral pequenos a menos que não se tenha controle de seu aumento. O cone formado pelo ângulo de nutação pode ser amortecido por amortecedores de nutação de forma passiva. Diversas técnicas estão disponíveis para prover a dissipação de energia para amortecer a nutação de satélites girantes. Tais técnicas incluem:

- a) recipientes com fluído com ou sem massas móveis;
- b) recipientes com fluído com massas móveis interligadas com mola;

- c) amortecedores de impacto;
- d) amortecedores de histerese magnética; e
- e) amortecedores de corrente circular (eddy) magnética.

Baseados nestas técnicas existem quatro tipos comuns de amortecedores:

- a) amortecedor massa-mola amortecido;
- b) amortecedor pendular;
- c) amortecedor com esferas em tubo; e
- d) amortecedor com fluído em tubo.

As duas primeiras técnicas são baseadas no princípio que o movimento relativo da massa fluida dentro do recipiente, resultando na dissipação de energia por atrito. O amortecedor com fluido em um tubo em forma de anel foi escolhido para os satélites brasileiros SCD-1, SCD-2, SCD-2A, SACI-1 e SACI-2.

Existem na literatura diversos trabalhos sobre amortecedores de nutação em forma de anel, parcialmente preenchido com fluido viscoso.

Fonseca e Souza (1990) tratam da modelagem matemática e da validação experimental do comportamento dinâmico de um amortecedor de nutação do tipo anular viscoso parcialmente cheio de óleo de silicone. A formulação lagrangiana é utilizada para a dedução das equações do movimento. A validação experimental é feita em uma mesa de mancal esférico aerostático (ver Figura 2.2). A comparação entre os resultados teóricos e experimentais validaram o modelo matemático e o programa computacional desenvolvido para as simulações da dinâmica.

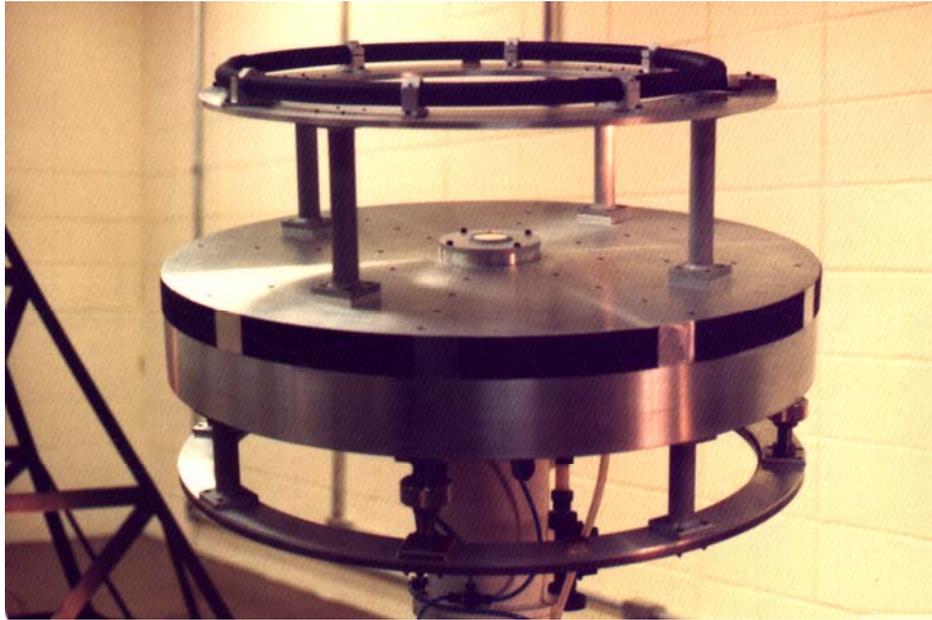


Figura 2.2 Mesa de mancal esférico aerostático

Dodge (2000) apresenta uma atualização do documento de autoria de Dr. Norm Abramson do *SwRI's Department of Mechanical Sciences*, Dr. Douglas Michel da NASA-OAST, Dr. George Brooks da NASA-Langley, e Dr. Helmut Bauer da Georgia Tech, publicado em 1966 como NASA SP-106 “*The Dynamic Behavior of Liquids in Moving Containers*”. Este documento tornou-se através dos anos uma referência no estudo do comportamento dos líquidos e ainda hoje em dia existe uma grande demanda de cópias deste trabalho.

Dodge concluiu ser necessária uma revisão no documento NASA SP-106 tendo em vista que: (a) nem sempre, neste documento, as informações são apresentadas de uma forma de fácil entendimento; (b) muitos dos resultados numéricos são apresentados como gráficos e tabelas decorrentes de métodos analíticos aproximados devido aos poucos recursos computacionais dos anos 60; (c) hoje estes resultados estão disponíveis de um modo mais preciso; e (d) o contínuo avanço no estudo do *sloshing* e da tecnologia associada, sobre tudo no que se refere à mecânica e gerenciamento dos fluídos sob baixa gravidade.

Nem todos os assuntos abordados no documento SP-106 foram incluídos na revisão de Dodge, alguns por terem sido tratados marginalmente, outros por serem muito especializados ou por não parecerem tão importantes hoje como foram em 1966. Esta revisão foca principalmente os seguintes capítulos do documento SP-106: Capítulo 2 – *Sloshing* Lateral em Contêineres em Movimento, Capítulo 3 – Efeitos Não-lineares em *Sloshing* Lateral, Capítulo 4 – Amortecimento Dos Movimentos do Líquido e do *Sloshing* Lateral, Capítulo 6 – Representação Analítica do *Sloshing* Lateral por Modelos Matemáticos Equivalentes, Capítulo 7 – Estabilidade e Controle do Veículo (mas extremamente condensado) e Capítulo 11 – Comportamento do Propelente Líquido para Baixo e G Zero (incrementado com grande quantidade de novas matérias sobre dispositivos de gerenciamento de *sloshing* e propelentes). Além disso, um novo capítulo foi incluído, Movimentos do Líquido em Tanques Girantes, devido à importância deste assunto na estabilidade de uma espaçonave. Todos os capítulos na revisão feita por Dodge são extensos e contêm uma abordagem matemática bastante complexa. Os assuntos de interesse retirados desta publicação estão detalhados no Apêndice A.

Ibrahim (2005) no capítulo 12 de seu livro discute a dinâmica do *sloshing* em microgravidade. Ele apresenta importantes tópicos referentes à física dos fluidos em microgravidade como: a mecânica de uma superfície livre do líquido sob microgravidade; a estabilidade estática e dinâmica da superfície livre do líquido; linha de contato; e ângulos de contata entre outros. Estes tópicos estão detalhados no Apêndice B.

3 CONCEITOS SOBRE O COMPORTAMENTO DOS LÍQUIDOS

Este capítulo apresenta alguns conceitos sobre o *sloshing* em contêineres em movimento em ambiente com gravidade e microgravidade, bem como, considerações sobre seus modelos mecânico equivalentes.

3.1. *Sloshing* em ambiente com gravidade

O *sloshing* é caracterizado por uma onda estacionária formada na superfície do líquido quando um tanque parcialmente cheio oscila como mostrado na Figura 3.1. O movimento da onda tem uma frequência natural que depende da forma do tanque e da aceleração da gravidade ou da aceleração axial do tanque.

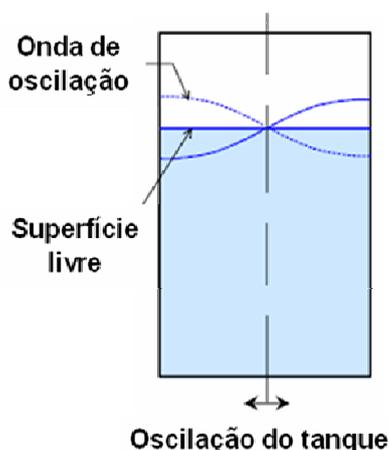


Figura 3.1 Ilustração esquemática de uma onda de *sloshing*

Fonte: Adaptada de Dodge (2000).

O principal efeito dinâmico do *sloshing* em um tanque é a oscilação do centro de massa do líquido que pode ser representado por um modelo mecânico equivalente. Dodge (2000) apresenta dois modelos ilustrados na Figura 3.2. Em um dos modelos a oscilação do centro de massa do líquido é representada por um pêndulo, e no outro, por um sistema massa-mola. Ambos os modelos fornecem as mesmas forças e torques. A vantagem do modelo pendular sobre o modelo massa-mola é que no modelo pendular a frequência natural, $(g/L)^{0,5}$, varia com a aceleração g exatamente como a frequência de *sloshing* do líquido, enquanto que, no modelo massa-mola a constante k da mola tem que ser alterada quando há uma mudança em g . A massa-mola é colocada na mesma altura da massa do pêndulo, a massa é fixada na parede do tanque através de uma mola

com uma constante elástica $k=mg/L$ que fornece a mesma frequência natural do pêndulo.

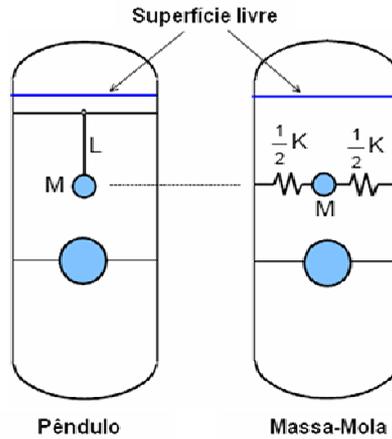


Figura 3.2 Modelos mecânicos equivalentes do *sloshing*

Fonte: Adaptada de Dodge (2000).

Na Figura 3.1 pode-se observar que a onda de *slosh* tem um pico e um vale. Neste caso a onda é chamada de onda fundamental e tem a frequência natural mais baixa, esta frequência é também chamada de modo 1 ou modo fundamental. Podem ocorrer ainda ondas com dois ou mais picos ou vales o que indica frequências naturais maiores, também chamadas de modos de ordem superior. Estas ondas de maior ordem podem ser representadas na Figura 3.2 pela incorporação de um pêndulo ou massa-mola adicional correspondente a cada modo que se quer considerar. Geralmente, os modos de ordem superior são de pouco interesse uma vez que a magnitude do pêndulo ou massa-mola para esses modos são muito menores comparados ao modo fundamental. Há de se levar em conta que, para tanques sem simetria radial, há um modo fundamental para cada um dos eixos principais e pode ser necessário considerar um pêndulo ou massa-mola para cada um dos modos, principalmente se seus valores forem comparáveis.

Dodge (2000) apresenta uma abordagem matemática para o sloshing, em um tanque rígido contendo um líquido ideal sem viscosidade. Nesta abordagem, que é detalhada no Apêndice A, é adotado o sistema de coordenadas x, y, z fixo ao tanque, e o sistema de coordenadas inercial X, Y, Z como mostrado na Fig. 3.3. Considerando o tanque sem

excitação (estacionário), chega-se á seguinte expressão que é uma solução para as frequências naturais ω (DODGE, 2000):

$$\omega_n^2 = \pi(2n-1)\left(\frac{g}{a}\right) \tanh\left[\pi(2n-1)\left(\frac{h}{a}\right)\right] \quad (3.1)$$

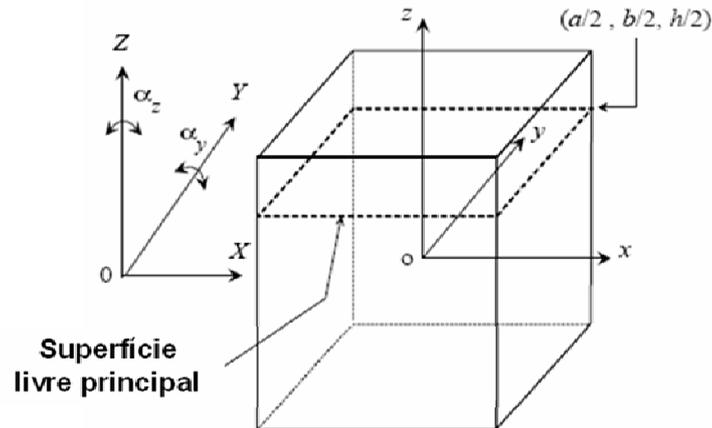


Figura 3.3 Sistema de coordenadas para a obtenção das equações do *slosh*

Fonte: Adaptada de Dodge (2000).

onde o índice n indica que ω depende do número do modo n . A frequência diminui a medida que a profundidade h diminui ou a largura a do tanque aumenta. O modo $n=1$ tem a mais baixa de todas as frequências naturais.

A Figura 3.4 mostra o esboço dos três primeiros modos e o deslocamento relativo do centro de massa do líquido para cada modo para esta solução. O deslocamento do c.m. para o modo fundamental $n=1$ é substancialmente maior que os outros modos para a mesma amplitude máxima da onda. Uma vez que a oscilação do c.m. é a fonte das forças e torques induzidos pelo *slosh*, a onda para $n=1$ produz muito mais força e torque do que qualquer outro modo.

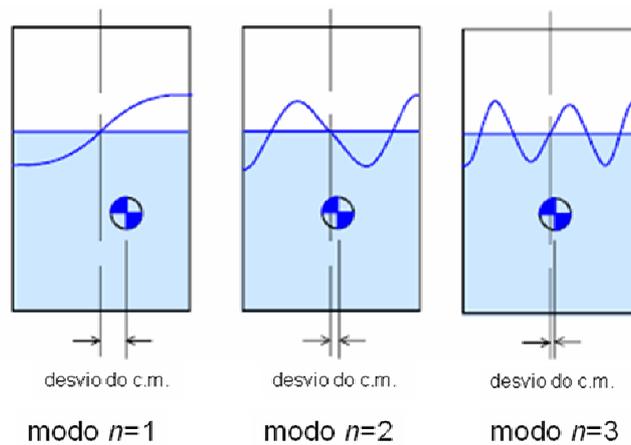


Figura 3.4 Forma de onda do *Slosh* para os três primeiros modos assimétricos em x de um tanque retangular.

Fonte: Adaptada de Dodge (2000).

Uma segunda solução possível que corresponde aos modos de *slosh* simétricos e cujas freqüências naturais são mais elevadas é dada pela relação (DODGE, 2000):

$$\omega_m^2 = 2m\pi \left(\frac{g}{a} \right) \tanh \left[2\pi m \left(\frac{h}{a} \right) \right] \quad (3.2)$$

A Figura 3.5 mostra as primeiras formas de onda simétricas que, como se pode observar, não provocam deslocamento de c.m. do líquido para qualquer um destes modos, não produzindo assim forças ou torques laterais.

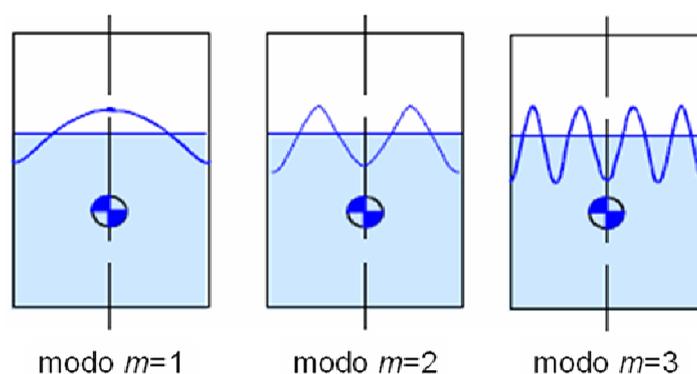


Figura 3.5 Formas de onda de *Slosh* para os três primeiros modos simétricos em x para um tanque retangular.

Fonte: Adaptada de Dodge (2000).

3.2. *Sloshing* em ambiente com microgravidade

O efeito do potencial gravitacional regular sobre a massa de um líquido é de estabilização, levando seu volume para o fundo do seu contêiner. Quando a força sobre o líquido diminui, seu volume assume qualquer posição dentro de seu contêiner de uma maneira imprevisível. Assim os problemas da dinâmica do *sloshing* do líquido sob microgravidade são diferentes daqueles encontrados sob um campo gravitacional regular. Sob microgravidade as forças de tensão superficial começam predominar em detrimento da força gravitacional. A razão entre a força gravitacional e a força de capilaridade é chamada de número de Bond e é dado pela expressão (IBRAHIM, 2005):

$$N_{Bo} = \frac{\rho g R^2}{\sigma} \quad (3.3)$$

onde, σ é tensão superficial, ρ a densidade do líquido, g a aceleração da gravidade e R o raio da superfície livre.

Para valores de $N_{Bo} \gg 1$, a força gravitacional predomina, e para $N_{Bo} \ll 1$, a força de tensão superficial predomina e a superfície livre do fluido sobe nas paredes do contêiner.

O estudo do comportamento do líquido em microgravidade envolve a mecânica e a termodinâmica dos sistemas capilares. No Apêndice B é apresentada uma abordagem teórica para a dinâmica de *sloshing* em microgravidade baseada em Ibrahim (2005) que inclui a mecânica de uma superfície líquida livre sob microgravidade; a estabilidade da estática e dinâmica da superfície líquida livre; a linha de contato, e ângulo de contato.

3.3. Modelo Mecânico para *Sloshing* em ambiente com gravidade

A conveniência de trocar o líquido por um modelo mecânico equivalente é devida ao fato de que as equações de movimento de massas pontuais oscilatórias e de corpos rígidos serem incluídas mais facilmente na análise do que as equações dinâmicas do fluido.

O líquido que ocupa completamente um contêiner fechado pode ser substituído dinamicamente por um corpo rígido equivalente, porém, se a superfície do líquido é livre para mover-se, o *sloshing* resultante tem uma ou mais frequências naturais, impedindo que o modelo mecânico equivalente seja um corpo rígido. O modelo mecânico pra o *sloshing* deve conter massas livre para oscilar.

O modelo apresentado por Dodge (2000) é mostrado na Figura 3.6 e a dedução das equações do modelo bem como a dedução analítica de seus parâmetros são apresentadas no Apêndice A.

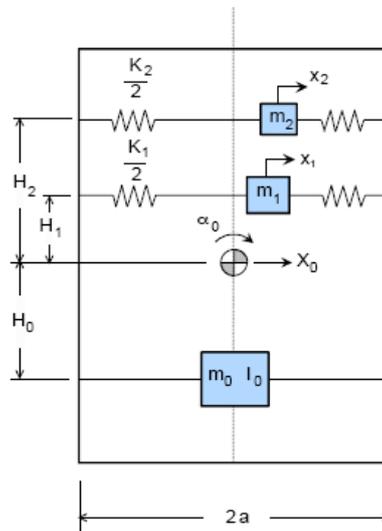


Figura 3.6 Esquemático do modelo mecânico equivalente para *sloshing*
 Fonte: Adaptada de Dodge (2000).

A primeira relação para se determinar k e m é dada por (DODGE, 2000):

$$k_n / m_n = \omega_n^2 \quad (3.4)$$

onde ω_n é a frequência natural de *slosh* do modo n .

O cálculo de m_n é dado por (DODGE, 2000):

$$m_n = m_{liq} \left\{ 8 \frac{a \tanh[(2n-1)\pi h / a]}{h (2n-1)^3 \pi^3} \right\} \quad (3.5)$$

As frequências naturais do *slosh* são dadas pela solução da equação 3.1, reproduzida a seguir (DODGE, 2000):

$$\omega_n^2 = \pi(2n-1) \left(\frac{g}{a} \right) \tanh \left[\pi(2n-1) \left(\frac{h}{a} \right) \right]$$

E, conseqüentemente, as constantes elásticas do modelo devem ser escolhidas como (DODGE, 2000):

$$k_n = m_{liq} \left\{ 8 \frac{g \tanh[(2n-1)\pi h / A]}{h (2n-1)^2 \pi^2} \right\} \quad (3.6)$$

3.4. Modelo Mecânico *Sloshing* em ambiente com microgravidade

Dodge e Garza (1967) propõem um modelo para um tanque cilíndrico de raio R em microgravidade ($10 < N_{Bo} < 100$) que é mostrado na Figura 3.7. Neste modelo, que é similar ao modelo para alta gravidade, deve ser incluído um oscilador massa-mola para cada um dos modos do *slosh*. Os parâmetros do modelo (m_0, m_n, h_0, h_n, k_n) são calculados para igualarem-se às forças e momentos reais com as forças e momentos causados pelo modelo para uma mesma excitação. Estes cálculos estão detalhados no Apêndice B.

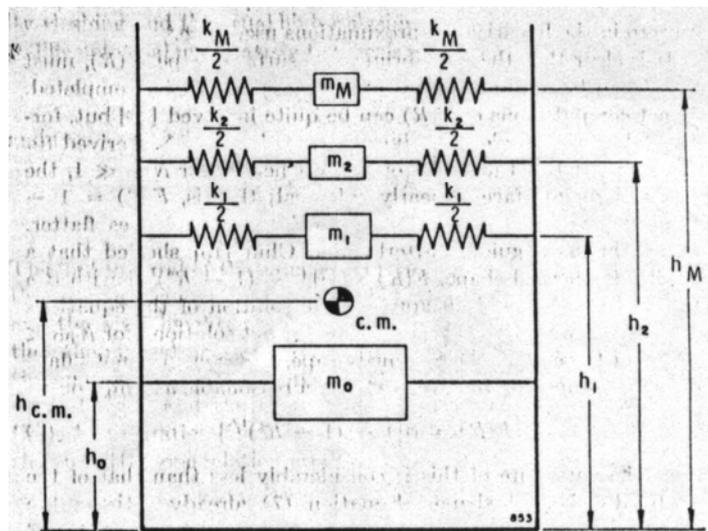


Figura 3.7 Esquemático do modelo mecânico equivalente
 Fonte: Adaptada de Dodge e Garza (1967).

A Figura 3.8 mostra a massa do *sloshing* fundamento m_1 e a constante elástica fundamental k_1 , em função do número de Bond (DODGE; GARZA, 1967). Em todos os casos, a quantidade de líquido que participa no movimento de *sloshing* é menor que para $N_{Bo} = \infty$. De fato, para $N_{Bo} = 10$, a massa de *sloshing* é cerca de 10% menor do que para o caso de gravidade alta. Para o segundo modo e os modos mais altos, quantidade de líquido que participa no movimento de *sloshing* é muito pequena.

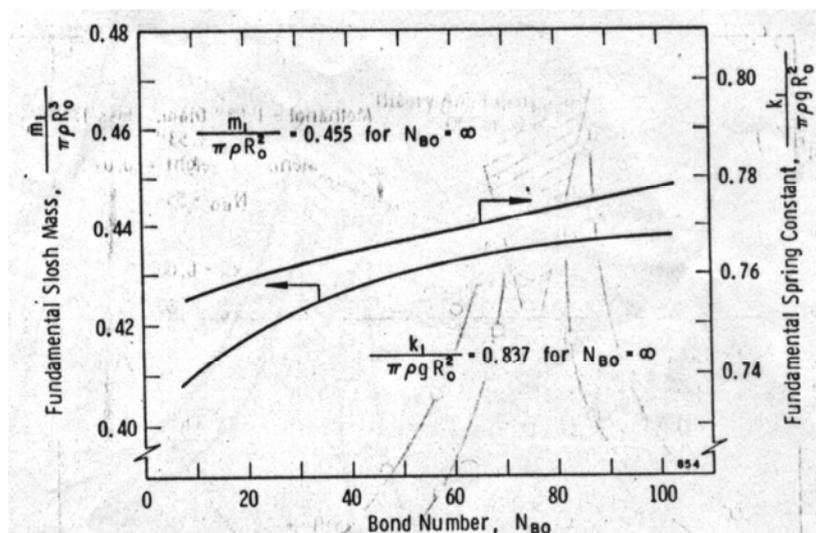


Figura 3.8 Massa e constante elástica do *slosh* fundamental

Fonte: Adaptada de Dodge e Garza (1967).

4 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Este Capítulo apresenta a formulação e a simulação do problema proposto neste trabalho bem como a análise dos resultados.

O modelo físico do satélite é mostrado na Figura 4.1 bem como os sistemas de referencias utilizados para escrever as equações da dinâmica do satélite. O modelo físico inclui um recipiente cilíndrico parcialmente preenchido com líquido conforme mostrado na Fig. 4.1.

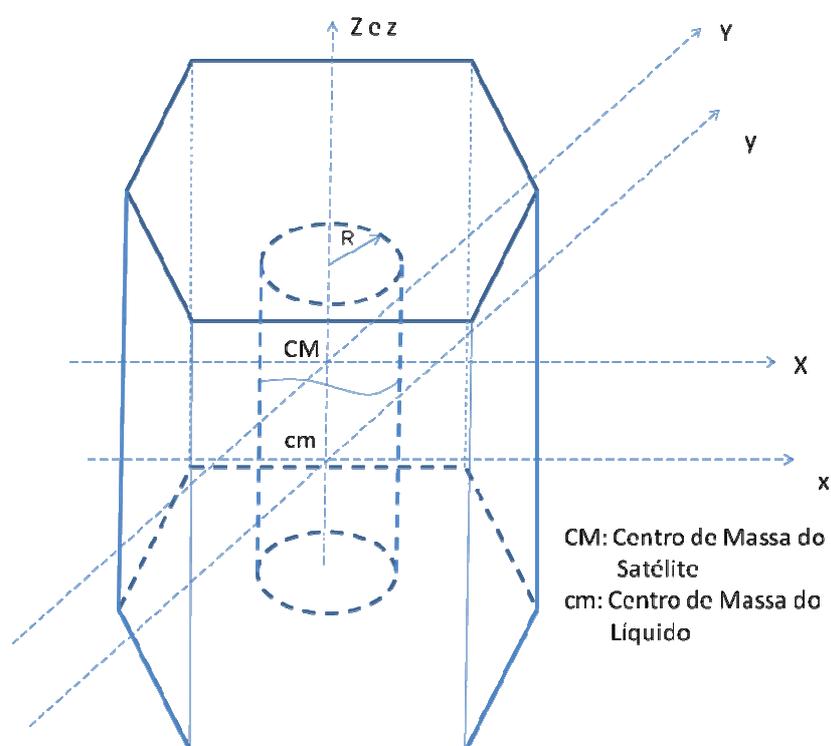


Figura 4.1 Modelo Físico do Satélite

Para o cilindro contendo líquido utiliza-se o modelo proposto por Dodge e Garza (1967), onde o líquido é modelado por um conjunto de massa-mola associado a cada modo de oscilação de *sloshing*, esquematicamente representado pela Fig. 3.7.

4.1. Modelo Matemático

Neste trabalho, dada a complexidade das equações do movimento, apenas o primeiro modo de vibração é considerado na modelagem matemática. A Figura 4.2 ilustra o

modelo mecânico equivalente para o modo 1, do tanque de líquido embarcado no satélite. Na Figura estão indicados o centro de massa do satélite, C.M. e o centro de massa do líquido, c.m..

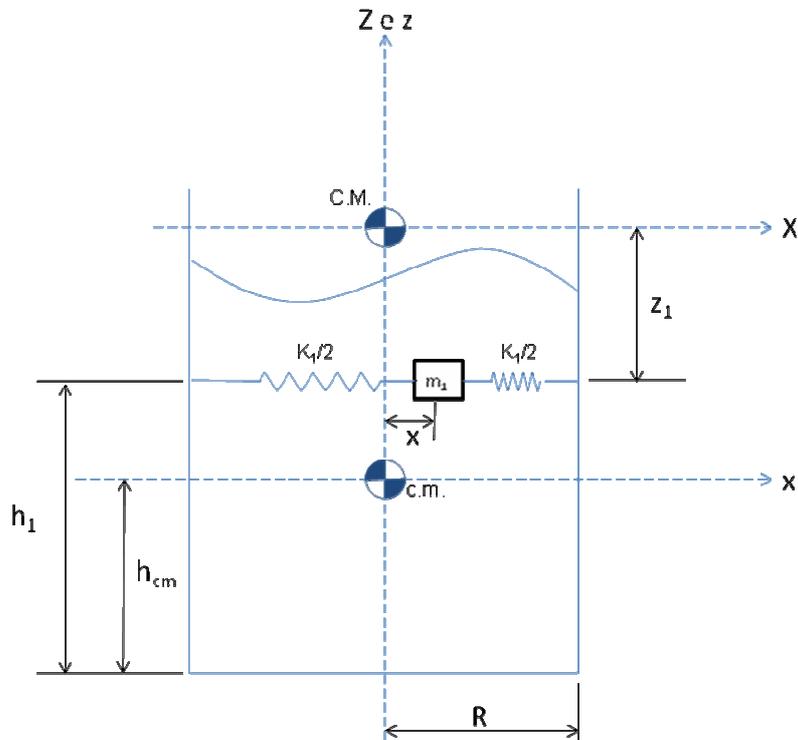


Figura 4.2 Modelo mecânico equivalente para o modo 1

Dodge e Garza (1967) apresentam um gráfico na Fig. 3.8 de onde se pode calcular a massa do *sloshing* fundamental m_1 e a constante elástica fundamental k_1 , para um dado valor do número de Bond.

4.2. Equações do movimento

As equações do movimento do satélite são obtidas através a formulação lagrangiana para quase-coordenadas e para coordenadas generalizadas (MEIROVITCH, 1970). A formulação lagrangiana para quase-coordenadas permite a obtenção das Equações Modificadas de Euler, contendo os termos de acoplamento do sistema mecânico equivalente. A formulação lagrangiana para coordenadas generalizadas é utilizada para a modelagem matemática do sistema mecânico equivalente. A abordagem lagrangiana

parte da definição da posição de uma massa elementar no corpo ou da posição de uma massa concentrada. A partir da posição é escrita a expressão da velocidade e da energia cinética associada a cada parte do sistema. A energia potencial também é determinada e com as energias cinética e potencial define-se a função lagrangiana L . Uma vez obtida a função lagrangiana pode-se utilizar a fórmula de Lagrange para coordenadas generalizadas:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i$$

onde L é a função lagrangiana, q_i representa cada uma das coordenadas generalizadas do problema e Q_i as forças externas associadas a cada uma dessas coordenadas. A equação de Lagrange para quase-coordenadas pode ser escrita na forma que se segue quando a energia potencial independe do tempo. Quando nenhum potencial é considerado L se resume na Energia Cinética T .

$$\left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \omega} \right) \right\} + [\tilde{\omega}] \left\{ \frac{\partial L}{\partial \omega} \right\} = \{N\}$$

onde ω representa o vetor velocidade angular e N é o vetor torque externo associado ao problema.

O lagrangiano é dado por $L = T - V$, onde T é a Energia Cinética do sistema e V a Energia Potencial.

A Fig. 4.5 mostra uma ilustração tri-dimensional do modelo massa-mola do primeiro modo (modo fundamental) do *sloshing* do líquido.

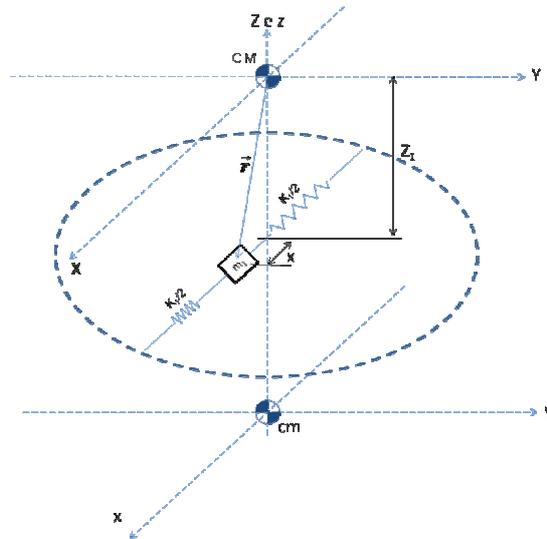


Figura 4.3 Ilustração tri-dimensional

A Energia Cinética do líquido, aproximado por um sistema massa-mola equivalente pode ser obtida a partir do vetor posição da massa m em relação ao CM do satélite, dado por:

$$\vec{r} = x\hat{i} - Z_1\hat{j} \quad (4.1)$$

e que:

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} + \vec{\omega} \times \vec{r} = (\dot{x} - Z_1\omega_y)\hat{i} + (x\omega_z + Z_1\omega_x)\hat{j} - x\omega_y\hat{k} \quad (4.2)$$

Da Equação 4.2 obtêm-se que:

$$v^2 = \vec{v} \cdot \vec{v} = (\dot{x} - Z_1\omega_y)^2 + (x\omega_z + Z_1\omega_x)^2 + x^2\omega_y^2 \quad (4.3)$$

que pode ser escrita como:

$$v^2 = \dot{x}^2 + x^2(\omega_y^2 + \omega_z^2) + Z_1^2(\omega_x^2 + \omega_y^2) - 2\dot{x}Z_1\omega_y + 2xZ_1\omega_x\omega_z \quad (4.4)$$

A energia cinética do líquido é dada por:

$$T_L = \frac{m_1 v^2}{2} = \frac{m_1}{2} \left[\dot{x}^2 + x^2(\omega_y^2 + \omega_z^2) + Z_1^2(\omega_x^2 + \omega_y^2) - 2\dot{x}Z_1\omega_y + 2xZ_1\omega_x\omega_z \right] \quad (4.5)$$

Também da Fig. 4.5 pode-se escrever que a Energia Potencial da mola é dada por:

$$V_L = \frac{1}{2} \left(\frac{k_1}{2} x^2 + \frac{k_1}{2} x^2 \right) = \frac{k_1 x^2}{2} \quad (4.6)$$

A energia cinética do satélite é dada por:

$$T_s = \frac{1}{2}(A\omega_x^2 + B\omega_y^2 + C\omega_z^2) \quad (4.7)$$

onde, A, B e C são os momentos principais de inércia do satélite.

Assim, a energia cinética total pode ser escrita como:

$$T = \frac{1}{2}(A\omega_x^2 + B\omega_y^2 + C\omega_z^2) + \frac{m_1}{2}[\dot{x}^2 + x^2(\omega_y^2 + \omega_z^2) + Z_1^2(\omega_x^2 + \omega_y^2) - 2\dot{x}Z_1\omega_y + 2xZ_1\omega_x\omega_z] \quad (4.8)$$

e a energia potencial total como:

$$V = V_s + V_L = 0 + \frac{k_1 x^2}{2} = \frac{k_1 x^2}{2} \quad (4.9)$$

Considerando a equação de Lagrange para quase-coordenadas dada por:

$$\left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \omega} \right) \right\} + [\tilde{\omega}] \left\{ \frac{\partial L}{\partial \omega} \right\} = \{N\} \quad (4.10)$$

onde:

$$\left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \omega} \right) \right\} = \begin{Bmatrix} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \omega_x} \right) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \omega_y} \right) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \omega_z} \right) \end{Bmatrix}; [\tilde{\omega}] = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}; \left\{ \frac{\partial L}{\partial \omega} \right\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial L}{\partial \omega_x} \\ \frac{\partial L}{\partial \omega_y} \\ \frac{\partial L}{\partial \omega_z} \end{Bmatrix} \text{ e } \{N\} = \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_z \end{Bmatrix}$$

e a equação de Lagrange para a coordenada generalizada x

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = Q_x \quad (4.11)$$

onde:

$$L = T - V = \frac{1}{2}(A\omega_x^2 + B\omega_y^2 + C\omega_z^2) + \frac{m_1}{2}[\dot{x}^2 + x^2(\omega_y^2 + \omega_z^2) + Z_1^2(\omega_x^2 + \omega_y^2) - 2\dot{x}Z_1\omega_y + 2xZ_1\omega_x\omega_z] - \frac{k_1 x^2}{2}$$

Assim, pode-se escrever que:

$$\frac{\partial L}{\partial \omega_x} = \frac{1}{2}(2A\omega_x) + \frac{m_1}{2}[2Z_1^2\omega_x + 2xZ_1\omega_z] = A\omega_x + m_1Z_1^2\omega_x + m_1Z_1x\omega_z$$

$$\frac{\partial L}{\partial \omega_x} = E\omega_x - D\dot{x}\omega_z \quad (4.12)$$

onde, $D = -m_1 Z_1$ e $E = A + m_1 Z_1^2$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \omega_x} \right) = E\dot{\omega}_x - D(\dot{x}\omega_z + x\dot{\omega}_z) \quad (4.13)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \omega_y} = \frac{1}{2}(2B\omega_y) + \frac{m_1}{2} [2x^2\omega_y + 2Z_1^2\omega_y + 2\dot{x}Z_1] = B\omega_y + m_1(x^2\omega_y + Z_1^2\omega_y - \dot{x}Z_1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \omega_y} = B\omega_y + m_1 x^2 \omega_y + m_1 Z_1^2 \omega_y + m_1 Z_1 \dot{x}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \omega_y} = F\omega_y + m_1 x^2 \omega_y + D\dot{x} \quad (4.14)$$

onde, $F = B + m_1 Z_1^2$ e

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \omega_y} \right) = F\dot{\omega}_y + m_1 x^2 \dot{\omega}_y + 2m_1 x \dot{x} \omega_y + D\ddot{x} \quad (4.15)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \omega_z} = \frac{1}{2}(2C\omega_z) + \frac{m_1}{2} [2x^2\omega_z - 2xZ_1\omega_x] = C\omega_z + m_1(x^2\omega_z - xZ_1\omega_x) = C\omega_z + m_1 x^2 \omega_z + m_1 Z_1 x \omega_x$$

$$\frac{\partial L}{\partial \omega_z} = C\omega_z + m_1 x^2 \omega_z - D\dot{x}\omega_x \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \omega_z} \right) &= C\dot{\omega}_z + 2m_1 x \dot{x} \omega_z + m_1 x^2 \dot{\omega}_z - D\dot{x}\dot{\omega}_x - D\dot{x}\dot{\omega}_x \\ &= C\dot{\omega}_z + m_1 x^2 \dot{\omega}_z + 2m_1 x \dot{x} \omega_z - D(\dot{x}\omega_x + x\dot{\omega}_x) \end{aligned} \quad (4.17)$$

Fazendo:

$$[\tilde{\omega}] \left\{ \frac{\partial L}{\partial \omega} \right\} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial \omega_x} \\ \frac{\partial L}{\partial \omega_y} \\ \frac{\partial L}{\partial \omega_z} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} X \\ Y \\ Z \end{array} \right\} \quad (4.18)$$

e substituindo as equações 4.12, 4.14 e 4.16 em 4.18 tem-se:

$$X = G\omega_y\omega_z - D(\dot{x}\omega_z + x\dot{\omega}_x\omega_y) \quad (4.19)$$

onde $G = C - F$,

$$Y = H\omega_x\omega_z - m_1x^2\omega_x\omega_z + D(x\omega_x^2 - x\omega_z^2) \quad (4.20)$$

onde $H = E - C$,

$$Z = J\omega_x\omega_y + m_1x^2\omega_x\omega_y + Dx\omega_y\omega_z + D\dot{x}\omega_x \quad (4.21)$$

onde $J = F - E$,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = m_1\ddot{x} - m_1Z_1\dot{\omega}_y - m_1x(\omega_y^2 + \omega_z^2) + m_1Z_1\omega_x\omega_z + k_1x \quad (4.22)$$

e finalmente, considerando $Q_x = 0$, pode-se escrever

$$\ddot{x} - Z_1\dot{\omega}_y - x(\omega_y^2 + \omega_z^2) + Z_1\omega_x\omega_z + Kx = 0 \quad (4.23)$$

onde $K = k_1/m_1$.

Somando-se as equações 4.13 com 4.19, 4.15 com 4.20 e 4.17 com 4.21, e, considerando que não há torques externos, $N_x=N_y=N_z=0$, pode-se escrever que:

$$\begin{aligned} E\dot{\omega}_x - D(2\dot{x}\omega_z + x\dot{\omega}_z + x\omega_x\omega_y) + G\omega_y\omega_z &= 0 \\ (F + m_1x^2)\dot{\omega}_y + 2m_1x\dot{x}\omega_y + (H - m_1x^2)\omega_x\omega_z + D(\ddot{x} + x\omega_x^2 - x\omega_z^2) &= 0 \\ (C + m_1x^2)\dot{\omega}_z + 2m_1x\dot{x}\omega_z - Dx\dot{\omega}_x + (J + m_1x^2)\omega_x\omega_y + Dx\omega_y\omega_z &= 0 \\ \ddot{x} + Z_1\dot{\omega}_y - x(\omega_y^2 + \omega_z^2) + Z_1\omega_x\omega_z + Kx &= 0 \end{aligned} \quad (4.24)$$

Fazendo $x = x_1$, $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = \ddot{x}$, $x_3 = \omega_x$, $x_4 = \omega_y$ e $x_5 = \omega_z$ tem-se:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -Z_1\dot{x}_4 + x_1(x_4^2 + x_5^2) - Z_1x_3x_5 - Kx_1 \\ \dot{x}_3 &= \frac{D(2x_2x_5 + x_1\dot{x}_5 + x_1x_3x_4) - Gx_4x_5}{E} \\ \dot{x}_4 &= \frac{-2m_1x_1x_2x_4 - (H - m_1x_1^2)x_3x_5 - D(\dot{x}_2 + x_1x_3^2 - x_1x_5^2)}{F + m_1x_1^2} \\ \dot{x}_5 &= \frac{-2m_1x_1x_2x_5 + Dx_1\dot{x}_3 - (J + m_1x_1^2)x_3x_4 + Dx_1x_4x_5}{C + m_1x_1^2} \end{aligned} \quad (4.25)$$

Substituindo \dot{x}_2 em \dot{x}_4 , \dot{x}_3 em \dot{x}_5 , \dot{x}_4 em \dot{x}_2 e \dot{x}_5 em \dot{x}_3 e após alguma manipulação algébrica tem-se:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= \frac{2Dx_1x_2x_4 + Z_1(S - 2x_1^2)x_3x_5 + (B + m_1x_1^2)x_1x_5^2 + DZ_1x_1x_3^2 + (F + m_1x_1^2)(x_1x_4^2 - Kx_1)}{B + m_1x_1^2} \\
\dot{x}_3 &= \frac{2CDx_2x_5 + Nx_1x_3x_4 + (Ox_1^2 - CG)x_4x_5}{EC + Mx_1^2} \\
\dot{x}_4 &= \frac{[DK - 2m_1x_2x_4 - D(x_3^2 + x_4^2)]x_1 + (C - A + m_1x_1^2)x_3x_5}{B + m_1x_1^2} \\
\dot{x}_5 &= \frac{-2Mx_1x_2x_5 + (Px_1^2 - EJ)x_3x_4 + Qx_1x_4x_5}{EC + Mx_1^2}
\end{aligned} \tag{4.26}$$

onde $M = Am_1$, $N = D(C - J)$, $O = D^2 - Gm_1$, $P = D^2 - Em_1$, $Q = D(E - G)$ e $S = H - F$.

4.3. Dinâmica de Atitude

Conforme Fonseca, Lourenção e Oliveira (1985), a dinâmica é descrita pelas equações de Euler e a atitude expressa em *quaternion*, tendo em vista as vantagens inerentes a estes, os quais são mais compactos do que a matriz dos cossenos diretores, uma vez que o *quaternion* se compõe de quatro parâmetros que se contrapõem aos nove cossenos diretores. Além disto, o emprego de *quaternion* não envolve funções trigonométricas, as quais consomem muito tempo computacional.

Definem-se dois sistemas de referência, um no espaço inercial, $OX_0Y_0Z_0$, fixado no centro da Terra, e outro fixado no centro de massa do satélite, $OXYZ$, coincidente com seus eixos principais de inércia. Ambos os sistemas se relacionam através da matriz de rotação L , obtida por meio de três rotações sucessivas de θ_3 , θ_2 e θ_1 nos eixos Z , Y e X , respectivamente. Tal matriz é dada por:

$$L = \begin{bmatrix} c\theta_2c\theta_3 & s\theta_3c\theta_2 & -s\theta_2 \\ c\theta_3s\theta_2s\theta_1 - s\theta_3c\theta_1 & s\theta_3s\theta_2s\theta_1 + c\theta_3c\theta_1 & c\theta_2s\theta_1 \\ c\theta_3s\theta_2c\theta_1 + s\theta_3s\theta_1 & s\theta_3s\theta_2c\theta_1 - c\theta_3s\theta_1 & c\theta_2c\theta_1 \end{bmatrix} \tag{4.27}$$

onde $c\theta_i = \cos(\theta_i)$, $s\theta_i = \sin(\theta_i)$, $i = 1, 2, 3$.

Em termos de parâmetros de Euler esta matriz é:

$$L = 2 \begin{bmatrix} q_1^2 + q_4^2 - 1/2 & q_1q_2 + q_3q_4 & q_1q_3 - q_2q_4 \\ q_1q_2 - q_3q_4 & q_2^2 + q_4^2 - 1/2 & q_2q_3 + q_1q_4 \\ q_1q_3 + q_2q_4 & q_2q_3 - q_1q_4 & q_3^2 + q_4^2 - 1/2 \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

que permite obter as relações que fornecem os ângulos de Euler em função do *quaternion*:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \text{tg}^{-1} \left[\frac{q_1q_4 + q_4q_3}{q_3^2 + q_4^2 - 1/2} \right], \\ \theta_2 &= -\text{sen}^{-1} [2(q_1q_3 - q_4q_2)], \\ \theta_3 &= \text{tg}^{-1} \left[\frac{q_1q_2 + q_4q_3}{q_1^2 + q_4^2 - 1/2} \right]. \end{aligned} \quad (4.29)$$

As condições iniciais em *quaternion*, a partir de condições iniciais dadas em ângulo de Euler, são dadas por:

$$\begin{aligned} q_{1_0} &= c \frac{\theta_3}{2} c \frac{\theta_2}{2} s \frac{\theta_1}{2} - s \frac{\theta_3}{2} s \frac{\theta_2}{2} c \frac{\theta_1}{2}, \\ q_{2_0} &= c \frac{\theta_3}{2} s \frac{\theta_2}{2} c \frac{\theta_1}{2} + s \frac{\theta_3}{2} c \frac{\theta_2}{2} s \frac{\theta_1}{2}, \\ q_{3_0} &= s \frac{\theta_3}{2} c \frac{\theta_2}{2} c \frac{\theta_1}{2} - c \frac{\theta_3}{2} s \frac{\theta_2}{2} s \frac{\theta_1}{2}, \\ q_{4_0} &= c \frac{\theta_3}{2} c \frac{\theta_2}{2} c \frac{\theta_1}{2} + s \frac{\theta_3}{2} s \frac{\theta_2}{2} s \frac{\theta_1}{2}. \end{aligned} \quad (4.30)$$

A derivada temporal do *quaternion* $d\{q\}/dt$ em função da velocidade angular $\Delta\omega_\alpha$ ($\alpha = x, y, z$) é dada por (Fonseca, Lourenção e Oliveira 1985):

$$\begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \Delta\omega_z & -\Delta\omega_y & \Delta\omega_x \\ -\Delta\omega_z & 0 & \Delta\omega_x & \Delta\omega_y \\ \Delta\omega_y & -\Delta\omega_x & 0 & \Delta\omega_z \\ -\Delta\omega_x & -\Delta\omega_y & -\Delta\omega_z & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} \quad (4.31)$$

de onde se obtém o seguinte sistema de equações diferenciais:

$$(4.32)$$

onde Ω é a velocidade angular orbital.

Fazendo $x_6 = q_1$, $x_7 = q_2$, $x_8 = q_3$ e $x_9 = q_4$ tem-se:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_6 &= \frac{1}{2} \{ [x_3 - 2\Omega(x_6x_8 - x_7x_9)]x_9 - [x_4 - 2\Omega(x_7x_8 + x_6x_9)]x_8 + [x_5 - 2\Omega(x_8^2 + x_9^2 - 1/2)]x_7 \} \\
\dot{x}_7 &= \frac{1}{2} \{ [x_3 - 2\Omega(x_6x_8 - x_7x_9)]x_8 + [x_4 - 2\Omega(x_7x_8 + x_6x_9)]x_9 - [x_5 - 2\Omega(x_8^2 + x_9^2 - 1/2)]x_6 \} \\
\dot{x}_8 &= \frac{1}{2} \{ [x_3 - 2\Omega(x_6x_8 - x_7x_9)]x_7 + [x_4 - 2\Omega(x_7x_8 + x_6x_9)]x_6 - [x_5 - 2\Omega(x_8^2 + x_9^2 - 1/2)]x_9 \} \\
\dot{x}_9 &= \frac{1}{2} \{ [x_3 - 2\Omega(x_6x_8 - x_7x_9)]x_6 + [x_4 - 2\Omega(x_7x_8 + x_6x_9)]x_7 + [x_5 - 2\Omega(x_8^2 + x_9^2 - 1/2)]x_8 \}
\end{aligned}
\tag{4.33}$$

5 SIMULAÇÕES

Este Capítulo apresenta as simulações do problema proposto neste trabalho através da integração numérica do sistema de equações diferenciais formado pelas equações 4.26 e 4.33 é feita com o método Runge-Kutta 4 utilizando o aplicativo MATLAB versão 6.5. Os parâmetros considerados na integração são:

Tabela 5.1 – Parâmetros de integração

Parâmetros	Valores
- Momento de inércia do satélite no eixo X	A = 9,18 kgm ²
- Momento de inércia do satélite no eixo Y	B = 9,90 kgm ²
- Momento de inércia do satélite no eixo Z	C = 11,07 kgm ²
- Rotação do satélite no eixo Z	$\Omega = 140$ rpm
- Raio do recipiente	R = 0,1 m
- Altura do líquido	h = 3R
- Densidade do líquido (água)	$\rho = 1$ g/cm ³
- Tensão superficial do líquido (água)	$\sigma = 0,07$ N/m
- Coeficiente de viscosidade cinemática	$\mu = 0,03$

Devido aos dados disponíveis, é considerado também um número de Bond $N_{Bo} = 10$, e como $N_{Bo} = \rho g R^2 / \sigma$ e a aceleração da gravidade é $g = 0,07 m/s^2$, então com o gráfico proposto por Dodge e Garza (1967) e mostrado na Fig. 3.8, pode-se obter o valor de m_I e o valor de k_I como segue:

$$m_I = 0,410\pi\rho R^3 \text{ e } k_I = 0,755\pi\rho R^2$$

5.1. Sloshing Atuando como Amortecedor de Nutação

Desde o acidente que culminou com a perda da missão do satélite ATS-5 (*Application Technological Satellite* – Satélite de Aplicação Científica), cuja missão se perdeu por causa da dissipação interna de energia provocada pelo sistema de refrigeração (*heat pipe*) sabe-se que líquidos podem ser utilizados passivamente para a estabilização direcional de veículos estabilizados por rotação em torno do eixo de maior momento de inércia. Vamos nesta seção analisar um caso típico e mostrar que o *sloshing* pode atuar como um amortecedor de nutação.

Para esta simulação considerou-se as seguintes condições iniciais: $Z_1 = -0,4m$
 $x = 0,01m$, $\omega_x = 1rpm$, $\omega_y = 1rpm$ e $\omega_z = 10rpm$.

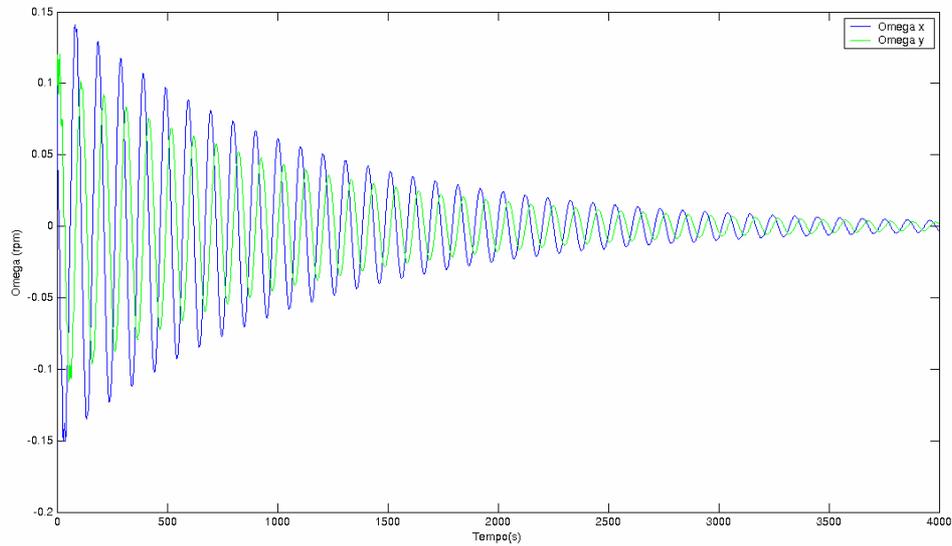


Figura 5.1 Decaimento das velocidades angulares transversais ω_x e ω_y no tempo

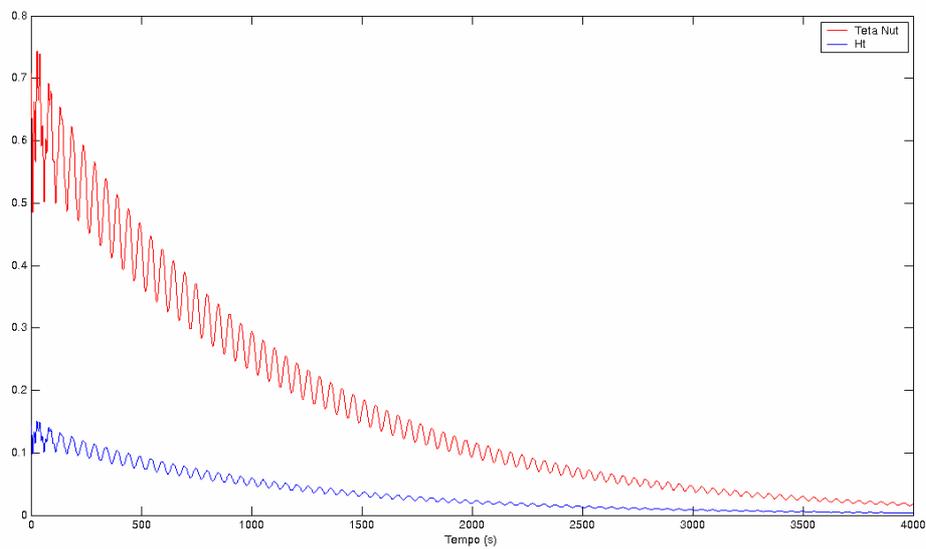


Figura 5.2 Decaimento do ângulo de nutação, $\dot{\theta}$ (em graus) e H_z em função do tempo

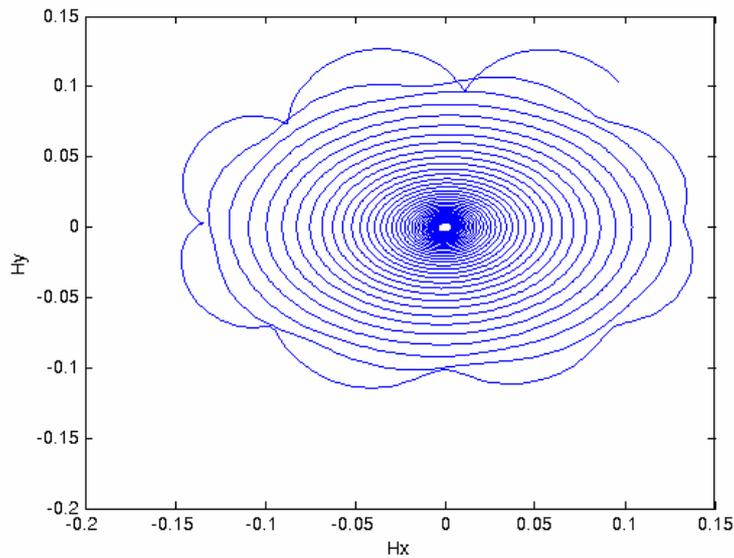


Figura 5.3 Comportamento das componentes transversais da quantidade de movimento angular

Observando a Figura 5.1 verifica-se que nestas condições a energia dissipada pelo movimento de *sloshing* comporta-se como um amortecedor de nutação fazendo com que as velocidades angulares transversais ω_x e ω_y (Figura 5.1) sejam amortecidas. Este comportamento é benéfico pois o que se deseja é que o ângulo de nutação seja tão pequeno quanto possível. A Figura 5.2 ilustra o decaimento consistente da componente transversal da quantidade de movimento angular e do ângulo de nutação. A Figura 5.3 mostra o comportamento das componentes transversais da quantidade de movimento angular H_x e H_y associadas ao decaimento do ângulo de nutação.

5.2. *Sloshing* Atuando Como Perturbação na Atitude de um Satélite

Neste segundo exemplo tomou-se um satélite com velocidades angulares residuais da ordem de 10^{-3} rpm, sujeito a uma pequena excitação do líquido. Nota-se que nesta configuração a rigidez giroscópica é mínima e qualquer perturbação pode tirar o veículo da sua condição estável. Esta condição pode ser garantida pelo subsistema de controle de atitude. Neste caso, se o satélite contiver líquido, pode ser necessário um estudo do efeito *sloshing* sobre a atitude para que o controle a ser projetado tenha robustez suficiente para manter a atitude na presença das perturbações provocadas pelo *sloshing*.

Considerou-se as seguintes condições iniciais: $Z_1 = -0,4m$ $x = 0,001m$, $\omega_x = 0,001rpm$, $\omega_y = 0,001rpm$ e $\omega_z = 0,001rpm$.

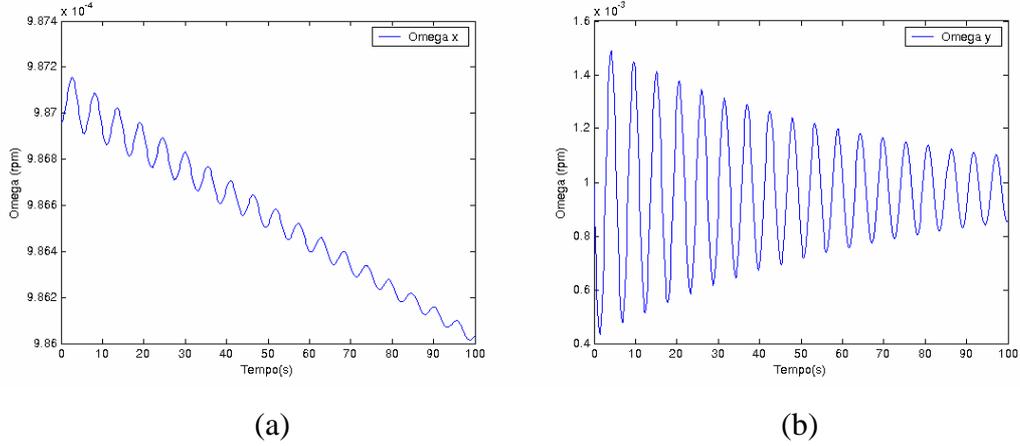
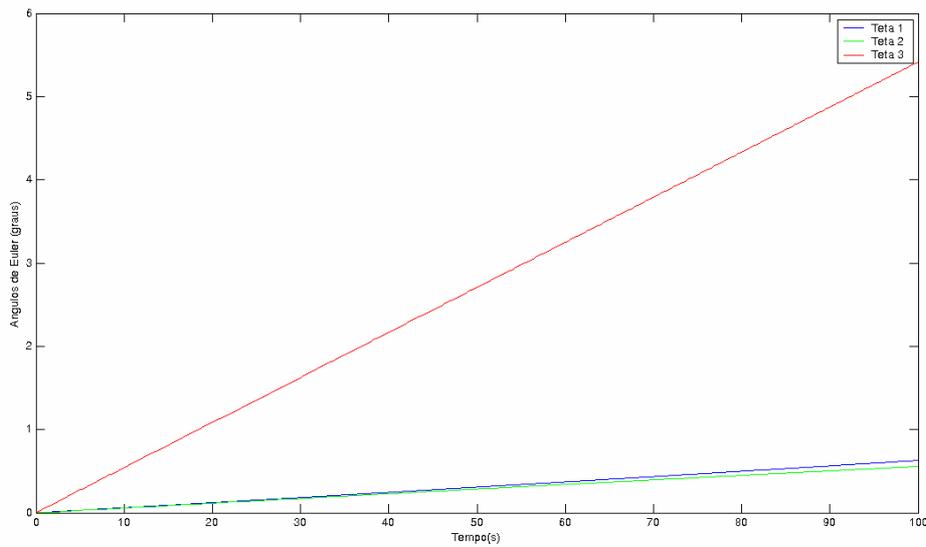


Figura 5.4 Decaimento das velocidades angulares transversais no tempo: a) ω_x ; b) ω_y



A Figuras 5.4 mostra que a pequena a perturbação provocada pelo *sloshing* pode requerer do controle capacidade adicional para manter a atitude nominal. No caso já citado do ATS-5, já se havia levado em conta que o sistema estaria girando em torno do eixo de menor momento de inércia (instável) enquanto se queimava combustível. O controle foi projetado para controlar esta situação instável. Mas o projeto de controle não levou em conta o efeito dissipativo do sistema de refrigeração e não conseguiu

manter a atitude nominal prescrita. Nesta subsecção mostra-se que o efeito do *sloshing* pode impor esforço adicional que certamente precisa ser levado em conta no projeto do controle de atitude. A Figura 5.5 ilustra a variação dos ângulos de atitude devido à perturbação advinda do *sloshing*.

5.3.Massa líquida em repouso excitada por velocidades transversais

Nos dois casos anteriores a atitude foi perturbada pela excitação do líquido. Nesta subsecção vai-se mostrar que perturbações impostas na atitude podem excitar o líquido provocando *sloshing*. Dá-se como condições iniciais as velocidades angulares transversais, com o líquido em repouso. O que vai ocorrer é a excitação do líquido pelas velocidades transversais, consistente com o alto grau de acoplamento das equações diferenciais do modelo simulado.

Considerou-se as condições iniciais: $Z_1 = -0,4m$ $x = 0$, $\omega_x = 1rpm$, $\omega_y = 1rpm$ e $\omega_z = 5rpm$.

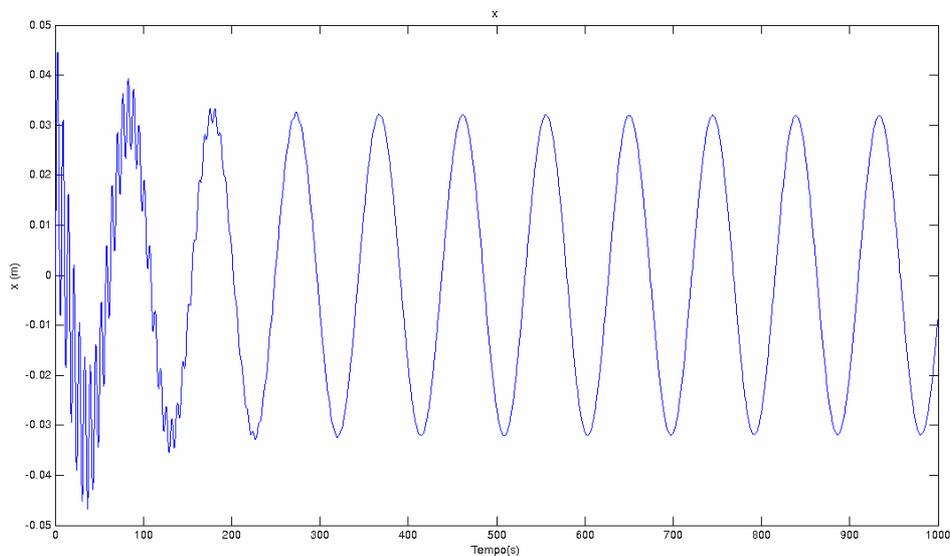


Figura 5.6 Comportamento de x no tempo

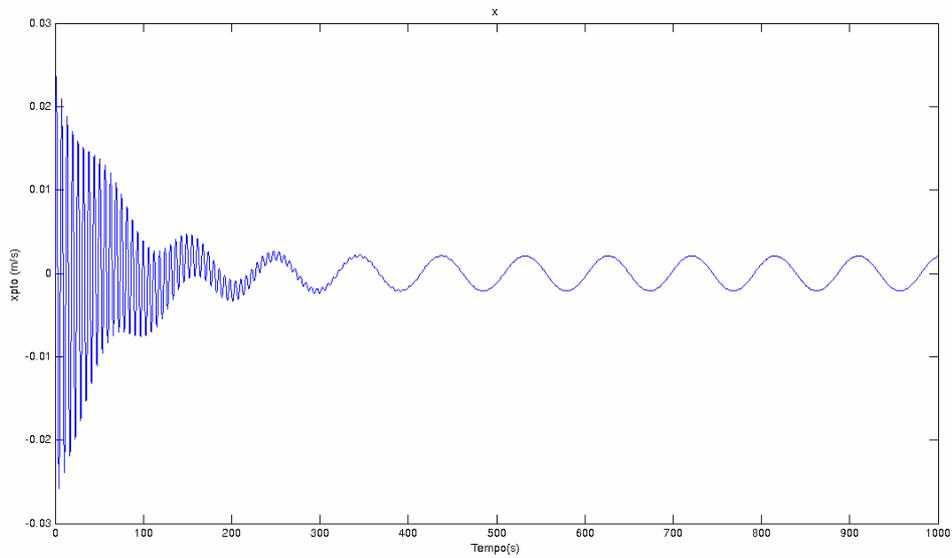


Figura 5.7 Comportamento da velocidade da massa m_l no tempo

As Figuras 5.6 e 5.7 mostram a variação da posição e da velocidade do líquido devido à perturbação na velocidade angular do satélite representada pelas componentes transversais $\omega_x = 1rpm$ e $\omega_y = 1rpm$.

6 CONCLUSÃO

Neste trabalho foi apresentado o problema do *sloshing* na presença de gravidade e em ambiente g-zero. Foram apresentados e discutidos conceitos fundamentais da área e as implicações do *sloshing* como elemento perturbador da atitude e como amortecedor de nutação. Foram apresentados e discutidos modelos matemáticos e experimentos implementados divulgados na literatura. Definiu-se e modelou-se matematicamente pela formulação de Lagrange um satélite contendo um tanque com líquido. O modelo do líquido foi representado por um sistema mecânico equivalente de massa-mola, com a constante da mola e massa associada obtidas pelo número de Bond para ambiente de microgravidade. O modelo matemático foi simulado via computador utilizando o ambiente MatLab. As equações da cinemática foram descritas por quaternion e os resultados convertidos para ângulos de atitude. Os resultados mostraram que o *sloshing* pode atuar passivamente como amortecedor de nutação para satélites estabilizados por rotação. Mostrou-se também que o *sloshing* pode causar efeitos indesejáveis na atitude e requerer esforço de controle adicional.

Essa área ainda tem muitos pontos em aberto e sugere-se para trabalhos futuros a formulação de leis de controle para discutir e analisar o esforço adicional de controle requerido para controlar espaçonaves sob o efeito de *sloshing*. Outra sugestão é incluir na análise dinâmica o desbalanceamento dinâmico causado pela oscilação do centro de massa do veículo devido ao movimento de *sloshing*. Sugere-se ainda um estudo comparativo de diferentes modelos mecânicos equivalentes para análise de precisão de modelos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALFRIEND, KYLE T. **Analysis of the partially filled viscous ring damper.** Washington: NASA, 1973. Final Report NASA GRANT NGR-33-010-169
- ALPER, J. R. Analysis of Pendulan Damper for Satellite Wobble Damping. **J. Spacecraft**, v. 2, n. 1, p. 50-53, 1965.
- CRUZ, J.J. e LOPES, R.V.F. Validação do método do sorvedouro de energia para avaliar o desempenho de um amortecedor de natação. In: CONGRESSO NACIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL, 32, 1987, UFRG, Gramado. **Anais...** Rio de Janeiro: SBMC, 1987. p. 481-486.
- DODGE, F. T.; GARZA, L. R. Experimental and theoretical studies of liquid sloshing at simulated low gravity. **Journal of Applied Mechanics**, v. 34, n. 3, p. 555-561, 1967.
- DODGE, F. T. **The new dynamic behavior of liquids in moving containers.** San Antonio, Texas: Souttwest Research Institute, 2000. 195 p.
- FONSECA, I. M.; LOURENÇÃO, P. T. de M.; OLIVEIRA, J. R. de F. Procedimentos para a estabilização passiva de um satélite sob condições inerciais críticas. **CONGRESSO INTERNACIONAL DE ENGENHARIA MECÂNICA, 8., 1985**, S. J. dos Campos, **Anais...** São José dos Campos: ITA, 1985. p. 551-554. (INPE-3529-PRE/750).
- FONSECA, I. M. **Partially filled viscous ring nutation damper: dynamical modeling.** S.J. dos Campos, SP, INPE, DMC-AMNUT-009/86-NTI, 1986.
- FONSECA, I. M. **Partially filled viscous ring nutation damper discrete parameter model.** S.J. dos Campos, SP, INPE, DMC-036/88-NTI, 1988.
- FONSECA, I. M.; SOUZA, P. N. Modelagem do movimento rotacional de um corpo rígido dotado de um amortecedor de natação anular viscoso e sua validação experimental. **Revista Brasileira de Ciências Mecânicas/Journal of the Brazilian Society of Mechanical Science**, v. 12, n. 1, p. 89-111, 1990. (INPE-9210-PRE/4882).
- HINADA, M.; INATANI, Y. Liquid behavior in passive nutation dampers for spin stabilized satellites. **Trans. Japan Soc. Aero. Space Sci.**, v.. 27, n. 78, p. 217-227, 1984.
- IBRAHIM, R. A. **Liquid sloshing dynamics, theory and applications.** 1 ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2005. 948 p.
- KAPLAN, M. H. **Modern spacecraft dynamic & control.** New York: John Wiley & Sons, 1976. 415 p.

LOPES, R.V.F. Modelagem de um amortecedor de nutação para satélites estabilizados por rotação. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE ENGENHARIA MECÂNICA, 9., 1987, Florianópolis. **Anais...** Florianópolis: UFSC, 1987. p. 761-763. (INPE-4275--PRE/1147).

LOPES, R.V.F.; RICCI, M.C. **Resultados dos testes para determinação experimental do coeficiente de amortecimento do modo spin-síncrono.** São José dos Campos, SP, INPE, nov., 1987. 32 p. (DMC-031/NTI/87).

LOPES, R.V.F.; RICCI, M.C. **Determinação de configurações de um pêndulo para levantamento experimental do desempenho do amortecedor de nutação do satélite de coleta de dados DA MECB.** São José dos Campos, SP, INPE, ago., 1987. 69 p. (DMC-029/87/NTI)

MEIROVITCH, L. **Methods of analytical dynamics.** 1 ed. New York: MacGraw-Hill, 1970. 524 p.

LOPES, R. V. F.; FONSECA, I. M.; RICCI; M. C. **Performance evaluation of the nutation damper in spin-synchronous mode.** São Jose dos Campos, SP, INPE, 1987, 6 p. (DMC-032/NTI/87).

SAYAR, B. A.; BAUMGARTEN, J. R. Linear and nonlinear analysis of fluid sloshing dampers. **AIAA Journal**, v. 20, n. 11, nov., p. 1534-1538, 1982.

SILVERMAN, S.; ABRAMSON, H. N. **The dynamic behavior of liquids in moving containers.** Washington: NASA, 1966. Cap.2, p. 13-78. (NASA SP – 106).

STOFAN, A. J.; PAVLI, A. J. **Experimental damping of liquid oscillations in a spherical tank by positive-expulsion bags.** Washington: NASA, 1962. (TN D-1311).

STOFAN, A. J.; SUMNER, I. E. **Experimental investigation of the sloshing-damping effectiveness of positive-expulsion bags and diaphragms in spherical tanks.** Washington: NASA, 1963. (NASA TN D-1712).

SUMNER, I. E. **Preliminary experimental investigation of frequencies and forces resulting from liquid sloshing in toroidal tanks.** Washington: NASA, 1963. (NASA TN D-1709).

APÊNDICE A - COMPORTAMENTO DOS LÍQUIDOS EM AMBIENTE COM GRAVIDADE

É apresentada aqui uma abordagem teórica para o *sloshing* lateral em um contêiner em movimento baseada nos trabalhos de Dodge (2000) e NASA SP-106 (1966). Este documento tornou-se através dos anos uma referência no estudo do comportamento dos líquidos e ainda hoje existe uma grande demanda de cópias deste trabalho.

A.1. Sloshing Lateral

O *Sloshing* Lateral é caracterizado por uma onda estacionária formada na superfície do líquido quando um tanque parcialmente cheio oscila como mostrado na Figura A.1. O movimento da onda tem uma frequência natural que depende da forma do tanque e da aceleração da gravidade ou da aceleração axial do tanque.

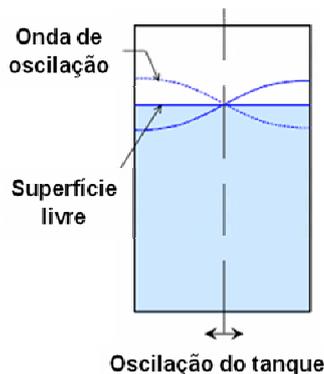


Figura A.8 Ilustração esquemática de uma onda de *sloshing*

Fonte: Adaptada de Dodge (2000).

A.1.1. Modelos mecânicos equivalentes de *sloshing*

A oscilação do centro de massa do líquido é o principal efeito dinâmico do *sloshing* lateral em um tanque e pode ser representado por um modelo mecânico equivalente. Dodge (2000) apresenta dois modelos ilustrados na Figura A.2. Em um dos modelos a oscilação do centro de massa do líquido é representada por um pêndulo, e no outro, por um sistema massa-mola. Ambos os modelos fornecem as mesmas forças e torques. A vantagem do modelo pendular sobre o modelo massa-mola é que no modelo pendular a frequência natural, $(g/L)^{0.5}$, varia com a aceleração g exatamente como a frequência de

sloshing do líquido, enquanto que, no modelo massa-mola a constante K da mola tem que ser alterada quando há uma mudança em g .

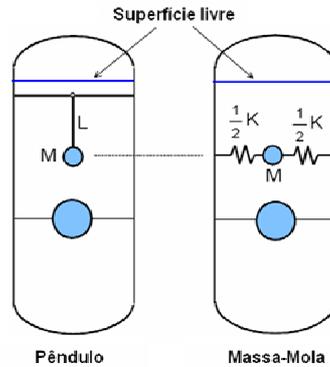


Figura A.9 Modelos mecânicos equivalentes do *sloshing*

Fonte: Adaptada de Dodge (2000).

A.1.2. Respostas de *sloshing* de ordem superior

Na Figura A.1 pode-se observar que onda de *slosh* tem um pico e um vale. Neste caso a onda é chamada de onda fundamental e tem a frequência natural mais baixa. Podem ocorrer ainda ondas com dois ou mais picos ou vales o que indica frequências naturais maiores. Estas ondas de maior ordem podem ser representadas na Figura A.2 pela incorporação de um pêndulo ou massa-mola adicional correspondente a cada módulo que se quer considerar. Geralmente, os modos de ordem superior são de pouco interesse uma vez que a magnitude do pêndulo ou massa-mola para esses módulos são muito menores comparados ao modo fundamental. Há de se levar em conta que, para tanques sem simetria radial, há um modo fundamental para cada um dos eixos principais e pode ser necessário considerar um pêndulo ou massa-mola para cada um dos modos, principalmente se seus valores forem de comparáveis.

A.2. Fundamento Matemático

Dodge (2000) em sua abordagem matemática para o *sloshing* lateral considera um tanque rígido contendo um líquido ideal sem viscosidade, o que permite o uso da teoria clássica de fluxo de potencial. É assumido também que o movimento da onda é linear, isto é, a amplitude da onda e do movimento do líquido é linearmente proporcional à

amplitude do movimento imposto ao tanque, assim, a frequência natural da onda de *slosh* não é uma função da amplitude da onda. E finalmente, assume-se que o movimento do tanque é harmônico, o que significa que ele varia com o tempo conforme $exp(i\Omega t)$ onde Ω é a frequência do movimento.

A.2.1. Equações diferenciais básicas e condições de contorno

O sistema de coordenadas Cartesiano x, y, z adotado por Dodge (2000) é mostrado na Fig. A.3. Para um caso mais geral, o tanque tem uma oscilação translacional ao longo dos eixos x e y , oscilações *pitch* (arfagem) e *yaw* (guinada) sobre os eixos x e y , e oscilação em roll (rolamento) em torno do eixo z . Na Fig. A.3 é mostrada somente uma oscilação angular α_y e uma excitação de rotação α_z . O sistema de coordenadas x, y, z está fixado ao tanque e move com ele, ao passo que o sistema de coordenadas inercial X, Y, Z é estacionário.

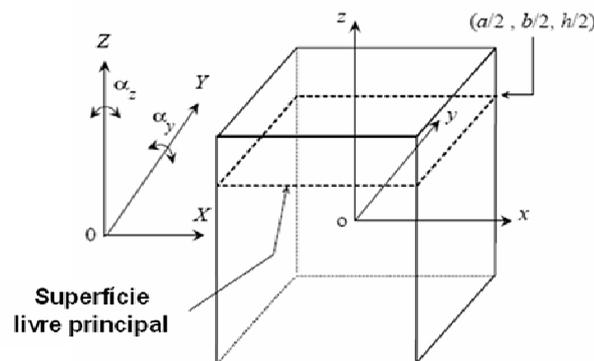


Figura A.10 Sistema de coordenadas para a obtenção das equações do *slosh*

Fonte: Adaptada de Dodge (2000).

A.2.2. Potencial de velocidade Φ

O líquido é considerado não viscoso, o que implica em ausência de atrito entre as camadas do fluido, e assume-se que o movimento é sem vorticidade, deste modo, a distribuição de velocidade de *slosh* pode ser derivada de um potencial de velocidade Φ , e as componentes x, y, z das componentes da velocidade u, v, w podem ser calculadas como segue (DODGE, 2000):

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad w = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad (\text{A.1})$$

Para um potencial de velocidade, a condição de incompressibilidade do líquido deve ser satisfeita pela equação diferencial básica em qualquer lugar do volume do líquido e é dada por (DODGE, 2000):

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad \text{ou} \quad \nabla^2 \Phi = 0 \quad (\text{A.2})$$

A.2.3. Equações de movimento

Para um fluxo de potencial que não contém vorticidade, as equações dinâmicas do movimento do fluido podem ser integradas diretamente para se obter a forma não estacionária da equação de Bernoulli:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + gz + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) = f(t) \quad (\text{A.3})$$

onde p é a pressão do fluido, ρ é a densidade do fluido, e g é gravidade efetiva no sentido negativo do eixo z .

Dodge (2000) assume que as velocidades u, v, w são pequenas, assim, os quadrados e termos com potências superiores podem ser desprezados quando comparados com os termos lineares; isto é, as equações foram linearizadas, de modo que pode-se escrever:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + gz = 0 \quad (\text{A.4})$$

que é a forma linearizada da Equação A.3.

A.2.4. Condições de contorno para a superfície livre

Qualquer função matemática que seja uma solução da equação A.2 tem necessariamente que satisfazer a condição de contorno das paredes do tanque e da superfície livre. Uma das condições de contorno para a superfície livre é obtida pela equação A.4. Considerando que a superfície é livre para se mover, então, se a densidade do gás for desprezível em relação à do líquido, a pressão na superfície do líquido será igual à pressão estática p_0 do gás acima dele. Desta forma, a equação de Bernoulli pode ser escrita como :

$$\frac{\partial \Phi(x, y, z, t)}{\partial t} + g\delta(x, y, t) = -\frac{p_0}{\rho} \quad \text{para} \quad z = h/2 \quad (\text{A.5})$$

onde, $\delta(x,y,t)$ é um pequeno deslocamento da superfície livre acima do nível $z=h/2$ não perturbado. Se as equações não forem linearizadas, a equação A.5 deverá ser avaliada na localização deslocada real $z = h/2 + \delta$ da superfície em vez de na posição de equilíbrio $z = h/2$. Dodge (2000) prova que a diferença entre as duas condições ($z = h/2$ e $z = h/2 + \delta$) torna-se o termo de ordem superior em δ e assim pode ser desprezada.

A equação A.5 é a condição “dinâmica” na superfície livre. A condição “Cinemática” para relacionar o deslocamento da superfície δ à componente vertical da velocidade do líquido na superfície, na forma linearizada é:

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} = w = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \text{ para } z = h/2 \quad (\text{A.6})$$

As equações A.5 e A.6 podem ser combinadas e escrita inteiramente em termos de Φ (ou δ) derivando-se a equação A.5 em relação a t , a equação A.6 em relação a z , e combinando as duas equações para eliminar δ (ou Φ). O resultado é:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \text{ para } z = h/2 \quad (\text{A.7})$$

A.2.5. Condições de contorno nas paredes do tanque

Dodge (2000) assume que a viscosidade e a tensão viscosa são suficientemente pequenas e podem ser desprezadas, assim, a única condição que pode ser imposta à parede do tanque é que a velocidade perpendicular ao plano da parede tem que ser igual à velocidade V_n da parede do tanque perpendicular a ela (onde n significa a normal ou direção perpendicular). Conforme Dodge, a condição “sem escorregamento (*no-slip*)” não pode ser imposta, e em geral, as soluções admitirão escorregamento em uma direção paralela à parede.

Se o tanque for estacionário, a condição de contorno na parede será exatamente que a componente da velocidade do líquido perpendicular à parede seja zero, o que leva a um tipo padrão do problema de valor contorno. No presente caso pressupõe-se que o reservatório oscila para frente e para trás, conduzindo a um problema de valor de contorno não-padrão que, conforme Dodge (2000), pode ser resolvido através da utilização de séries de Fourier.

Para o sistema linear, o problema de *sloshing* pode ser considerado como uma série de problemas individuais, um para cada tipo de interesse, e da soma dos resultados obtém-se o potencial de velocidade para a totalidade do movimento do tanque. Assim, Dodge (2000) considera individualmente vários tipos de movimentos simples do tanque, discutidos a seguir.

Movimento horizontal paralelo ao eixo x. Para este caso, é suposto que o deslocamento do tanque é expresso como $X(t) = -iX_0 \exp(i\Omega t)$, o que implica que a parte real do deslocamento é igual a $X_0 \sin \Omega t$. As componentes da velocidade das paredes do tanque são $v = w = 0$ e $u = iX_0 \Omega \exp(i\Omega t)$, assim, as condições de contorno das superfícies líquidas do tanque são expressas como:

$$n \cdot \nabla \Phi = iX_0 \Omega e^{i\Omega t} \quad \text{para superfícies molhadas} \quad (\text{A.8})$$

onde n é o vetor unitário normal à superfície líquida.

Pitching sobre o eixo y. Neste caso, Dodge (2000) considera que a oscilação angular das paredes do tanque é expressa por $\alpha_y(t) = -i\alpha_0 \exp(i\Omega t)$, o que implica que o deslocamento de qualquer ponto em uma parede do tanque normal à ela é proporcional à distância axial do ponto desde o eixo de *pitch*: $X(t) = z\alpha_0 \exp(i\Omega t)$. Há também deslocamentos no eixo z dos pontos no fundo do tanque, que são proporcionais à distância de um ponto desde o eixo de *pitch*, ou $Z(t) = -x\alpha_0 \exp(i\Omega t)$. Estas condições podem ser combinadas em um único vetor de condições de contorno para a superfície líquida que é expresso como:

$$n \cdot \nabla \Phi = (ze_x - xe_z)\alpha_0 \Omega e^{i\Omega t} \quad (\text{A.9})$$

onde e_x é o vetor unitário na direção x e e_z é o vetor unitário na direção z .

Rotação (rolling) em torno do eixo z. Dodge considera que, se o tanque tem paredes internas ou, não é radialmente simétrico, oscilações na rotação $\alpha_z = -i\gamma_0 \exp(i\Omega t)$ em torno do eixo z farão o líquido oscilar e provocará ondas de *slosh*. O vetor das condições de contorno apropriado para as superfícies líquidas é:

$$n \cdot \nabla \Phi = (xe_y - ye_x)\gamma_0 \Omega e^{i\Omega t} \quad (\text{A.10})$$

Conforme Dodge, para um tanque radialmente simétrico sem nenhuma parede interna, um movimento de rotação do tanque provocará um “escorregamento (*slip*)” ao redor do líquido sem produzir nenhum movimento do líquido, porque um líquido não-viscoso não pode sustentar uma tensão de cisalhamento (*shear stress*) entre as paredes e o líquido. Para um líquido real com viscosidade, um movimento de rotação causará algum movimento no líquido em uma fina camada no contorno próximo às paredes, mas este movimento criará uma pequena onda de movimento, se houver, na superfície livre.

A.2.6. Solução das Equações para um Tanque Retangular

Neste caso Dodge (2000) usa um tanque retangular tendo como referência o sistema de coordenada x,y,z mostrado na Figura A.3. Inicialmente, o tanque é considerado estacionário, caso em que as soluções são convencionalmente chamadas de “autofunções” do problema.

Autofunções de $\nabla^2\Phi = 0$

Para Dodge (2000) as soluções do potencial são harmônicas no tempo, $\exp(i\omega t)$. E ele considera que geralmente, a dependência do tempo de Φ pode ser ignorada, porém, quando necessárias as derivadas no tempo, elas são incluídas multiplicando-se o potencial por $i\omega$. As autofunções $\Phi(x,y,z)$ são encontradas pelo método de separação de variáveis, no qual assume-se que $\Phi(x,y,z)$ é o produto de três funções individuais $\xi(x)$, $\psi(y)$, e $\zeta(z)$ das coordenadas. Esta hipótese é inserida na equação A.2 e toda a equação é dividida por $\Phi = \xi\psi\zeta$ obtendo-se:

$$\frac{1}{\xi} \frac{d^2\xi}{dx^2} + \frac{1}{\psi} \frac{d^2\psi}{dy^2} + \frac{1}{\zeta} \frac{d^2\zeta}{dz^2} = 0 \quad (\text{A.11})$$

Dado que ξ é apenas função de x , ψ apenas função de y , e ζ apenas função de z , cada uma das partes na equação A.11 deve ser independente de qualquer coordenada e assim deve ser igual a uma constante. Assim, a forma da solução depende do sinal assumido para a constante, se negativos para ξ e ψ e positivo para ζ , o primeiro conjunto de autofunções é dado por (DODGE, 2000):

$$\frac{1}{\xi} \frac{d^2\xi}{dx^2} = -\lambda^2 \Rightarrow \xi(x) = A \sin \lambda x + B \cos \lambda x \quad (\text{A.12a})$$

$$\frac{1}{\psi} \frac{d^2\psi}{dy^2} = -\beta^2 \Rightarrow \psi(y) = C \sin \beta y + D \cos \beta y \quad (\text{A.12b})$$

$$\frac{1}{\zeta} \frac{d^2\zeta}{dz^2} = \lambda^2 + \beta^2 \Rightarrow \zeta(z) = E \sinh \sqrt{\lambda^2 + \beta^2} z + F \cosh \sqrt{\lambda^2 + \beta^2} z \quad (\text{A.12c})$$

onde λ e β são constantes. O segundo conjunto é obtido trocando-se os sinais:

$$\frac{1}{\xi} \frac{d^2 \xi}{dx^2} = \lambda^2 \Rightarrow \xi(x) = A \sinh \lambda x + B \cosh \lambda x \quad (\text{A.13a})$$

$$\frac{1}{\psi} \frac{d^2 \psi}{dy^2} = \beta^2 \Rightarrow \psi(y) = C \sinh \beta y + D \cosh \beta y \quad (\text{A.13b})$$

$$\frac{1}{\zeta} \frac{d^2 \zeta}{dz^2} = -(\lambda^2 + \beta^2) \Rightarrow \zeta(z) = E \sin \sqrt{\lambda^2 + \beta^2} z + F \cos \sqrt{\lambda^2 + \beta^2} z \quad (\text{A.13c})$$

Outras possibilidades podem ser obtidas através de outras associações de constantes positivas e negativas. A solução simples:

$$\Phi(x,y,z) = Gx + Hy + Kz + Lxy + Mxz + Nyz \quad (\text{A.14})$$

é ainda mais uma possibilidade. Todas estas soluções serão necessárias para satisfazerem as condições de contorno para casos particulares.

Autovalores

Os valores das constantes λ e β que naturalmente satisfazem as condições de contorno do problema de valor de contorno padrão, são os autovalores que determinam as frequências naturais do problema e que, neste caso, são as frequências de *sloshing*. Estas frequências são necessárias ao considerarem-se as soluções para os casos em que o tanque está em movimento.

Condições nas paredes. A Figura A.3 mostra que as paredes do tanque estão a $x = \pm a/2$ e $y = \pm b/2$. Os vetores normais unitários são $e_x = \pm 1$, $e_y = 0$ para as duas paredes perpendiculares ao eixo x , e $e_x = 0$, $e_y = \pm 1$ para as duas paredes perpendiculares ao eixo y . Assim, as condições de contorno da parede são $\partial\Phi/\partial x = 0$ para $x = \pm a/2$ e $\partial\Phi/\partial y = 0$ para $y = \pm b/2$. Observando as equações A.12, A.13, e A.14, Dodge conclui que as equações A.12 podem satisfazer estas condições, e as equações A.13 e A.14 não podem (por fazerem todas as constantes de integração identicamente iguais a zero). Assim, as possibilidades que fazem $\partial\Phi/\partial x = 0$ para $x = \pm a/2$ são:

$$A=0 \text{ e } \lambda=2n\pi/a \text{ ou } B=0 \text{ e } \lambda=(2n-1)\pi/an = 1,2,3,4,\dots \quad (\text{A.15a})$$

Igualmente, as que fazem $\partial\Phi/\partial y = 0$ para $y = \pm b/2$ são:

$$C=0 \text{ e } \beta=2n\pi/b \text{ ou } D=0 \text{ e } \beta=(2n-1)\pi/b \text{ } n = 1,2,3,4,\dots \quad (\text{A.15b})$$

Estas equações fornecem várias opções para a soma $(\lambda^2 + \beta^2)^{0.5}$, ou seja, $2n\pi/a$, $2n\pi/b$, $(2n - 1)\pi/a$, $(2n - 1)\pi/b$, $[(2n\pi/a)^2 + (2n\pi/b)^2]$, $[(2n\pi/a)^2 + (2n - 1)^2\pi^2/b^2]^{0.5}$, e assim por diante.

A escolha para satisfazer a exigência de $\partial\Phi/\partial z = 0$ para $z = -h/2$ no fundo do tanque para todos os valores de λ e β é dada por:

$$E = F \tanh\left[\sqrt{\lambda^2 + \beta^2} (h/2)\right] \quad (\text{A.15c})$$

na equação A.12c.

Considerando as duas primeiras dimensões das ondas, as combinações dos autovalores e autofunções levam às seguintes possibilidades para o potencial $\Phi = \xi\psi\zeta$ (DODGE, 2000):

$$\Phi_1(x, z) = (AF) \cos[2n\pi(x/a)] \{ \cosh[2n\pi(z/a)] + \tanh[n\pi(h/a)] \sinh[2n\pi(z/a)] \} \quad (\text{A.16a})$$

$$\Phi_2(x, z) = (BF) \sin[(2n-1)\pi(x/a)] \times \{ \cosh[(2n-1)\pi(z/a)] + \tanh[(2n-1)\pi(h/a)] \sinh[(2n-1)\pi(z/a)] \} \quad (\text{A.16b})$$

$$\Phi_3(y, z) = (CF) \cos[2n\pi(y/b)] \{ \cosh[2n\pi(z/b)] + \tanh[n\pi(b)] \sinh[2n\pi(z/b)] \} \quad (\text{A.16c})$$

$$\Phi_4(y, z) = (DF) \sin[(2n-1)\pi(y/b)] \times \{ \cosh[(2n-1)\pi(z/b)] + \tanh[(2n-1)\pi(h/b)] \sinh[(2n-1)\pi(z/b)] \} \quad (\text{A.16d})$$

Ainda conforme Dodge, há também ondas tridimensionais de vários tipos, das quais o que segue é apenas uma das possibilidades:

$$\Phi_5(x, y, z) = (BDF) \sin[(2n-1)\pi(x/2)] \sin[(2m-1)\pi(y/b)] \times \{ \cosh[\pi\gamma(z/a)] + \tanh[\pi\gamma(h/2a)] \sinh[\pi\gamma(z/a)] \} \quad (\text{A.17})$$

onde $\gamma = (2n - 1)^2 + (2m - 1)^2(a/b)^2$.

Condições na superfície livre. A equação A.7 fornece a condição de contorno para a superfície livre, na qual a derivada no tempo $\partial^2\Phi/\partial t^2$ é substituída pelo termo equivalente $-\omega^2\Phi \exp(i\omega t)$, e o fator $\exp(i\omega t)$ que multiplica ambos os termos na equação é cancelado. Assim, como exemplo, a solução representada por Φ_2 quando inserida na equação A.7 e fazendo-se z igual a $h/2$ obtém-se:

$$-\omega^2 BF \sin[\kappa(x/a)] \{ \cosh[\kappa(h/2a)] + \tanh[\kappa(h/2a)] \sinh[\kappa(h/2a)] \} + g(\kappa/a) BF \sin[\kappa(x/a)] \{ \sinh[\kappa(h/2a)] + \tanh[\kappa(h/2a)] \cosh[\kappa(h/2a)] \} = 0 \quad (\text{A.18})$$

onde $\kappa = \pi(2n - 1)$.

Frequências naturais. Das raízes da equação A.18 chega-se à seguinte expressão que é solução para as frequências naturais ω :

$$\omega_n^2 = \pi(2n-1)\left(\frac{g}{a}\right) \tanh\left[\pi(2n-1)\left(\frac{h}{a}\right)\right] \quad (\text{A.19})$$

onde o índice n indica que ω depende do número do modo n . A frequência diminui a medida que a profundidade h diminui ou a largura a do tanque aumenta. O modo $n=1$ tem a mais baixa de todas as frequências naturais.

Forma da onda *slosh*. Com esta solução para Φ_2 , a forma da onda *slosh* pode ser encontrada através da equação A.6 sendo:

$$\delta(x,t) = -\frac{2BFi}{a\omega_n}(2n-1) \sinh\left[\pi(2n-1)\left(\frac{h}{a}\right)\right] \sin\left[\pi(2n-1)\left(\frac{x}{a}\right)\right] \quad (\text{A.20})$$

Quando $n=1$, a onda tem amplitude zero em $x=0$, um pico positivo em uma das paredes, e um pico negativo na outra parede; esta é a onda assimétrica fundamental. Para $n>1$, existem picos intermediários, e o número de picos aumenta com n . A Figura A.4 mostra o esboço dos três primeiros modos e o deslocamento relativo do centro de massa do líquido para cada modo. O deslocamento do c.m. para o modo fundamental $n=1$ é substancialmente maior que os outros modos para a mesma amplitude máxima da onda. Uma vez que a oscilação do c.m. é a fonte das forças e torques induzidos pelo *slosh*, a onda para $n=1$ produz muito mais força e torque do que qualquer outro modo.

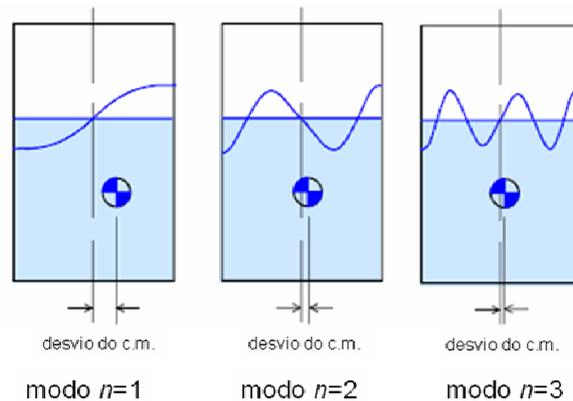


Figura A.11 Forma de onda do *Slosh* para os três primeiros modos assimétricos em x de um tanque retangular.

Fonte: Adaptada de Dodge (2000).

Modos simétricos. Se for utilizado Φ_1 em vez de Φ_2 pode-se encontrar os modos de *slosh* simétricos, cujas frequências naturais são mais elevadas que as correspondentes frequências do modo assimétrico são dadas pela relação:

$$\omega_m^2 = 2m\pi \left(\frac{g}{a} \right) \tanh \left[2\pi m \left(\frac{h}{a} \right) \right] \quad (\text{A.21})$$

A Figura 2.5 mostra as primeiras formas de onda simétricas que, como se pode observar, não provocam deslocamento de c.m. do líquido para qualquer um destes modos, não produzindo assim forças ou torques laterais.

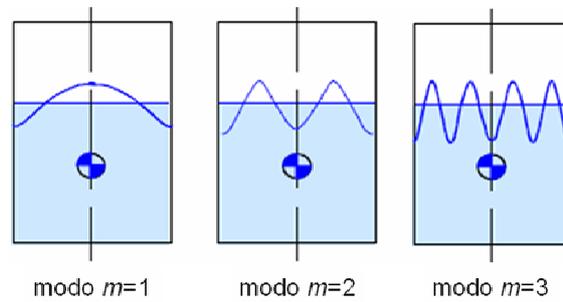


Figura A.12 Formas de onda de *Slosh* para os três primeiros modos simétricos em x para um tanque retangular.

Fonte: Adaptada de Dodge (2000).

Modos 2-D em “y”. As frequências naturais bidimensionais em “y” para os modos assimétrico e simétrico (quando ocorrem quando o tanque tem uma oscilação translacional ao longo do eixo y) são determinadas pelo mesmo processo, iniciando-se com Φ_3 e Φ_4 . Os resultados são os mesmos que os correspondentes resultados obtidos para “ x ” com a substituição da largura a pela largura b .

Modos tridimensionais. As frequências naturais dos modos que variam com ambos os eixos x e y podem ser determinadas por um processo similar, iniciando-se com Φ_5 . O resultado é dado por:

$$\omega_{m,n}^2 = \left\{ \left[\gamma_n^2 + \eta_m^2 \left(\frac{a}{b} \right)^2 \right] \left(\frac{g}{a} \right) \right\} \tanh \left\{ \left[\gamma_n^2 + \eta_m^2 \left(\frac{a}{b} \right)^2 \right] \left(\frac{h}{a} \right) \right\} \quad (\text{A.22})$$

onde γ_n é $2\pi n$ ou $2\pi(n - 0.5)$ dependendo se a onda tridimensional é simétrica ou assimétrica na direção x , e η_m é igualmente $2\pi m$ ou $2\pi(m - 0.5)$ na direção y . As formas de onda são uma combinação das formas no modo bidimensional em x e y .

Movimento Forçado – translação oscilatória do tanque

Os modos de *slosh* livres (autofunções) são a base para a construção de uma solução para quando o tanque é forçado a oscilar. Assumindo que um tanque retangular oscila ao longo do eixo x , as condições de contorno e equação A.8 é reduzida a:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = X_0\Omega e^{i\Omega t} \quad \text{para } x = \pm a/2; \quad \frac{\partial\Phi}{\partial y} = 0 \quad \text{para } y = \pm b/2 \quad (\text{A.23})$$

As condições de contorno para a superfície livre e o fundo são as mesmas que as para oscilações livres.

Na direção x a oscilação do tanque cria ondas assimétricas em x , o que implica que a solução do movimento forçado envolve uma série de modos de *sloshing* Φ_2 . Dodge assume como solução:

$$\Phi = \left\{ A_0 x + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \text{sen}\left(\lambda_n \frac{x}{a}\right) \left[\cosh\left(\lambda_n \frac{z}{a}\right) + \tanh\left(\lambda_n \frac{h}{2a}\right) \text{senh}\left(\lambda_n \frac{z}{a}\right) \right] \right\} e^{i\Omega t} \quad (\text{A.24})$$

Nesta equação acima, $\lambda_n = (2n - 1)\pi$ e o produto das constantes de integração BF de Φ_2 foram substituídos por outra constante A_n , onde n indica que a constante depende do modo em questão.

Notar que $\partial\Phi/\partial y = 0$ e que $\partial\Phi/\partial z = 0$ no fundo do tanque ($z = -h/2$). Assim, escolhendo-se A_0 igual a ΩX_0 , implica que o potencial Φ irá satisfazer todas as condições de contorno da parede. Os requisitos para satisfazer a condição da superfície livre obtém-se substituindo Φ dentro da condição de superfície livre equação A.7:

$$\begin{aligned}
& -\Omega^2 \left\{ \Omega X_0 x + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\lambda_n \frac{x}{a}\right) \left[\cosh\left(\lambda_n \frac{h}{a}\right) + \tanh\left(\lambda_n \frac{h}{2a}\right) \sinh\left(\lambda_n \frac{h}{a}\right) \right] \right\} + \\
& g \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{\lambda_n}{a} \sin\left(\lambda_n \frac{x}{a}\right) \left[\sinh\left(\lambda_n \frac{h}{a}\right) + \tanh\left(\lambda_n \frac{h}{2a}\right) \cosh\left(\lambda_n \frac{h}{a}\right) \right] \right\} = 0
\end{aligned} \tag{A.25}$$

Como os termos $\sin(\lambda_n x/a)$ são ortogonais no intervalo $-a/2 < x < a/2$, pode-se escrever o x no primeiro termo da equação A.25 como uma série de Fourier de termos $\sin(\lambda_n x/a)$ o que permite determinar as constantes de integração A_n em termos de X_0 . Deste processo obtém-se:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a^2}{\lambda_n^2} (-1)^{n-1} \sin\left(\lambda_n \frac{x}{a}\right) \tag{A.26}$$

A substituição do termo x na equação A.25 por esta série e agrupando-se os termos em relação a cada $\sin(\lambda_n x/a)$, permite determinar cada A_n um por um. Após algum tratamento algébrico e a substituição da função A.19 pelas frequências naturais, a expressão final para o potencial da velocidade é obtida:

$$\begin{aligned}
\Phi(x, z, t) = & -Ae^{i\Omega t} \left\{ x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4a(-1)^{n-1}}{\pi^2 (2n-1)^2} \left(\frac{\Omega^2}{\omega_n^2 - \Omega^2} \right) \sin\left[(2n-1)\pi \frac{x}{a}\right] \times \right. \\
& \left. \frac{\cosh[(2n-1)\pi(z/a + h/2a)]}{\cosh[(2n-1)\pi(h/a)]} \right\}
\end{aligned} \tag{A.27}$$

Forças e torques. As frequências naturais e as forças e torques exercidos em um tanque pelo *sloshing* são características de maior interesse nesse caso. As forças e os torques são determinados pela integração da parte *instável* da pressão p do líquido sobre a área da parede do tanque. Da equação A.4 determina-se esta pressão em termos do potencial de velocidade e fazendo a componente diferencial da força na direção x , $dF_x = p(dA_x)$, onde dA_x é o elemento diferencial da área da parede normal ao eixo x obtém-se a componente x da força, F_x , pela integração:

$$F_x = \int_{-h/2}^{h/2+\Delta} \int_{-b/2}^{b/2} p|_{x=a/2} dydz - \int_{-h/2}^{h/2-\Delta} \int_{-b/2}^{b/2} p|_{x=-a/2} dydz = -2\rho b \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_{x=a/2} dz \tag{A.28}$$

Substituindo a expressão para Φ da equação A.27 e realizando a integração obtém-se:

$$\frac{F_{x_0}}{-i\Omega^2 X_0 m_{liq}} = 1 + 8 \frac{a}{h} \sum_{n=1}^N \frac{\tanh[(2n-1)\pi h/a]}{(2n-1)^3 \pi^3} \frac{\Omega^2}{\omega_n^2 - \Omega^2} \tag{A.29}$$

onde, F_{xo} é a amplitude da força de oscilação, e $m_{liq}=\rho abh$ é a massa do líquido no tanque.

Na equação A.29, observa-se que a força exercida no tanque torna-se indefinidamente grande quando a frequência de excitação Ω é igual a qualquer uma das frequências naturais ω_n . O termo $(2n-1)^3$ no denominador faz com que a intensidade da força de ressonância diminua com o aumento da ordem do modo de *slosh*. Isto implica que, quando se inclui o amortecimento, somente o primeiro modo ou talvez, os dois primeiros, criem forças substanciais. Outras características podem ser observadas:

- para baixas frequências de excitação (isto é, $\Omega \rightarrow 0$), o somatório na equação A.29 tende a zero, e a força é apenas o produto da massa do líquido e a aceleração do tanque, isto é o líquido responde como se estivesse congelado;
- para altas frequências de excitação (isto é, $\Omega \gg \omega_n$), o somatório é independente de Ω , e a força torna-se novamente como a de um corpo rígido, com uma massa $m_{liq}[1 - 8(a/h\pi^3)\tanh(\pi h/a)]$ que é um pouco menor que a massa do líquido; isto implica que uma parte do líquido (próximo da superfície livre) não se move com o tanque;
- as componentes em y e z da força são zero.

O torque M exercido no tanque que aparece no eixo y e é causado pela pressão na direção x agindo nas paredes e no fundo do tanque. Com o eixo y através do centro de massa do líquido, o elemento diferencial do torque é $dM_y = -z(pdA_x) - x(pdA_z)$. Assim o torque total é dado por:

$$M_x = -2 \int_{-h/2}^{h/2+\Delta} \int_{-b/2}^{b/2} zp|_{x=a/2} dydz - \int_{-h/2}^{h/2-\Delta} \int_{-b/2}^{b/2} xp|_{x=-h/2} dydx \quad (A.30a)$$

Linearizando e combinando os termos tem-se:

$$M_x = -2b \int_{-h/2}^{h/2} z \left. \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right|_{x=a/2} dz - 2b \int_{-a/2}^{a/2} x \left. \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right|_{x=-h/2} dx \quad (A.30b)$$

Após a integração, simplificações com algumas transformações algébricas e hiperbólicas, e rearranjando o resultado obtém o torque como segue (DODGE, 2000):

$$\frac{M_{y_0}}{-i\Omega^2 X_0 m_{liq} h} = \frac{1}{12} (a/h)^2 + 8 \frac{a}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tanh[(2n-1)\pi h/a]}{(2n-1)^3 \pi^3} \times \left\{ \frac{1}{2} - \frac{2(a/h) \tanh[(2n-1)\pi h/2a]}{(2n-1)\pi} + \frac{g}{h\omega_n^2} \right\} \frac{\Omega^2}{\omega_n^2 - \Omega^2} \quad (\text{A.31})$$

O termo com g entre as chaves à direita representa o torque gravitacional da oscilação do centro de massa do líquido. Comparando-se a equação A.31 com a equação A.28, pode-se concluir que os termos que representam as massas oscilantes na equação A.28 são multiplicados por fatores que têm dimensões de comprimento.

Movimento Forçado – *pitching* do tanque em torno do eixo y

Para o exemplo de *pitching* em torno do eixo y as condições de contorno na parede são dadas pela equação A.9 e reduzem-se a Dodge 2000):

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = \alpha_0 \Omega z e^{i\Omega t} \quad \text{para } x = \pm a/2; \quad \frac{\partial\Phi}{\partial z} = -\alpha_0 \Omega x e^{i\Omega t} \quad \text{para } z = -h/2 \quad (\text{A.32})$$

Estas condições causam alguma complexidade na expressão para o potencial dado que nenhum potencial simples pode satisfazer a ambos. Dodge propõem a seguinte expressão para o potencial:

$$\Phi(x, z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \text{sen}[(2n-1)\pi z/h] \text{senh}[(2n-1)\pi x/h] \quad (\text{A.33})$$

O fato de que a equação A.33 satisfaz a equação A.2 pode ser verificado por substituição direta. Porém, $\partial\Phi/\partial z$ na superfície livre envolve termos complicadores em senh para a variável x , enquanto que os outros potenciais usados envolviam apenas termos em sen para a variável x . Isto quer dizer que é necessário que uma expansão da série de Fourier satisfaça a condição da superfície livre bem como as condições de contorno nas paredes e no fundo do tanque. O resultado final apresentado por Dodge (2000) é:

$$\begin{aligned}
\Phi(x, z, t) = \alpha_0 h^2 \Omega e^{i\Omega t} & \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{\pi^3 (2n-1)^3} \left(\frac{\text{sen}[(2n-1)\pi z/h] \text{senh}[(2n-1)\pi z/h]}{\cosh[(2n-1)\pi a/2h]} \right. \right. \\
& + \left. \frac{(a/h)^2 \text{sen}[(2n-1)\pi x/a] \cosh[(2n-1)\pi(z/a - h/2a)]}{\text{senh}[(2n-1)\pi h/2a]} \right) + \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(a/h)(-1)^n}{\pi^2 (2n-1)^2} \frac{\Omega^2}{\omega_n^2 - \Omega^2} \left(\frac{1}{2} - \frac{2(a/h) \tanh[(2n-1)\pi h/2a]}{(2n-1)\pi} + \frac{g}{h\omega_n^2} \right) \times \\
& \left. \frac{\text{sen}[(2n-1)\pi x/a] \cosh[(2n-1)\pi(z/a + h/2a)]}{\cosh[(2n-1)\pi h/a]} \right\} \quad (\text{A.34})
\end{aligned}$$

Nesta expressão o primeiro somatório não tem uma componente ressonante, o que indica uma oscilação do líquido sobre o eixo y análoga a um corpo rígido.

Forças e torques. Da integração da distribuição de pressão do líquido nas paredes e fundo do tanque obtém-se a componente x da força exercida no tanque como abaixo:

$$\begin{aligned}
\frac{-F_{x_0}}{m_{liq} \alpha_0 \Omega^2 h} = & \left\{ \frac{1}{12} \left(\frac{a}{h} \right)^2 8 \frac{a}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tanh[(2n-1)\pi h/a]}{(2n-1)^3 \pi^3} \left(\frac{1}{2} - \frac{\tanh[(2n-1)\pi h/2a]}{(2n-1)\pi h/2a} + \right. \right. \\
& \left. \left. \frac{g}{h\omega_n^2} \right) \left(\frac{\Omega^2}{\omega_n^2 - \Omega^2} \right) \right\} \quad (\text{A.35})
\end{aligned}$$

A equação é análoga à equação A.31 indicando que a *força* para uma oscilação *pitching* é a mesma que o *torque* para uma oscilação lateral, quando a amplitude X_0 de translação é trocada por $h\alpha_0$. O torque exercido no tanque é dado por:

$$\begin{aligned}
\frac{M_{y_0}}{-i\Omega^2 \alpha_0 m_{liq} h^3} = & \frac{I_y}{m_{liq} h^2} + 16 \frac{a}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tanh[(2n-1)\pi h/a]}{(2n-1)^3 \pi^3} \frac{g}{h\omega_n^2} \left(\frac{1}{2} + \frac{g}{h\omega_n^2} + \right. \\
& \left. \frac{\tanh[(2n-1)\pi h/2a]}{(2n-1)\pi h/2a} \right) + 8 \frac{a}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tanh[(2n-1)\pi h/a]}{(2n-1)^3 \pi^3} \frac{g}{h\omega_n^2} \left(\frac{1}{2} + \frac{g}{h\omega_n^2} + \right. \\
& \left. \frac{\tanh[(2n-1)\pi h/2a]}{(2n-1)\pi h/2a} \right) \frac{\Omega^2}{\omega_n^2 - \Omega^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{a}{h} \right)^2 \frac{g}{h\Omega^2} \quad (\text{A.36})
\end{aligned}$$

onde o momento de inércia I_y nesta expressão é dado por:

$$I_y = I_{Sy} \left\{ 1 - \frac{4}{1 + (h/a)^2} + \frac{768a/h}{\pi^5 [1 + (h/a)^2]} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tanh[(2n-1)\pi h/2a]}{(2n-1)^5} \right\} \quad (\text{A.37})$$

Aqui I_{Sy} é o momento de inércia em y do líquido congelado sobre o centro de massa do líquido.

A.3. Modelo Mecânico

A conveniência de trocar o líquido por um modelo mecânico equivalente é devida ao fato de que as equações de movimento de massas pontuais oscilatórias e de corpos rígidos serem incluídas mais facilmente na análise do que as equações dinâmicas do fluido.

O líquido que ocupa completamente um contêiner fechado pode ser substituído dinamicamente por um corpo rígido equivalente, porém, se a superfície do líquido é livre para mover-se, o *sloshing* resultante tem uma ou mais frequências naturais, impedindo que o modelo mecânico equivalente seja um corpo rígido. O modelo mecânico pra o *sloshing* deve conter massas livre para oscilar.

A.3.1 Dedução Analítica dos Parâmetros do Modelo

A Figura A.6 ilustra os tipos de modelos mecânicos discutidos neste capítulo. Neste modelo a gravidade g é considerada. Para a forma pendular do modelo a frequência natural é dada por $(g/L)^{0,5}$ e automaticamente se ajusta às mudanças da aceleração axial g exatamente como as frequências naturais do líquido, enquanto que, para o modelo massa-mola, o valor da constante K deve ser alterada sempre que g muda. A massa-mola é colocada na mesma altura da massa do pêndulo, a massa é fixada na parede do tanque através de uma mola com uma constante elástica $K=mg/L$ que fornece a mesma frequência natural do pêndulo.

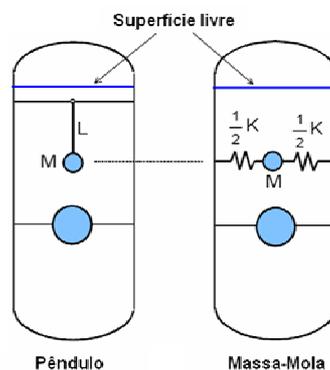


Figura A.9 Modelos mecânicos equivalentes do *sloshing*

Fonte: Adaptada de Dodge (2000).

A.3.2 Equações do movimento para o modelo mecânico

As equações do movimento do modelo são descritas para a forma massa-mola do modelo e o amortecimento será desprezado para que se possa fazer uma comparação direta com as forças e torques de *slosh* obtidos analiticamente.

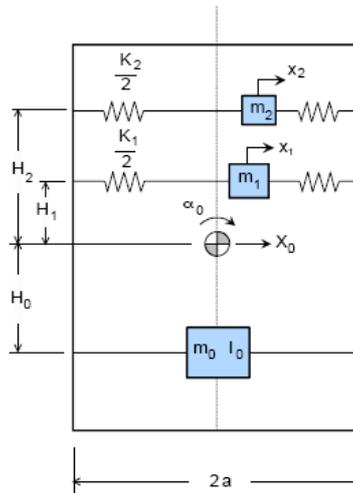


Figura A.10 Esquemático do modelo mecânico equivalente para *sloshing* lateral

Fonte: Adaptada de Dodge (2000).

A Figura A.7 mostra o modelo e os símbolos usados na análise. A dedução das equações do modelo é independente da forma do tanque e do nível do preenchimento. Na Figura, são mostradas apenas duas massas-molas, porém há um conjunto massa-mola para cada modo de *slosh*. Os momentos de inércia das massas das molas são considerados inexistentes. A gravidade g ou uma aceleração equivalente de empuxo age ao longo do eixo do tanque. O tanque é excitado por um pequeno deslocamento linear variante no tempo X_0 e uma rotação angular α_0 em torno de um eixo que passa no centro de massa. As massas-molas deslocam-se uma distância x_n relativa às paredes do tanque como resultado do movimento do tanque.

Propriedades estáticas. Para preservar as propriedades estáticas do líquido, a soma de todas as massas devem ser a mesma da massa do líquido m_{liq} , e o centro de massa do modelo deve estar à mesma altura do centro de massa do líquido. Estas restrições são expressas analiticamente por:

$$m_0 + \sum m_n = m_{liq} \quad (A.38)$$

$$m_0 H_0 + \sum m_n H_n = 0 \quad (A.39)$$

Propriedades dinâmicas. As equações A.38 e A.39 não são suficientes para definir os valores dos parâmetros do modelo. Para fazer isso, o modelo deve também duplicar as forças de *sloshing*, torques, e frequências naturais. A duplicação das frequência naturais requer:

$$K_n / m_n = \omega_n^2 \quad (A.40)$$

onde ω_n é a frequência natural de *slosh* do modo n . Esta é a primeira relação para se determinar K e m . Outras relações baseadas nas forças e torques têm que ser desenvolvidas.

A força resultante exercida no tanque na direção +X0 é dada pela expressão abaixo:

$$-F = m_0(\ddot{x}_0 - H_0\ddot{\alpha}_0) + \sum m_n(\ddot{X}_0 + H_n\ddot{\alpha}_0 + \ddot{x}_n) \quad (A.41a)$$

onde $\sin(\alpha_0)$ foi substituído por α_0 por causa da hipótese de pequena amplitude.

Inserindo-se a equação A.39 na equação A.41a obtem-se:

$$-F = m_0\ddot{X}_0 + \sum m_n(\ddot{X}_0 + \ddot{x}_n) \quad (A.41b)$$

Do mesmo modo, o torque resultante exercido no tanque é dado por:

$$-M = (I_0 + m_0 H_0)\ddot{\alpha}_0 + \sum m_n h_n (H_n \ddot{\alpha}_0 + \ddot{x}_n) - g \sum m_n x_n \quad (A.42)$$

A equação do movimento para cada uma das massas-molas é expressa como:

$$m_n(\ddot{X}_0 + H_n\ddot{\alpha}_0 + \ddot{x}_n) + K_n x_n - m_n g \alpha_0 = 0 \quad (A.43)$$

As acelerações do tanque são consideradas como oscilantes com frequência Ω . As componentes do movimento do tanque são, portanto dadas por $-X_0 \exp(i\Omega t)$ e $-i\alpha_0 \exp(i\Omega t)$, e com a inserção da equação A.40, a equação A.43 pode ser expressa como:

$$x_n = -\frac{i\Omega^2 X_0}{\omega_n^2 - \Omega^2} - \left(\frac{H_n + g/\Omega^2}{\omega_n^2 - \Omega^2} \right) i\Omega^2 \alpha_0 \quad (\text{A.44})$$

Com estas equações, as amplitudes da força e do torque no tanque podem ser expressas analiticamente como:

$$\frac{F_{amp}}{i\Omega^2 m_{liq}} = - \left[1 + \sum \frac{m_n}{m_{liq}} \left(\frac{\Omega^2}{\omega_n^2 - \Omega^2} \right) \right] X_0 - \alpha_0 \sum \frac{m_n}{m_{liq}} \left(\frac{H_n \Omega^2 + g}{\omega_n^2 - \Omega^2} \right) \quad (\text{A.45})$$

$$\begin{aligned} \frac{M_{amp}}{i\Omega^2} = & -\alpha_0 \left[I_0 + m_0 H_0^2 + \sum m_n H_n^2 + m_{liq} \sum \frac{m_n}{m_{liq}} \left(\frac{H_n^2 \Omega^2 + 2H_n g + gh^2/\omega_n^2}{\omega_n^2 - \Omega^2} \right) \right] \\ & - m_{liq} X_0 \sum \frac{m_n}{m_{liq}} \left(\frac{H_n \Omega^2 + g}{\omega_n^2 - \Omega^2} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.46})$$

A.3.3 Tanque retangular

Os parâmetros m_n , K_n , e H_n são determinados como uma função da forma do tanque (retangular, neste caso) e seu nível de preenchimento. São considerados apenas modos de *slosh* bi-dimensional, excitados por uma translação de tanque na direção x ou uma rotação angular em torno do eixo y , como indicado na Figura A.7.

A força lateral do líquido exercida no tanque pelo sloshing para uma excitação horizontal paralela ao eixo x do tipo $X(t) = z\alpha_0 \exp(i\Omega t)$ pode ser representada pela equação:

$$\frac{F_{x_0}}{-i\Omega^2 X_0 m_{liq}} = 1 + 8 \frac{a}{h} \sum_{n=1}^N \frac{\tanh[(2n-1)\pi h/a]}{(2n-1)^3 \pi^3} \frac{\Omega^2}{\omega_n^2 - \Omega^2}$$

Utilizando-se a equação A.45 obtém-se:

$$m_n = m_{liq} \left\{ 8 \frac{a \tanh[(2n-1)\pi h/a]}{h (2n-1)^3 \pi^3} \right\} \quad (\text{A.47})$$

As frequências naturais do *slosh* são dadas pela solução da equação A.19, reproduzida a seguir:

$$\omega_n^2 = \pi(2n-1) \left(\frac{g}{a} \right) \tanh \left[\pi(2n-1) \left(\frac{h}{a} \right) \right]$$

Conseqüentemente, as constantes elásticas do modelo devem ser escolhidas como:

$$K_n = m_{liq} \left\{ 8 \frac{g}{h} \frac{\tanh[(2n-1)\pi h / A]}{(2n-1)^2 \pi^2} \right\} \quad (A.48)$$

A força do *slosh* para uma aceleração rotacional sobre o eixo y do tipo $\alpha_y = -i a_0 \exp(i\Omega t)$ no centro de massa é dado pela equação A.35 reproduzida a seguir:

$$\frac{-F_{x_0}}{m_{liq} \alpha_0 \Omega^2 h} = \left\{ \frac{1}{12} \left(\frac{a}{h} \right)^2 8 \frac{a}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tanh \left[(2n-1) \frac{\pi h}{a} \right]}{(2n-1)^3 \pi^3} \left(\frac{1}{2} - \frac{\tanh \left[(2n-1) \frac{\pi h}{2a} \right]}{(2n-1) \frac{\pi h}{2a}} + \frac{g}{h \omega_n^2} \right) \left(\frac{\Omega^2}{\omega_n^2 - \Omega^2} \right) \right\}$$

que, após ser re-escrita usando as seguintes identidades:

$$\frac{1}{\omega_n^2 - \Omega^2} = 1 + \frac{\Omega^2}{\omega_n^2 - \Omega^2} \quad \text{e} \quad 8 \sum \frac{\tanh[(2n-1)\pi h / a]}{(2n-1)^3 \pi^3} = \frac{a}{12h}$$

e ser comparada com a equação A.45, pode-se ver a duplicação da força causada pela rotação no eixo y dada pelos mesmos valores das massas do modelo conforme equação A.47, e a elevação axial das massas deve ser escolhida tal que:

$$\frac{H_n}{h} = \frac{1}{2} - \frac{a}{2h} \frac{\tanh[(2n-1)\pi h / 2a]}{(2n-1)\pi} \quad (A.49)$$

O torque do *slosh* é dado pela equação A.31 para uma excitação translacional no eixo x , e pelas equações A.36 e A.37 para uma excitação rotacional no eixo y . Comparando estas equações à equação A.46 de torque do modelo (com o auxílio de mais algumas identidades) obtém-se os mesmos requisitos para m_n e H_n que foram encontrados dos requisitos de duplicação de força. Adicionalmente, o momento total de inércia do modelo deve ser escolhido para satisfazer:

$$I_0 + m_0 H_0^2 + \sum m_n H_n^2 = I_{Sy} \left\{ 1 - \frac{4}{1 + \left(\frac{h}{a} \right)^2} + \frac{768a}{h} \frac{1}{1 + \left(\frac{h}{a} \right)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tanh \left[(2n-1) \frac{\pi h}{2a} \right]}{(2n-1)^5 \pi^5} \right\} \quad (A.50)$$

De fato, esta equação determina I_0 uma vez que todos os outros parâmetros do modelo já estão determinados. Em geral, I_0 não é uma grande contribuição para o torque.

Em resumos, as expressões acima mostram que os parâmetros do modelo não dependem da amplitude ou da frequência de uma excitação harmônica simples do tanque. Uma vez que qualquer excitação periódica pode ser representada por uma série de Fourier, portanto, os parâmetros do modelo são completamente gerais e independentes da forma de excitação do tanque. Além disso, a dependência da constante elástica do modelo da gravidade g pode ser eliminada mudando-se para a forma pendular do modelo. Como já mencionado, a transformação é realizada pela localização do ponto de articulação do pêndulo para cada massa de *slosh* m_n e uma elevação $L_n + H_n$, onde $L_n = (g/\omega_n)^{0.5}$ é o comprimento do pêndulo.

APÊNDICE B - COMPORTAMENTO DOS LÍQUIDOS EM MICROGRAVIDADE

Este capítulo apresenta e discute uma abordagem teórica para a dinâmica de *sloshing* em microgravidade (Ibrahim2005).

O efeito do potencial gravitacional regular sobre a massa de um líquido é de estabilização levando seu volume para o fundo do seu contêiner. Quando a força sobre o líquido diminui, seu volume assume qualquer posição dentro de seu contêiner de uma maneira imprevisível. Assim os problemas da dinâmica do *sloshing* do líquido sob microgravidade são diferentes daqueles encontrados sob um campo gravitacional regular. Sob microgravidade as forças de tensão superficial começam predominar em detrimento da força gravitacional. A razão entre a força gravitacional e a força de capilaridade é chamada de número de Bond. Valores muito pequenos do número Bond, indicam que as forças de capilaridade predominam e neste caso a superfície livre do líquido não será plana, mas subirá ao redor das paredes verticais de um contêiner.

O estudo do comportamento do líquido em microgravidade envolve a mecânica e a termodinâmica dos sistemas capilares.

Os assuntos aqui abordados são: a mecânica de uma superfície líquida livre sob microgravidade; a estabilidade da estática e dinâmica da superfície líquida livre; a linha de contato, e ângulo de contato.

B.1.Fundamento Matemático (Cinética e Geometria da Superfície Livre do Líquido)

B.1.1.Tensão Superficial e Número de Bound

É possível detectar, na interface entre um líquido e um gás (ou entre dois líquidos que não se misturam), a existência de forças superficiais. Este fenômeno se deve ao fato de que a superfície do líquido se comporta como uma membrana sobre a massa líquida. Isto ocorre porque as moléculas do líquido na superfície líquida estão sujeitas a uma força de atração mútua (coesivas) para o interior da massa do líquido. Pode-se

considerar que força de atração atua no plano da superfície e ao longo de qualquer linha de superfície. A intensidade da atração molecular por unidade de comprimento ao longo de qualquer linha na superfície é conhecida como tensão superficial σ (Newton/metro). Sob um campo gravitacional baixo, as forças coesivas na superfície se manifestam e os efeitos da tensão superficial devem ser considerados. A pressão ao longo da borda do líquido é diferente da pressão fora do volume do líquido, e esta diferença pode ser determinada como segue: na Figura B.1 considera-se um elemento, Δx , da superfície, tomando a tensão superficial e a inclinação ao lado direito do elemento como σ e $\partial\eta/\partial x$, respectivamente; a tensão superficial e a inclinação ao lado direito do elemento, até a primeira ordem da série de Taylor, como $\sigma + (\partial\sigma/\partial x)\Delta x$ e $\partial\eta/\partial x + (\partial^2\eta/\partial x^2)\Delta x$, respectivamente; e a pressão do gás imediatamente acima da superfície e imediatamente abaixo como P_g e $P(x,t)$, respectivamente, tem-se a soma das forças ao longo da vertical como

$$[P(x,t) - P_g]\Delta x + \left(\sigma + \frac{\partial\sigma}{\partial x}\Delta x\right)\left(\frac{\partial\eta}{\partial x} + \frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}\Delta x\right) - \sigma\frac{\partial\eta}{\partial x} = 0 \quad (\text{B.1})$$

Simplificando e considerando o caso de tensão superficial constante, que é, $\partial\sigma/\partial x = 0$, obtém-se

$$P(x,t) = P_g - \sigma\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} \quad (\text{B.2})$$

Se P_g é constante, a derivada no tempo da equação B.2 pode ser escrita como

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = -\sigma\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\right) = -\sigma\frac{\partial^3\Phi(x,0,t)}{\partial x^2\partial z} \quad (\text{B.3})$$

onde $\partial\eta/\partial t$ foi substituído pelo gradiente da função potencial, $\partial\Phi/\partial z$, para fluxo de potencial.

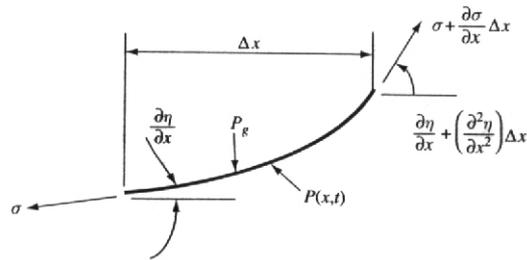


Figura B.1 Forças de superfície agindo em elemento da superfície do líquido.

Fonte: Ibrahim (2005).

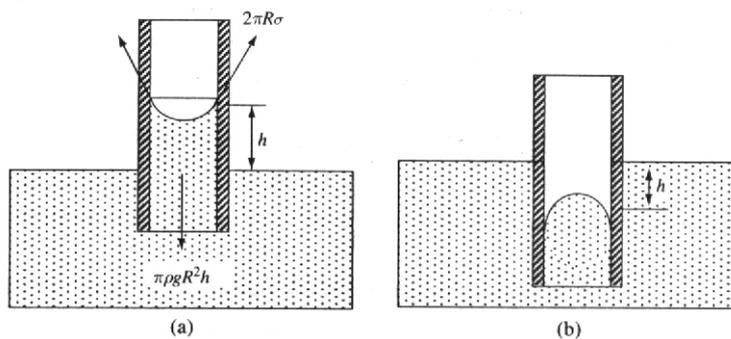


Figura B.2 Efeito da tensão de superfície em tubos capilar: (a) Elevação da coluna para um líquido que molha o tubo. (b) Depressão da coluna para um líquido que não molha a parede do tubo.

Fonte: Ibrahim (2005).

Como consequência da tensão superficial é observada a elevação ou queda de um líquido em um tubo capilar como mostrado na Figura B.2. Para a Figura B.2a um tubo de diâmetro pequeno e aberto é inserido em um líquido; neste caso o nível do líquido no tubo subirá acima do nível do reservatório, porque há uma aderência entre as moléculas da parede do tubo e as moléculas do líquido forte o suficiente para superar a atração mútua (coesão) das moléculas do fluido, fazendo com que o fluido suba no capilar até a altura h . Diz-se então que o líquido molha a superfície sólida (fenômeno de molhamento). Por outro lado, no caso da Figura B.2b, se a aderência entre as moléculas da parede do tubo e as moléculas do líquido for fraca comparada à atração mutua (coesão) das moléculas do fluido, o nível do fluido dentro do capilar ficará abaixo de uma altura h em relação ao nível do reservatório. Nesta condição diz-se que o líquido

não molha a superfície sólida. A tensão superficial é uma propriedade do líquido e depende da temperatura; em geral ela diminui com a temperatura.

Na Figura B.2a, pode-se assumir que a superfície é esférica e, neste caso, a tensão superficial junto à parede tem ângulo zero. Como $P_2 - P_1 = \rho gh$, pode-se estimar a altura h a partir do equilíbrio estático entre os pontos 1 e 2. A força da pressão dada por $\pi R^2 (P_2 - P_1) = \pi R^2 \rho gh$, deve estar em equilíbrio com a força de tensão superficial, $\sigma 2\pi R \cos \theta_s$, onde θ_s é o ângulo de contato estático medido do lado líquido da linha de contato. Deste modo, a altura é obtida da condição de equilíbrio (IBRAHIM, 2005).

$$\sigma 2\pi R \cos \theta_s = \pi R^2 \rho gh \rightarrow \frac{h}{R} = 2 \frac{\sigma}{\rho g R^2} \cos \theta_s = \frac{2 \cos \theta_s}{N_{Bo}} \quad (B.4)$$

onde $N_{Bo} = \rho g R^2 / \sigma$ é referido como número de Bond, que mede a razão entre a força gravitacional e a força de tensão superficial. Para valores de $N_{Bo} \gg 1$, a força gravitacional predomina, e para $N_{Bo} \ll 1$, a força de tensão superficial predomina e a superfície livre do fluido sobe nas paredes do contêiner.

B.1.2 Ângulo de Contato Estático e Dinâmico

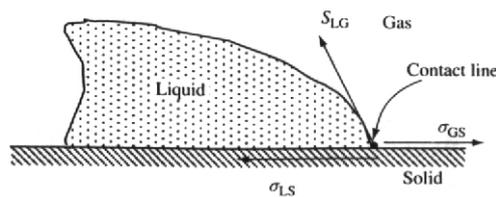


Figura B.3 Tensão de superfície entre gás, líquido e superfície sólida em equilíbrio estático.

Fonte: Ibrahim (2005).

Na Figura (B.3), identificam-se três fronteiras, gás/líquido, líquido/sólido, e sólido/gás, cada uma possuindo uma tensão de superfície, σ_{LG} , σ_{LS} , e σ_{GS} , respectivamente. O equilíbrio estático na horizontal requer

$$\sigma_{LG} \cos \theta_s = \sigma_{GS} - \sigma_{LS} \quad (B.5)$$

Deve-se considerar a existência de uma força de reação no sólido, $-\sigma_{LG} \sin \mathcal{G}_s$, para que a componente vertical das forças de tensão superficial na linha de contato seja balanceada. Porém, sendo o sólido modelado como um corpo rígido, esta condição não pode ser satisfeita. Então, o que restringe esta força para ter somente uma componente vertical? Ibrahim (2005) cita diversos pesquisadores que estudaram o assunto, tais citações, a título de esclarecimento, são reproduzidas abaixo.

Gauss (1829) forneceu uma base teórica rigorosa para a equação B.5 indicando que o ângulo de contato estático é uma propriedade única do material. Entretanto, isto geralmente diverge com observações experimentais.

O ângulo de contato de uma gota líquida sobre uma superfície horizontal plana pode ser medido diretamente em uma fotografia ampliada desenhando-se sobre ela uma linha tangente à interface gás/fluido na linha de contato. Padday (1969) propôs um segundo método indireto utilizando da forma de menisco a medida da altura do ápice da gota e o seu volume. Padday (1971) forneceu um tratamento detalhado da teoria da tensão de superfície incluindo linha de contato e ângulo de contato. Existem diversos outros métodos para determinar o ângulo de contato estático descritos por Dussan (1976, 1979). A mecânica do menisco estático foi estudado por Concus (1968).

Dussan (1979) estudou o comportamento a linha de contato em termos da relação entre o ângulo de contato e o movimento relativo da linha de contato. Ela forneceu uma discussão minuciosa dos ângulos de contato dinâmico e estático para velocidades relativas unidirecionais. Seus resultados foram representativos para experimentos com número de Reynolds pequeno, número de Weber pequeno, e número de Froude pequeno. O trabalho de Dussan essencialmente lidou com fluxo unidirecional. Foi mostrado que o ângulo de contato, \mathcal{G}_c , é uma função da velocidade da linha de contato somente, isto é, $\mathcal{G}_c = f(U)$ como mostra a Figura B.4, onde \mathcal{G}_R representa o ângulo de retrocesso quando $U \rightarrow 0^-$ e o ponto de contato move para o líquido, e \mathcal{G}_a representa o ângulo de avanço definido quando $U \rightarrow 0^+$ e o ponto de contato move-se para longe do líquido. Existe uma velocidade crítica, $U_c > 0$, abaixo da qual pode ocorrer uma transição e o movimento da linha de contato aparenta ser instável e espasmático (referido como “stick-slip” (adere-desliza)). A Figura B.4 mostra dois pontos específicos localizados exatamente em $U = 0$, indicados por \mathcal{G}_a e \mathcal{G}_R . Estes ângulos foram experimentalmente observados por Elliott e Riddiford (1967) quando mantendo a linha de contato inicialmente estática e permitindo que o ângulo de contato variasse até que fosse observado movimento da linha de contato. Obviamente, existe um intervalo $[\mathcal{G}_R, \mathcal{G}_a]$ para o qual a linha de contato não parece mover-se, uma situação similar aos coeficientes estático e dinâmico de fricção. Esta não singularidade no ângulo de contato estático é muitas vezes referida como histerese de ângulo de contato. A condição de contorno da linha de contato é não linear devido à ocorrência da histerese, para movimento estável unidirecional de número de Reynolds baixo (Perlin e Schultz, 1996, 2000). A Figura B.4 revela uma característica similar à dependência do coeficiente de fricção em relação à velocidade de deslizamento relativa, conhecida como inclusões diferenciais (differential inclusions). Inclusões diferenciais podem ser consideradas como equações diferenciais que consistem de termos valor ajustado (set-valued) ou valores múltiplos (multi-valued). Conseqüentemente, a existência e unicidade de soluções não são garantidas, exceto em poucos casos (Filippov, 1964 and Dupont, 1992).

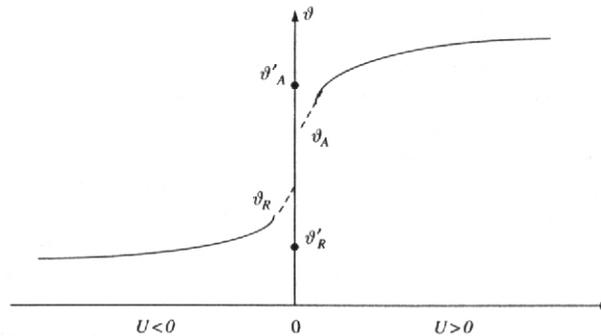


Figura B.4 Dependência do ângulo de contato θ na velocidade da linha de contato.

Fonte: Ibrahim (2005).

A presença de líquidos inerentes a viscosidade cria algumas dificuldades na solução do campo de fluxo do fluido mesmo com uma linha de contato em movimento (uni-direcional). Dussan e Davis (1974) mostraram que uma singularidade de tensão (stress) não integrável ocorre na linha de contato se um movimento da linha de contato é forçado a obedecer a condição de contorno de não deslizamento. Um modelo, que evita a singularidade permitindo que o ponto de contato mova-se ao longo da superfície sólida, foi proposto por Navier. Ele postulou que a tensão resistente em uma superfície sólida fixa é proporcional à velocidade relativa ou $\beta_0 V = \mu \partial V / \partial n$, onde β_0 é uma constante, V é a velocidade paralela à superfície sólida fixa, n é a normal à superfície sólida, e μ é a viscosidade dinâmica do líquido. Goldstein (1938) forneceu uma descrição sistemática a esta condição de contorno.

As condições de contorno para a oscilação da linha de contato para número de Reynolds alto foram examinadas experimentalmente em uma placa oscilando verticalmente por Ting e Perlin (1995). Contornos da linha de contato oscilantes são importantes na ondulação e outras interações de fluxo com um contorno sólido. Benjamin e Scott (1979) e Graham-Eagle (1983, 1984) investigaram a propagação de ondas em um canal aberto estreito com condições de extremidade pinned-end (posição de linha de contato fixa). Hocking (1987a) demonstrou a importância dos efeitos da tensão de superfície em uma linha de contato e mostrou que o amortecimento das ondas capilares gravitacionais em um contorno rígido é originalmente devido aos efeitos capilares. Diversos outros estudos demonstraram a importância dos efeitos capilares no movimento e amortecimento de onda (ver Miles, 1967, 1990b, 1991a, 1992, Joo, et al., 1990, Hocking e Mahdmina, 1991, e Cocciaro, et al., 1991, 1993). O efeito da taxa de fluxo no ângulo de contato dinâmico foi estudado por Coney e Masica (1969).

Baseado na relação das linhas de contato unidirecionais dada por Dussan (1979), Young e Davis (1987) propuseram quatro relações possíveis entre ângulo de contato e velocidade de linha de contato para um contorno de linha de contato oscilante. Estas relações tratam de: (a) histerese do ângulo de contato; (b) linha de contato fixa; (c) ângulo de contato fixo; e (d) variação de ângulo de contato suave (sem histerese de ângulo de contato). Usando estas relações e um balanço de forças na linha de contato, ele apresentou uma solução para a linha de contato oscilante no limite do escoamento lento (creeping-flow). Ele considerou um movimento pequeno da placa tal que o efeito inercial fosse pequeno. Conseqüentemente, o comportamento da linha de contato é governado por uma relação similar à de Dussan (1979). Eles descobriram que a histerese do ângulo de contato e o escarpamento (steepening) do ângulo de contato com o aumento da velocidade da linha de contato resultaram em efeitos dissipativos. Eles também descobriram que o movimento da linha de contato tende a ficar para trás do movimento da placa devido aos efeitos da inércia.

Hocking (1990a) usou uma condição de contorno de linha de contato oscilante para calcular as ondas geradas por uma placa vertical oscilando verticalmente. Ele incluiu os efeitos capilares à linha de contato. Miles (1990b) considerou o efeito da viscosidade e um menisco de superfície livre inicial não zero. Uma extensão de deslizamento, l_s , foi adotada para substituir a condição de contorno de não deslizamento ao longo de toda a placa. Baseado em uma hipótese fenomenológica, ele introduziu a condição de contorno de deslizamento (equivalente ao modelo de deslizamento de Navier com $l_s = \mu / \beta_0$)

$$V - V_{\text{solido}} = l_s \frac{\partial V}{\partial n} \quad (\text{B.6})$$

onde V é a velocidade vertical ao longo da placa ($\partial n / \partial t$ na linha de contato). Miles assumiu l_s ser função da posição ao longo da superfície da placa, que desaparece a uma distância dada pela escala do alcance viscoso, $l_v = \sqrt{2\nu / \omega}$, longe da linha de contato, onde ω é a frequência de oscilação da linha de contato. Isto significa que obedece a condição de contorno de não deslizamento em alguma distância, l_s , longe da linha de contato. Conforme Miles (1990b) o comprimento do deslizamento não é constante no caso oscilatório. Ting e Perlin (1995) mostraram que a condição de contorno no contorno oscilatório (junção tríade) não é bem definida. Contudo, eles forneceram algumas descrições qualitativas pertinentes às mudanças de movimento da linha de contato como à amplitude das mudanças da placa. Hocking (1987a) e Henderson and Miles (1990) indicaram que um crescimento da magnitude da viscosidade de até três vezes é requerido para igualar os resultados numéricos com as dissipações medidas. Perlin e Schultz (1996) propuseram que a chamada “viscosidade efetiva” é o resultado da dissipação gerada na linha de contato.

Sob gravidade baixa, o menisco terá grande curvatura e algumas condições devem ser aplicadas para inclinação da interface na parede do tanque. As três possibilidades para a inclinação da superfície na parede do tanque são:

- a inclinação mantém-se constante, para qual a histerese do ângulo de contato dinâmico está ausente (condição de contorno livre);
- o contorno da interface mantém-se fixa (condição de contorno aderente); e
- alguma condição intermediária prevalece.

Os três cenários foram considerados por Reynolds e Satterlee (Capítulo 11 em Abramson, 1996a). Foi assumido que o ângulo de contato medido no líquido com uma superfície calma (sem distúrbios) é zero, o que é típico de diversos sistemas líquido-tanque. Contudo, é possível que o ângulo na qual a onda em movimento encontra a parede não seja o mesmo que o ângulo de contato estático, isto é, histerese.

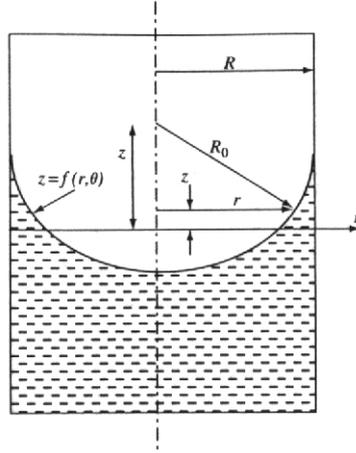


Figura B.5 Configuração do vaso especial de forma esférica da superfície líquida livre não perturbada em um tanque cilíndrico.
Fonte: Ibrahim (2005).

A força mais importante é a força da capilaridade normalmente obtida em termos do número de Bond. As características das ondas de capilaridade foram examinadas por Siegel (1961), Siegert et al. (1964, 1965), Habip (1965), Koval (1968), e Koval e Bhutta(1968). A teoria das ondas de superfície de capilaridade é bem documentada por Finn (1974, 1978, 1979, 1986, 1999) e Myshkis, et al. (1987). Para um menisco com simetria axial, a curvatura κ é dada pela seguinte expressão, (Chu, 1964c e Satterlee e Reynolds, 1964),

$$\kappa = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r f_r}{\sqrt{1 + f_r^2 + (1/r^2) f_\theta^2}} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{f_\theta}{\sqrt{1 + f_r^2 + (1/r^2) f_\theta^2}} \right) \quad (\text{B.7})$$

onde um subscrito indica diferenciação referente a uma variável subscrita, e $z = f(r, \theta)$ é a altura da superfície livre não perturbada do menisco, ver Figura B.5. A curvatura κ tem um importante papel na estabilização da condição de contorno da superfície livre. Assumindo líquido não viscoso, a pressão normal associada através da superfície livre experimenta descontinuidade para uma quantidade proporcional ao produto da tensão interfacial e a curvatura de superfície média é dada pela equação B.1 que é,

$$P_g - P = \sigma \kappa \quad (\text{B.8})$$

Jahsman (1961) definiu a forma de equilíbrio da superfície líquida livre em tanque cilíndrico. Fung (1965), e Hasting e Toole (1968) estudaram a resposta dinâmica da superfície líquida experimentando um repentino campo sem peso. Christiansen, et al. (1992) estudou o três estados das ondas capilares: ondas quasicristais, hexagonais, e radiais. Veldman e Vogels (1984) e Utsumi (1988, 1989, 1997, 1998) consideraram diferentes casos de *sloshing* de líquido em contêineres axissimétricos em um campo gravitacional baixo. A forma da superfície do líquido para número de Bond baixo foi numericamente determinada por Wohlen, et al. (1975). As características da restrição (constraint) de contorno das ondas capilares foram examinadas por Benjamin e Scott (1979). Utsumi e Kondo (1987) determinaram a configuração estática de uma superfície líquida em um contêiner esférico. Eles derivaram a equação diferencial que governa o equilíbrio da superfície líquida usando o princípio do trabalho virtual em vez de usar uma equação de Young-Laplace.

Chão, et al. (1992) estudou numericamente os efeitos do g-jitter lateral na deformação da superfície livre usando um esquema diferença finita. Assumiu-se que a influência da histerese poderia ser representada pela relação

$$\left. \frac{\partial \eta}{\partial r} \right|_{r=R} = C_{1\eta} \quad (\text{B.9})$$

Se C_1 é uma constante então a equação B.9 não representa o amortecimento ou a dissipação de energia causada pela histerese. Em vez disso introduzindo uma relação funcional arbitrária, a histerese será desprezada na análise, e assume-se que a linha de contato desliza-se facilmente pelas paredes do tanque (a condição de contorno livre). Em outras palavras $\left. \frac{\partial \eta}{\partial r} \right|_{r=R} = 0$, e neste

caso o ângulo de contato \mathcal{G}_c é definido pela expressão

$$\cot \mathcal{G}_c = \left. \frac{\partial \zeta}{\partial r} \right/ \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \zeta}{r \partial \mathcal{G}} \right)^2} \Big|_{r=R} \quad (\text{B.10})$$

Isto significa que o equilíbrio estático da forma da superfície livre poderia ser definido a priori. Para número de Bond muito pequeno, a interface de equilíbrio pode ser assumida como esférica (Satterlee e Chin, 1965) e pode ser expressa pela função de forma $f(r) = R - \sqrt{R^2 - r^2}$ para $\text{Bo} \ll 1$. Como Bo aumenta, a interface começa a achatarse e uma forma modificada foi sugerida por Satterlee e Chin (1995) para valores de número de Bond na faixa de $10 \ll \text{Bo} \ll 100$. Novos estudos sobre a natureza do ângulo de contato foram feitos por Ngan e Dussan (1982).

A vibração dos meniscos em rotação foi estudada por Chun, Ehmann, et al. (1987). Bauer e Eidel (1989c) descobriram que oscilações de pequenas amplitudes no líquido têm uma influência acentuada, para líquidos com pequenos ângulos de contato, na dinâmica dos contêineres. Dodge, et al. (1991) estudou analiticamente o *sloshing* em baixa gravidade e pequena amplitude em contêineres com simetria axial. Hung, Lee, e Leslie (1991a,b,c) mostraram que o reassentamento do líquido pode ser alcançado pela rotação do tanque. A configuração de menisco estático e a estabilidade de uma superfície livre em tanques de propelentes sob gravidade reduzida e gravidade zero foi estudada por Siekman, et al. (1981), Slobozhanin, et al. (1999a,b e Slobozhanin e Alexander (2000).

B.1.3. Cinemática da Superfície Esférica

Pode-se determinar analiticamente a forma da superfície livre para tanques de geometria simples. Em tanques cuja parede é uma concha de revolução, a forma da superfície livre é esférica. A forma da superfície livre é determinada pela geometria do tanque, o volume do fluido, e o ângulo de contato entre a parede e a superfície. Ibrahim (2005) cita que Chin e Gallagher (1964) e Babenko e Yurev (1980) analisaram a forma da superfície de um líquido capilar em um contêiner cilíndrico de seção transversal arbitrária. Cita ainda que Bauer e Eidel (1990) assumiram que superfície livre em um contêiner cilíndrico de raio R é esférica, se o sistema de coordenadas estiver colocado

em $z = h$, onde h é a altura do líquido. Na Figura B.5, a forma da superfície do líquido não perturbada pode ser escrita na forma

$$r^2 + (Z - z)^2 = R_0^2, \quad z = Z \pm \sqrt{R_0^2 - r^2}, \quad (\text{B.11})$$

o que requer uma condição de volume constante da por

$$\pi R^2 h = \int_{-h}^z \int_0^{2\pi R} \int_0^R r dr d\theta dz = \pi R^2 h + 2\pi \int_0^R r z(r) dr. \quad (\text{B.12})$$

Substituindo a equação B.11 na equação B.12 e integrando tem-se

$$Z = \frac{2}{3R^2} [R_0^2 - (R_0^2 - R^2)^{3/2}], \quad (\text{B.13})$$

sendo $R_0 = R / \cos \vartheta_c$, e substituindo a equação B.13 em B.11 obtém-se

$$r^2 + \left[z - \frac{2R}{3\cos^3 \vartheta_c} (1 - \sin^3 \vartheta_c) \right]^2 = \frac{R^2}{\cos^2 \vartheta_c} = R_0^2, \quad (\text{B.14})$$

que é uma superfície descrita por

$$z_0 = f_0(r) = \frac{R}{\cos \vartheta_c} \left[\frac{2(1 - \sin^3 \vartheta_c)}{3\cos^2 \vartheta_c} - \sqrt{1 - (r \cos \vartheta_c / R)^2} \right], \quad (\text{B.15})$$

Pode-se mostrar que se $\vartheta_c = \pi/2$, então o lado direito da equação B.15 desaparece. Da equação B.15, z_0 para $r = 0$ é

$$z_0 = f_0(0) = \frac{R}{\cos \vartheta_c} \left[\frac{2(1 - \sin^3 \vartheta_c)}{3\cos^2 \vartheta_c} - 1 \right] \quad (\text{B.16})$$

Para $r = R$, é

$$z_0 = f_0(R) = \frac{R}{3\cos^3 \vartheta_c} (2 - 2\sin^3 \vartheta_c - 3\cos^3 \vartheta_c \sin \vartheta_c) \quad (\text{B.17})$$

Em um contêiner cilíndrico a mudança de superfície em microgravidade pode ser descontínua ou “quase descontínua”, o que provoca grandes deslocamentos da massa líquida resultante de pequenas variações no ângulo de contato. Em seu livro, Ibrahim

(2005) cita que a altura de uma superfície capilar foi determinada por Concus e Finn (1976) ele escreve:

Concus e Finn (1974a, b, 1987, 1990a, b, 1991b, 1992) e Finn (1983, 1984) desenvolveram alguns estudos analíticos para lidar com projeto de seções transversais de contêiner. Para seções transversais cilíndricas em particular, um tipo descontínuo de mudança pode ser realizado quando o ângulo de contato cruza um valor crítico. Acima deste valor crítico, existe uma configuração de equilíbrio do líquido que cobre a base do contêiner cilíndrico. Para ângulos de contato menores que o valor crítico, tal configuração de equilíbrio não pode existir. Concus e Finn (1974a, b, 1990a, 1991b) estudaram o comportamento da interface para uma seção near-rhombus (forma quase de losango) onde o comportamento pode ser quase descontínuo.

Concus, et al. (1999) apresentou resultados experimentais com ICE (Interface Configuration Experiment) realizados a bordo do Space Shuttle e da Estação Espacial Mir. Os contêineres “exóticos” utilizados são rotacionamente simétricos e têm a propriedade de que para um dado ângulo de contato e volume de líquido, pode aparecer um contínuo (continuum) de distintas configurações de equilíbrio rotacionalmente simétrico, todas com a mesma energia mecânica. Estas configurações de equilíbrio simétricas são instáveis, e deformações que não são rotacionalmente simétricas podem ser mostradas matematicamente para definir configurações com o mais baixo nível de energia. Foi mostrado experimentalmente que configurações estáveis localmente distintas poderiam se formar e com diferentes características dinâmicas, confirmando os resultados analíticos e numéricos. Verificou-se que este fenômeno de energia local assimétrica pode ocorrer se as condições para um recipiente exótico não forem totalmente cumpridas. Outras atividades de pesquisa recentes têm incluído a mecânica da linha de contato e as condições de contorno associadas. A linha de contato é a interseção de dois fluidos distintos com um sólido.

B.2. Análise Modal

A influência da tensão superficial deve estar incluída nas equações de campo de fluido sob microgravidade. Ibrahim (2005) considera um contêiner cilíndrico circular vertical parcialmente preenchido com um fluido não viscoso, define S como sendo a interface da superfície livre não perturbada, que faz um ângulo de contato \mathcal{G}_c , e S' como a superfície perturbada. Assim, para um fluxo incompressível e não rotacional a equação de continuidade é

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad (\text{B.18})$$

onde Φ é a função potencial de velocidade. A solução desta equação deve satisfazer as condições de contorno. Desprezando-se a velocidade normal à parede do tanque e ao fundo, isto é,

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right|_{r=R} = 0, \quad \left. \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right|_{z=-h} = 0 \quad (\text{B.19a,b})$$

Na superfície perturbada, a equação de Bernoulli instável pode ser escrita na forma

$$\frac{P}{\rho} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{r \partial \theta} \right)^2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] + g \eta(r, \theta, t) + \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \psi(t) \quad (\text{B.20})$$

onde P é a pressão exercida apenas no interior da interface, ρ é a densidade do fluido, e $\eta(r, \theta, t) = \eta_0(r) + \tilde{\eta}(r, \theta, t)$ é a elevação da superfície livre do fluido total que consiste na soma da componente sem distúrbio, $\eta_0(r)$, mais o deslocamento do distúrbio, $\tilde{\eta}(r, \theta, t)$, e $\psi(t)$ é uma função arbitrária do tempo. A pressão P está relacionada apenas à pressão externa da superfície, P_g , através da equação B.8, que é dada em termos da curvatura da superfície, equação B.7.

A cinemática da condição de contorno da superfície livre é dada por

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{\partial \eta}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \frac{\partial \eta}{\partial \theta} \quad (\text{B.21})$$

Conforme Ibrahim (2005) a função arbitrária, $\psi(t)$, pode ser substituída pela pressão do líquido em equilíbrio dividida pela densidade, P_0 / ρ , no vértice da superfície livre em equilíbrio. Através do uso do equilíbrio da pressão da superfície, $P_g - P = \sigma \kappa$, pode-se escrever a equação B.20 na forma

$$\frac{P_g - P_0}{\rho} - \frac{\sigma}{\rho} \kappa + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{r \partial \theta} \right)^2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] + g \eta(r, \theta, t) + \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \quad (\text{B.22})$$

A solução da equação B.18 permite fazer uma análise modal linear da superfície livre do fluido sujeita às condições de contorno linearizadas. Sendo a função potencial da velocidade da ordem de ε , onde ε é um parâmetro pequeno, a elevação da superfície livre pode ser expressa na forma

$$\eta(r, \theta, t) = \eta_0(r) + \varepsilon \tilde{\eta}(r, \theta, t) \quad (\text{B.23})$$

Ibrahim (2005) cita “Satterlee e Reynolds (1964) expressaram a função potencial de velocidade e suas derivadas na superfície livre perturbada em uma expansão da série de Taylor sobre seus valores no menisco não perturbado”. Isto permite uma única condição de contorno para transformar S' em S . A condição de contorno da superfície livre dinâmica adquire a forma

$$\frac{\sigma}{\rho} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{r \tilde{\eta}_r}{\sqrt{1 + \eta_{0r}^2}} \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{\tilde{\eta}_\theta}{\sqrt{1 + \eta_{0r}^2}} \right] \right\} + g \tilde{\eta} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \quad (\text{B.24})$$

A cinemática linearizada do contorno da superfície livre é

$$\frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{\partial \eta_0}{\partial r} \quad (\text{B.25})$$

Ibrahim (2005) assume também que a perturbação na inclinação $\partial \tilde{\eta} / \partial r$ na linha de contato é dada por, para ordem de ε ,

$$\left. \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial r} \right|_{r=R} = \gamma \tilde{\eta} \quad (\text{B.26})$$

onde γ é um parâmetro que é responsável pelos efeitos da histerese do ângulo de contato. Para expressar as equações do campo fluido em termos de parâmetros não dimensionais que inclui o número de Bond, Ibrahim (2005) introduz os seguintes parâmetros

$$\mathfrak{R} = r/R, \quad Z = z/R, \quad f = \eta_0/R, \quad \phi(\mathfrak{R}, \theta, Z) \text{sen} \omega t = \frac{\Phi(r, \theta, z, t)}{\sqrt{gR^3}},$$

$$N_{\text{Bo}} = \frac{\rho g R^2}{\sigma} H(\mathfrak{R}, \theta) \cos \omega t = \frac{\tilde{\eta}}{\sqrt{Rg/\omega^2}}, \quad \varpi = \frac{\sigma R^3 \omega^2}{\sigma}, \quad \Gamma = R\gamma, \quad L = h/R \quad (\text{B.27})$$

A dinâmica da superfície livre e as condições de contorno cinético são, respectivamente,

$$\frac{1}{\mathfrak{R}} \frac{\partial}{\partial \mathfrak{R}} \left[\frac{\mathfrak{R} H_{\mathfrak{R}}}{\sqrt{1 + f_{\mathfrak{R}}^2}} \right] + \frac{1}{\mathfrak{R}^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{H_\theta}{\sqrt{1 + f_{\mathfrak{R}}^2}} \right] + (N_{\text{Bo}}) H + \varpi^2 \phi = 0 \quad (\text{B.28})$$

$$H = \frac{\partial \phi}{\partial Z} - \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{R}} \frac{\partial \phi}{\partial \mathfrak{R}} \quad (\text{B.29})$$

A condição do ângulo de contato é

$$\left. \frac{\partial H}{\partial \mathfrak{R}} \right|_{\mathfrak{R}=1} = \Gamma H \quad (\text{B.30})$$

Baseado na suposição que a forma de menisco, f , é plana, isto é, $H = \partial\phi/\partial Z$, a solução da equação de Laplace, $\nabla^2\phi = 0$, pode ser escrita na forma

$$\phi(\mathfrak{R}, \theta, Z) = J_m(\xi_{mn} \mathfrak{R}) \cosh[\xi_{mn}(L+z)] \quad (\text{B.31})$$

onde ξ_{mn} , são as raízes de $J'_m(\xi_{mn}) = 0$. Tendo em vista a condição cinemática, $H = \partial\phi/\partial Z$, e $f_{\mathfrak{R}}^2 = 0$, a equação B.28 toma a forma

$$\frac{1}{\mathfrak{R}} \frac{\partial}{\partial \mathfrak{R}} (\mathfrak{R} \phi_{Z\mathfrak{R}}) + \frac{1}{\mathfrak{R}^2} \phi_{Z\theta\theta} + (N_{Bo}) \phi_Z + \varpi^2 \phi = 0 \quad (\text{B.32})$$

Substituindo a equação B.31 em B.32 obtém-se a frequência natural da superfície livre

$$\varpi_{mn}^2 = \rho R^3 \omega_{mn}^2 / \sigma = [m^2 \xi_{mn}^2 + (N_{Bo}) \xi_{mn}] \tanh(\xi_{mn} L) \quad (\text{B.33})$$

Esta solução é baseada na suposição que o ângulo de contato não muda e $\Gamma = 0$.

O sloshing lateral nos tanques cilíndricos com fundos esféricos foi estudado por Concus, et al. (1967). Barnyak (1971a, b) e Labus (1969) empregaram métodos aproximados para determinar as frequências naturais de um líquido ideal sob um fraco campo gravitacional. Bauer (1987c, 1991b) e Bauer e Kamerer (1992,1993) determinaram as frequências naturais de camadas de líquido girando e não.

B.3. Modelo Mecânico

O modelo proposto por Dodge e Garza (1967) para microgravidade é mostrado na Figura B.7 e é similar ao modelo para alta gravidade. Deve ser incluído um oscilador massa-mola para cada um dos modos do slosh. Os parâmetros do modelo (m_0, m_n, h_0, h_n, k_n) são calculados para igualarem-se às forças e momentos reais com as forças e momentos causados pelo modelo para uma mesma excitação.

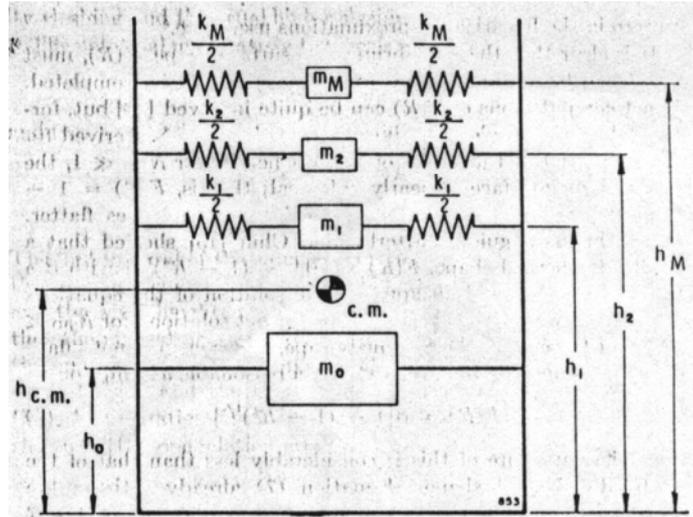


Figura B.6 Esquemático do modelo mecânico equivalente

Fonte: Adaptada de Dodge (1967).

A Figura B.7 mostra a força da tensão de superfície que age nas paredes do tanque ao longo de um elemento ds da linha de contato. $F_T = TR_0 d\theta$ é a força linearizada no plano da parede (para um ângulo de contato de 0 grau) e, parte dela agindo na direção de crescimento de θ , é $F_{T,\theta} = F_T (\partial\eta / \partial\theta)$. F_I pode ser escrita como

$$F_I = \int_0^{2\pi} -\frac{\partial\eta(r=R_0)}{\partial\theta} T \sin\theta d\theta = \left(\frac{1}{N_{B0}}\right) \pi \rho R_0^3 x_0 \omega^2 \sin\omega t \sum_{n=1}^M \frac{H_n \frac{g}{R_0}}{\omega^2 - \Omega_n^2 \frac{g}{R_0}} \quad (\text{B.49})$$

onde $H_n = \sum_{m=1}^M Q_{nm} J_1(\lambda_m)$ é a altura da onda adimensional na parede para o modo n .

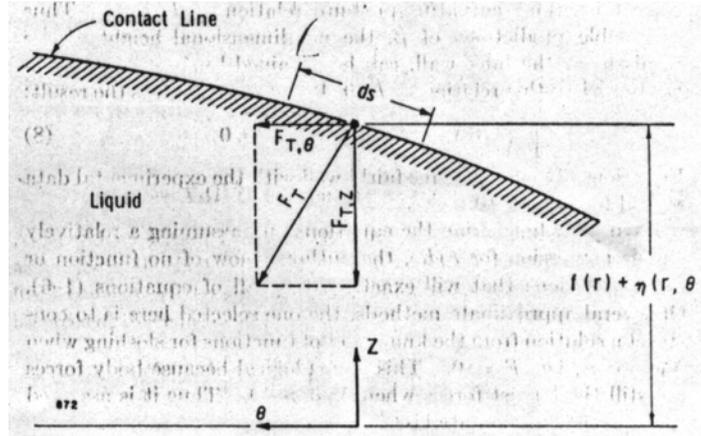


Figura B.7 Força de tensão de superfície na linha de contato líquido-tanque.

Fonte: Adaptada de Dodge (1967).

Com o auxílio de Φ pode-se calcular a parte da força no tanque atribuída diretamente ao movimento do líquido, se for adicionado a ele um potencial de velocidade para partículas movendo-se com o tanque, $\Phi' = X_0 \Omega R \cos \theta \cos \Omega r$. Esta parte da força é dada por

$$F_2 = \rho g R_0^2 \int_0^{2\pi} \int_{\frac{h}{R_0}}^{\beta + \varepsilon_0} - \left(\frac{\partial \Phi(R=1)}{\partial r} - X_0 \Omega^2 \cos \theta \sin \Omega r + Z \right) \cos \theta dZ d\theta \quad (\text{B.50})$$

onde $\varepsilon_0 = \varepsilon(R=1, \theta, r)$. O último termo na integral, a parte igual a Z , pode ser desprezada para números de Bond muito grandes e, em tais casos, o limite superior na integração de Z é zero. Entretanto, após a linearização há uma parte não desprezível:

$$\int_0^{2\pi} \int_{\frac{h}{R_0}}^{\beta + \varepsilon_0} Z \cos \theta dZ d\theta = \beta \int_0^{2\pi} \varepsilon_0 \cos \theta d\theta = \pi \beta X_0 \Omega^2 \sin \Omega r \sum_{n=1}^M \frac{H_n}{\Omega^2 - \Omega_n^2} \quad (\text{B.51})$$

Assim, a força F_2 passa a ser

$$F_2 = \pi \rho R_0^3 x_0 \omega^2 \sin \omega t \left(\beta + \frac{h}{R_0} - \beta \sum_{n=1}^M \frac{H_n \frac{g}{R_0}}{\omega^2 - \Omega_n^2 \frac{g}{R_0}} + \omega^2 \sum_{n=1}^M \frac{I_n}{\omega^2 - \Omega_n^2 \frac{g}{R_0}} \right) \quad (\text{B.52})$$

onde $I_n = \sum_{m=1}^M \frac{P_{nm}}{\lambda_m} J_1(\lambda_m) e^{\lambda_m \beta}$.

Combinando F_1 e F_2 e rearranjando diversos termos, a força lateral total no tanque será

$$F_L = \pi \rho R_0^3 x_0 \omega^2 \operatorname{sen} \omega t \left\{ \frac{h}{R_0} + \left[\beta + \left(\beta - \frac{1}{N_{B0}} \right) \sum_{n=1}^M \frac{H_n}{\Omega_n^2} \right] + \omega^2 \sum_{n=1}^M \frac{I_n - \left(\beta - \frac{1}{N_{B0}} \right) \frac{H_n}{\Omega_n^2}}{\omega^2 - \Omega_n^2 \frac{g}{R_0}} \right\} \quad (\text{B.53})$$

Calculando-se a força lateral nas paredes do tanque exercida pelo sistema massa-mola do modelo mecânico, encontra-se

$$F_{\text{modelo}} = x_0 \omega^2 \operatorname{sen} \omega t \left(m_0 + \sum_{n=1}^M m_n - \omega^2 \sum_{n=1}^M \frac{m_n}{\omega^2 - \frac{k_n}{m_n}} \right) \quad (\text{B.54})$$

Comparando-se as equações B.53 e B.54 observa-se que o modelo mecânico fornecerá forças equivalente ao *sloshing* se

$$m_n = - \left[I_n - \left(\beta - \frac{1}{N_{B0}} \right) \frac{H_n}{\Omega_n^2} \right] \quad (\text{B.55})$$

$$\frac{k_n}{m_n} = \Omega_n^2 (g / R_0) \quad (\text{B.56})$$

e

$$m_0 + \sum_{n=1}^M m_n = \pi \rho R_0^3 \left[\frac{h}{R_0} + \beta + \left(\beta - \frac{1}{N_{B0}} \right) \sum_{n=1}^M \frac{H_n}{\Omega_n^2} \right] \quad (\text{B.57})$$

Pode-se mostrar através de cálculos numéricos que $\pi \rho R_0^3 \left[\frac{h}{R_0} + \beta + \left(\beta - \frac{1}{N_{B0}} \right) \sum_{n=1}^M \frac{H_n}{\Omega_n^2} \right]$ é

sempre próximo da massa total do líquido, dada por $m_T = \pi \rho R_0^3 (h / R_0 + 0,264 \beta)$; como $M \rightarrow \infty$, Dodge e Garza (1967) afirmam ser razoável assumir que ela será exatamente

igual a massa do líquido. Assumindo então que o termo é igual a mT , a equação B.57 mostra que

$$m_0 + \sum_{n=1}^M m_n = m_T = \pi \rho R_0^3 (h/R_0 + 0,264\beta) \quad (B.58)$$

De acordo com estas equações, pode-se calcular m_n e k_n para cada um dos enésimos modos de *sloshing* e onda de superfície. A Figura B.8 mostra a massa do *sloshing* fundamental m_1 e a constante elástica fundamental k_1 , em função do número de Bond.

Em todos os casos, a quantidade de líquido que participa no movimento de *sloshing* é menor que para $N_{Bo} = \infty$. De fato, para $N_{Bo} = 10$, a massa de *sloshing* é cerca de 10% menor do que para o caso de gravidade alta. Para o segundo modo e os modos mais altos, quantidade de líquido que participa no movimento de *sloshing* é muito pequena.

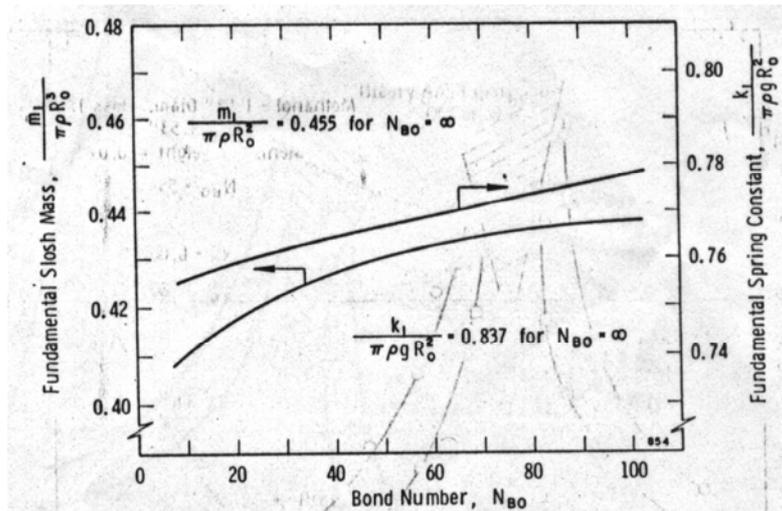


Figura B.8 Massa e constante elástica do *slosh* fundamental

Fonte: Adaptada de Dodge (1967).

Ao realizarem o mesmo tipo de comparação entre o momento do *sloshing* no tanque e o momento do modelo, Dodge e Garza (1967) obtêm os mesmos valores para m_0 , m_n , e k_n , e, adicionalmente, isto requer que

$$h_n = R_0 \left\{ \frac{h}{R_0} - \frac{1}{\Omega_n^2} - \frac{\pi \rho R_0^2}{m_n} \left[\sum_{m=1}^M \left(\beta - \frac{1}{\lambda_m} \right) \frac{P_{nm} J_1(\lambda_m)}{\lambda_m} e^{\lambda_m \beta} - \beta \left(\beta - \frac{1}{N_{Bo}} \right) \frac{H_n}{\Omega_n^2} \right] \right\} \quad (B.59)$$

e

$$h_0 = \frac{1}{m_0} \left(m_T h_{c.m.} \sum_{n=1}^M m_n h_n \right) \quad (\text{B.60})$$

onde a coordenada do centro de massa acima do fundo do tanque é

$$h_{c.m.} = R_0 \left[\frac{\frac{h}{R_0} + 0,528\beta + 0,128\beta^2 \frac{R_0}{h}}{2 \left(1 + 0,264\beta \frac{R_0}{h} \right)} \right] \quad (\text{B.61})$$

Novamente, é observado que h_n depende somente do modo n do *sloshing*. Além disso, para $N_{B0}=\infty$, quando $\Omega_n^2=\lambda_n$ e $P_{nm} = 0$ para $n \neq m$, a equação B.59 reduz-se a $h_n = h - (2R_0/\lambda_n)$. De qualquer modo, a linha de ação do massa-mola é ligeiramente próxima ao fundo do tanque quando $N_{B0}=\infty$.