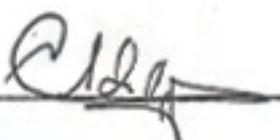


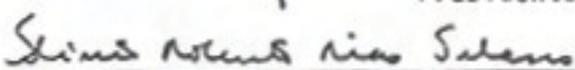
Aprovada pela Banca Examinadora
em cumprimento a requisito exigido
para a obtenção do Título de Mestre
em Computação Aplicada

Dr. Celso de Renna e Souza



Presidente

Dr. Flávio Roberto Dias Velasco



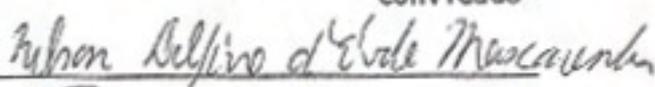
Orientador

Dr. Fernando T. Sakane



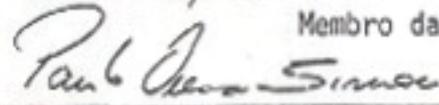
Membro da Banca
-convidado-

Dr. Nelson Delfino d'Ávila Mascarenhas



Membro da Banca

Engº Paulo Ouverá Simoni, Mestre



Membro da Banca

Candidato: Fernando Antonio Araujo Mota

São José dos Campos, 10 de agosto de 1984

... A grande maioria dos "Dons" realizava seu trabalho competentemente, sem que fosse risível ou interessante. Às vezes, no entanto, mesmo entre eles, surgiam professores de mérito incomum. Lembro-me de um preletor de matemática que sempre me pareceu bastante interessante. Estava, certa vez, falando sobre hidrostática, a expor um problema acerca de uma vasilha com uma tampa a girar dentro de uma banheira. Um dos alunos perguntou: "O senhor não esqueceu as forças centrífugas sobre a tampa?". O expositor, boquiaberto, respondeu: "Há vinte anos exponho este problema desta maneira. Mas o senhor tem razão". A partir desse momento, todos nós passamos a respeitá-lo muito mais.

(Bertrand Russell)

À "Sebita", esteio de singeleza e paciência contra o
turbilhão das circunstâncias, perdão por ser um poeta menor:

"Teus zōi é a for da paisagem
Serenos fim da viagem
Teus zōi é a cor da beleza
Sorriso da natureza.
Azul de prata meu litoral
Dois brincos de pedra rara
Riacho de água clara
Roupa com cheiro de mala
Zōim assim são mais belos
que renda branca na sala."

(Fausto Nilo)

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Velasco nosso tributo de reconhecimento e gratidão:
pelo elevado grau de lucidez intelectual de que é possuidor,
pela sua admirável disposição ao diálogo,
por jamais confundir contestação com afronta e
pelo seu eterno bom humor, fiel aliado de sua tranquilidade
inquietante.

ABSTRACT

Nowadays, in the development of automatic systems of visual perception, a set of phases that characterize the computational modelling of the perceptive process are distinguished. During the segmentation and interpretation phases, besides the compromise regarding the elimination of inconsistencies, there appears the ambiguity problem. In this work it is proposed an approach to deal with those questions, in the level of the identification of the object, using the semantic relationships and iterated parallel operations (relaxation operations) upon a discrete model that labels segments (labelled graphs). It is intended to reduce to the maximum the ambiguity through a single process of successive elimination, instead of a process for each possible segmentation. The dissertation is based mainly in the algebraic characterization of the relaxation operator and in the formal treatment, through discrete algebra, which puts into evidence its computational validity.

SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
LISTA DE FIGURAS	xiii
LISTA DE SÍMBOLOS	xiv
<u>CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO</u>	1
<u>CAPÍTULO 2 - ANÁLISE DE CENAS</u>	3
<u>CAPÍTULO 3 - UMA MODELAGEM ALGÉBRICA DE SEGMENTAÇÃO E INTERPRETAÇÃO</u>	15
3.1 - Considerações básicas	15
3.2 - Um problema fundamental	22
3.3 - Um problema singular	26
<u>CAPÍTULO 4 - UMA ABORDAGEM PARA REDUÇÃO DE AMBIGUIDADE</u>	55
4.1 - Descrição	55
4.2 - Uma generalização da aplicação de relaxação a "waveforms" com segmentação ambígua	63
<u>CAPÍTULO 5 - SEGMENTAÇÃO E INTERPRETAÇÃO INTEGRADAS</u>	75
5.1 - Segmentação guiada pela interpretação	75
5.2 - Uma alternativa para a integração	80
<u>CAPÍTULO 6 - CONSIDERAÇÕES FINAIS</u>	95
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	97
BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTAR	99
APÊNDICE A - PROPOSIÇÕES SINGULARES SOBRE SEGMENTAÇÕES	

LISTA DE FIGURAS

	<u>Pág.</u>
2.1 - A percepção visual vista como um processo computacional ..	3
2.2 - Interpretação inicial de uma cena de parte de uma sala ...	6
2.3 - Conhecimento prévio (ao nível de objeto) do domínio da cena da figura anterior	8
2.4 - Processo perceptivo visual como uma sucessão de níveis de representação	9
2.5 - Uma abordagem corrente para integrar segmentação e interpretação	11
3.1 - Exemplificações simplificadas de fusões de nós na modelagem da adjacência física por grafos	16
3.2 - O processo de relaxação	23
3.3 - Um processo de eliminação por relaxação	24
3.4 - Um problema singular relativo à rotulação discreta de grafos via relaxação	27
3.5 - Ilustração dos conceitos de vizinhança e classes de β -ênica	31
5.1 - Fluxo de execução do "IGS"	78
5.2 - Entrada/saída do "IGS"	80
5.3 - Um critério de escolha de segmentos	81
5.4 - Uma alternativa ao IGS	82
5.5 - Aplicação indevida da relação "acima"	85
5.6 - Uma cena natural simplificada que ilustra um processo de relaxação	86

LISTA DE SÍMBOLOS

- R - Conjunto de regiões
- α - Relação de adjacência física em R
- A - Conjunto de segmentos
- β - Relação binária em A
- s - Segmento
- r - Região
- S_i - Segmentação
- Λ - Conjunto-universo de rótulos
- Λ_s - Subconjunto de rótulos
- f - Rotulação em A
- g - Compatibilidade em A
- f^∞ - Rotulação consistente máxima
- δ - Operador de relaxação
- V_s^A - Vizinhaça de s com relação a A
- C_s^A - Classe de β -ênica de s com relação a A
- M_s^A - Classe máxima de β -ênica de s com relação a A
- θ - Operador de relaxação
- Δ - Operador de relaxação
- Δ^* - Operador de relaxação

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

*"Experiência é o nome que todos damos
a nossos erros".*

(Oscar Wilde)

O atual estado da arte no desenvolvimento da mecanização da percepção visual distingue um conjunto de fases que caracterizam a modelagem computacional do processo perceptivo. Duas delas, a segmentação e a interpretação, são de importância decisiva no desempenho do processo. Nelas, além do compromisso com a eliminação da inconsistência (com um conhecimento a priori do domínio da cena) entre interpretações associadas a regiões da cena, supostamente correspondentes a objetos, depara-se com o intimamente relacionado problema da possível existência de ambiguidades nas interpretações consistentes numa dada segmentação.

Pretende-se, então, abordar tais questões por intermédio de informações contextuais ou, mais especificamente, através de relacionamentos semânticos e de operações paralelas iteradas (operações de relaxação) sobre um modelo discreto de rotulação de segmentos (grafos rotulados) correspondente às segmentações envolvidas. Em particular, a abordagem reduz, e eventualmente elimina, a ambiguidade através de um único processo de relaxação, em lugar de um processo para cada segmentação possível.

Esta dissertação fundamenta-se, principalmente, na caracterização algébrica de um operador de relaxação e na argumentação formal que evidencia a validade de um enfoque por ele propiciado.

Inicialmente dá-se uma visão sucinta do estágio atual do campo da análise de cenas. Tal descrição não tenciona ser completa,

e são suficientes com relação aos aspectos relevantes para as questões tratadas posteriormente. Por este motivo ressaltam-se os aspectos de correntes das fases de segmentação e interpretação.

A seguir, é caracterizada algebricamente a técnica de relaxação discreta em grafos rotulados. Em especial, propõe-se uma solução para a extensão de um problema característico deste tipo de processo computacional.

Motivado pelos resultados formais então obtidos, propõe-se uma abordagem para redução de ambiguidades na identificação de segmentos, ao nível de representação de objeto, em análise de cenas. Evidenciando a concordância deste trabalho com a linha ora adotada nesta área de investigação, argumenta-se a seguir que o enfoque aqui sustentado é uma generalização de outro já proposto para o caso unidimensional.

Em seguida, caracteriza-se a tendência corrente de integrar segmentação e interpretação descrevendo a metodologia mais representativa de tal tipo de enfoque. Motivado pela abordagem de redução de ambiguidades, anteriormente proposta, propõe-se uma alternativa para tal integração. Evidencia-se então que os problemas conceituais intrinsecos ao método de integração são superados na alternativa proposta, além de esta poder ser vista como uma extensão da primeira. Complementando a argumentação, exemplifica-se o modelo proposto.

Finalmente, comentam-se as desvantagens com relação ao objetivo perseguido pela análise de cenas, advindas do modo pelo qual foi abordada a utilização de informação contextual. Além disso, sugere-se, a fim de dar continuidade a essa linha de desenvolvimento, o que se desejaria realizar posteriormente.

Em suma, uma utilização de informação contextual para redução de ambiguidades na segmentação e interpretação de imagens, em análise de cenas, é o objeto desta publicação.

CAPÍTULO 2

ANÁLISE DE CENAS

"Nós não conhecemos. Nós só podemos dar palpites".

(Karl Popper)

A denominação "visão por computador" sugere prontamente um propósito de automatizar tal classe de percepção. A ciência da computação é intrinsecamente abstrata, primordialmente, tal espécie de questão como um processo computacional. Então, uma vez que a visão pode ser considerada como um tipo de percepção, é cabível indagar a respeito da entrada e saída do processo perceptivo. Sob uma perspectiva de alto nível, a entrada constitui-se em sinais provenientes do ambiente físico e a saída em uma representação simbólica do(s) agente(s) causalmente responsável pela entrada. O que determina a qualificação da percepção em visual é a classe de sinais que são capazes de sensibilizar chapas fotográficas e câmeras de televisão. Neste caso, o simbolismo de saída configura-se, em geral, como uma estrutura linguística (Figura 2.1).

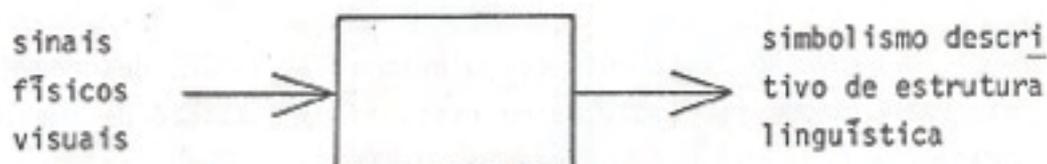


Fig. 2.1 - A percepção visual vista como um processo computacional.

Em consonância com o modelo perceptivo humano ora adotado em outras áreas de investigação científica, o atual estado da arte considera como agente computacional da visão o que, atualmente, entende-se por conhecimento. Isto justifica a aplicabilidade de técnicas de resolução de problemas que compreendem a Inteligência Artificial, vis

to que a simbolização do conhecimento afigura-se como de importância vital em tal ramo. Emerge também disto a explicação da distinção, em processamento de imagens, entre reconhecimento de padrões e análise de cenas (ou visão por computador). O primeiro aplica técnicas de classificação estatística, e mais recentemente métodos sintáticos, aos atributos icônicos (cor, textura, brilho, contraste, etc.) de cada elemento pictórico, enquanto a análise de cenas faz uso adicional das técnicas de Inteligência Artificial, munidas de previsibilidade do domínio da cena a examinar. Sob o controvertido tema do conhecimento, já se pode antever as dificuldades futuras. Elas traduzem-se em múltiplos posicionamentos filosóficos referentes à teoria do conhecimento e ainda hoje sustentáveis. Em suma, o conhecimento apresenta-se como interface no mapeamento sinal-símbolo.

Uma vez que a metodologia científica almeja assintoticamente a generalidade, é óbvio que o objetivo da automação visual é atuar em qualquer domínio. Justificada por uma meta inicial menos ambiciosa e pelas argumentações ainda não decisivamente refutadas de que a visão humana apóia-se em objetivos e expectativas do observador, a generalidade atual significa um so domínio, porém amplo no sentido de grande variedade de constituintes. A classe de cenas naturais, ora prioritária nas investigações dos pesquisadores, satisfaz tal condição.

No tratamento computacional da visão, descreve-se inicialmente o processo como duas macroetapas: a formação da imagem e a descrição da cena que ela representa. O fato de a cena ser representada por uma imagem digitalizada permite assegurar perdas de informação, principalmente justificadas, pela redução da cena a duas dimensões, tais como: por interferências na transmissão dos sinais, pelo grau de desempenho da instrumentação de recepção, pelas condições de iluminação ambiente e pela disposição de sensores. Como se deseja descrever não a imagem e sim o que ela representa, faz-se necessário reparar tais perdas. O atual estágio de investigação supre tais informações através de conhecimento a priori simbolicamente representado por modelos de iluminação, fotométricos, geométricos, de orientação espacial, de domínio de cena, de sensores, de volumes, de objetos e de superfícies, sendo

estes dois últimos justificados pela saída do processo, que produz uma descrição em termos destes símbolos. Por conseguinte, é imediata a associação da dependência do desempenho da automação com a excelência desses modelos.

Considerando como entrada a imagem já digitalizada, realizam-se sobre ela todas as inferências possíveis e relevantes para a descrição da cena. Elas são metodologicamente agrupadas, caracterizando a denominação de baixo e alto nível de descrição da cena. No primeiro caso, obtém-se o que é dedutível iconicamente com auxílio de modelos de iluminação, de sensores, fotométricos, geométricos e de orientação, além de restrições de tamanho e forma que eventualmente levam em conta o domínio da cena. Dá-se, neste caso, a aplicação das principais técnicas de processamento de imagens produzindo um reconhecimento de fronteiras que, supostamente, delimitam regiões correspondentes a objetos distintos. Ou seja, a imagem passa a ser considerada como um conjunto de segmentos que, pelas características de não-superposição e cobertura completa da imagem, sugere uma possível modelagem formal da segmentação pelo conceito algébrico de partição. Este reconhecimento propõe-se a fornecer uma aproximação inicial da correspondência segmento-objeto em que se fundamenta a visão por computador. As identificações dos objetos dão-se, nesta segmentação inicial, através da associação de todos os objetos possíveis no domínio da cena a cada segmento, excluindo entretanto aquelas associações que são inconsistentes com o conhecimento disponível neste nível de descrição. Este, em geral, de natureza geométrica¹ (Figura 2.2). A fase de interpretação tem como principais alternativas um tratamento determinístico ou a atribuição de graus de certeza à associação de identificações aos segmentos.

¹ A tarefa de associar identificações aos segmentos é comumente conhecida como interpretação.

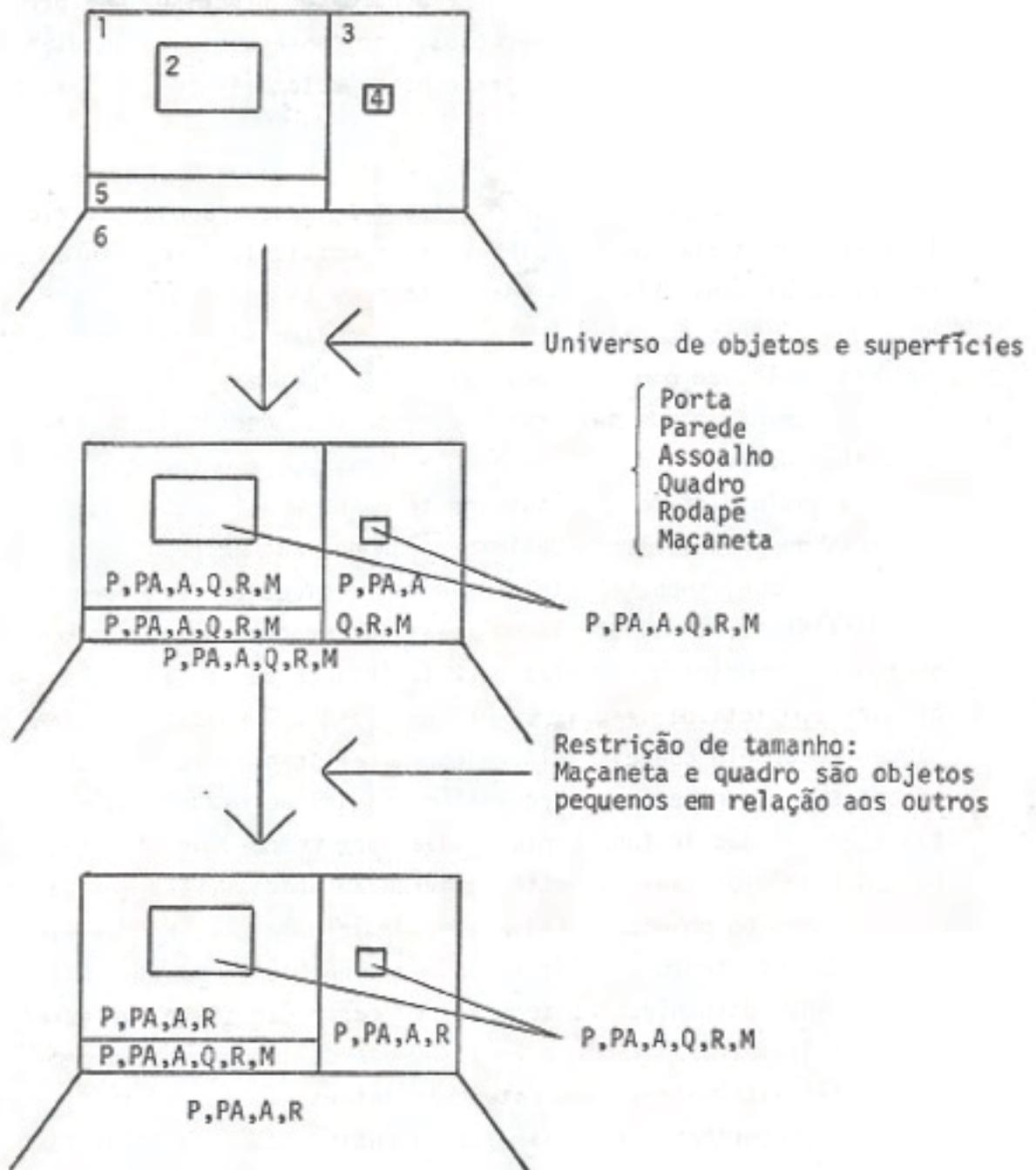


Fig. 2.2 - Interpretação inicial de uma cena de parte de uma sala.

FONTE: Barrow and Tenenbaum (1981), p. 442.

No segundo caso, a segmentação e interpretação iniciais assumem o papel de entrada para o nível seguinte de descrição da cena. Tal nível, para reconhecer superfícies, volumes, objetos e, em maior grau de sofisticação, até eventos em ocorrência na cena, apóia-se nos modelos correspondentes e mais ainda no conhecimento prévio do domínio da cena. Este traduz os interrelacionamentos semânticos válidos entre os objetos conforme o domínio. Considera-se, atualmente, como uma simbolização simples e potencialmente expansível deste conhecimento uma representação via relações binárias no universo de identificações possíveis (Figura 2.3).

Em síntese, o atual estado da arte modela o processo perceptivo da visão como uma sucessão de níveis de representação que tem como símbolos descritivos correspondentes: fronteira, superfície, volume, objeto e evento (Figura 2.4). A saída de um dado nível é, portanto, tomada como entrada de um nível hierarquicamente seguinte. Entretanto, é importante alertar que nas deduções obtidas num dado nível podem ser usados conhecimentos característicos de outros níveis, quer mais baixos, quer mais altos. Isto faz com que a referida hierarquia seja mais propriamente justificável como modelo descritivo do que operacional.

O problema fundamental deste trabalho, assim como suas aplicações decorrentes, acha-se intrinsecamente relacionado à segmentação e interpretação no nível de representação de objeto. Torna-se desejável, então, discorrer um pouco mais, ainda que de forma dissertativa, sobre estas tarefas. No capítulo seguinte, passa-se a não mais prescindir da precisão que o formalismo permite conferir.

R1	
ACIMA DE	
R	A, R
P	M, A, P
A	A
PA	Q, PA, R
Q	Q, PA
M	M, P

R2	
AO LADO DE	
R	P, R
P	M, PA, P, R
A	A
PA	Q, PA, P
Q	Q, PA
M	M, P

R3	
ADJACENTE A	
R	PA, A, P, R
P	M, PA, A, P, R
A	A, P, R
PA	Q, PA, P, R
Q	Q, PA
M	M, P

R4	
DENTRO DE	
R	R
P	P
A	A
PA	PA
Q	Q, PA
M	M, P

R5	
FORA DE	
R	R
P	M, P
A	A
PA	PA, Q
Q	Q
M	M

Fig. 2.3 - Conhecimento prēvio (ao nīvel de objeto) do domīnio da cena da figura anterior.

FONTE: Barrow and Tenenbaum (1981), p. 438.

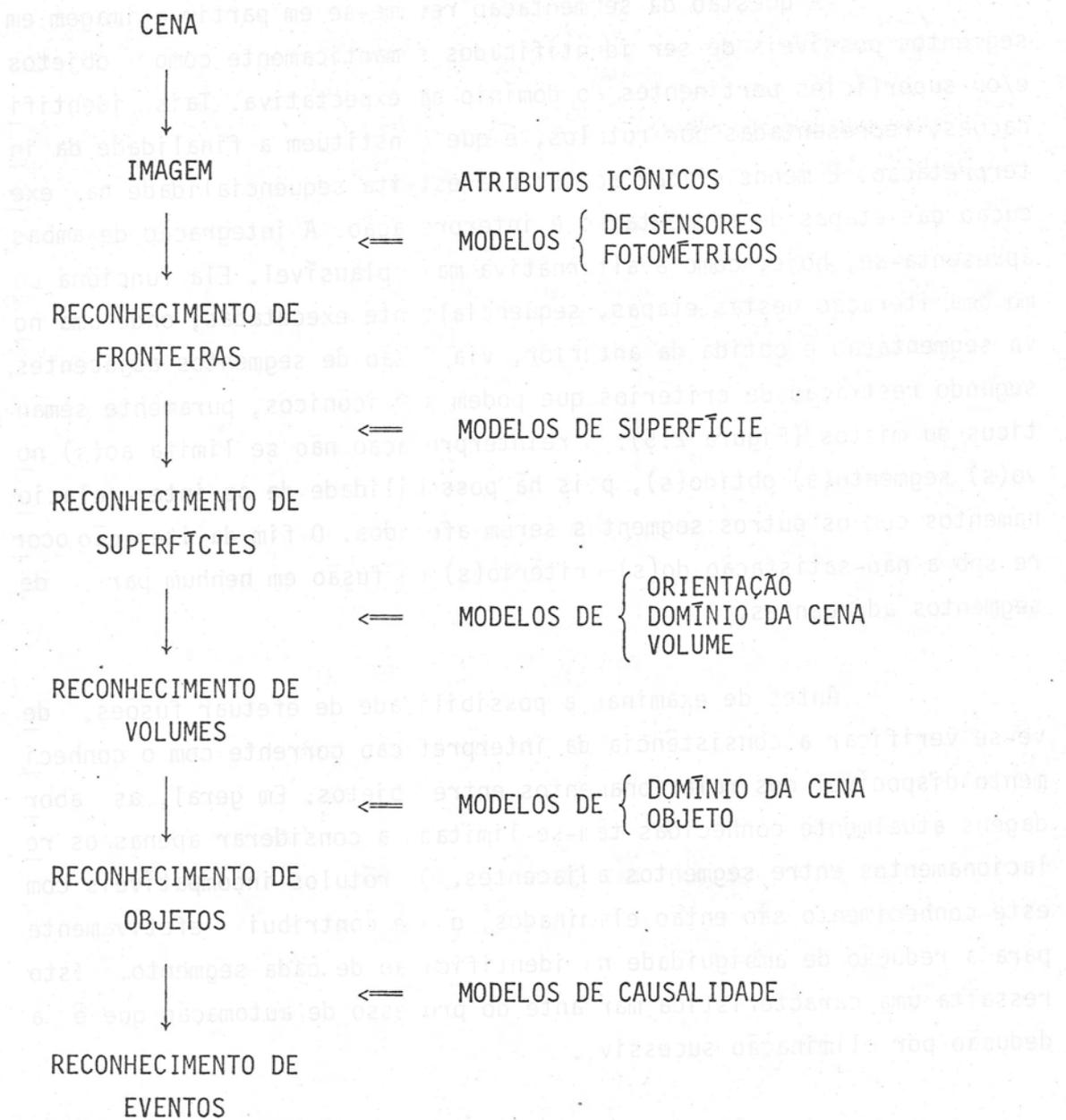


Fig. 2.4 - Processo perceptivo visual como uma sucessão de níveis de representação.

A questão da segmentação resume-se em partir a imagem em segmentos possíveis de ser identificados semanticamente como objetos e/ou superfícies pertinentes ao domínio em expectativa. Tais identificações, representadas por rótulos, é que constituem a finalidade da interpretação. É menos eficaz adotar uma estrita sequencialidade na execução das etapas de segmentação e interpretação. A integração de ambas apresenta-se, hoje, como a alternativa mais plausível. Ela funciona como uma iteração destas etapas, sequencialmente executadas, onde uma nova segmentação é obtida da anterior, via fusão de segmentos adjacentes segundo restrição de critérios que podem ser icônicos, puramente semânticos ou mistos (Figura 2.5). A reinterpretção não se limita ao(s) novo(s) segmento(s) obtido(s), pois há possibilidade de os inter-relacionamentos com os outros segmentos serem afetados. O fim da iteração ocorre sob a não-satisfação do(s) critério(s) de fusão em nenhum par de segmentos adjacentes.

Antes de examinar a possibilidade de efetuar fusões, deve-se verificar a consistência da interpretação corrente com o conhecimento disponível dos relacionamentos entre objetos. Em geral, as abordagens atualmente conhecidas têm-se limitado a considerar apenas os relacionamentos entre segmentos adjacentes. Os rótulos incompatíveis com este conhecimento são então eliminados, o que contribui efetivamente para a redução de ambiguidade na identificação de cada segmento. Isto ressalta uma característica marcante do processo de automação que é a dedução por eliminação sucessiva.

Quanto à representação de uma segmentação, adota-se, em geral, a estrutura de grafo, onde os nós simbolizam os segmentos e os arcos indicam a possibilidade de inter-relacioná-los de modo semântico. Os modelos até então propostos restringem o inter-relacionamento apenas aos pares de segmentos pictoricamente adjacentes. É importante ressaltar que no presente trabalho visa-se generalizar este aspecto.

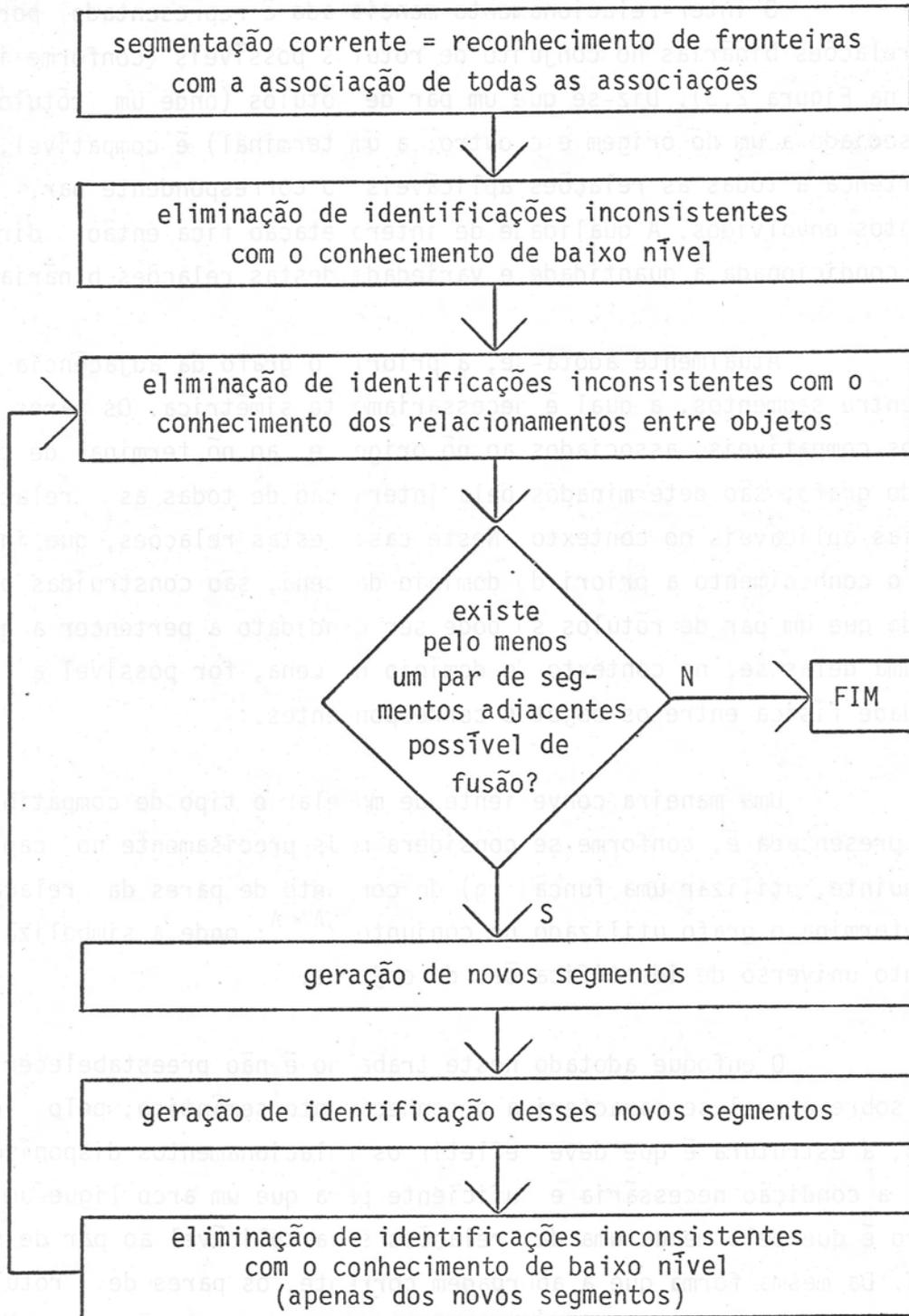


Fig. 2.5 - Uma abordagem corrente para integrar segmentação e interpretação.

O inter-relacionamento mencionado é representado por várias relações binárias no conjunto de rótulos possíveis (conforme ilustrado na Figura 2.3). Diz-se que um par de rótulos (onde um rótulo está associado a um nó origem e o outro, a um terminal) é compatível, caso pertença a todas as relações aplicáveis ao correspondente par de segmentos envolvidos. A qualidade de interpretação fica então diretamente condicionada à quantidade e variedade destas relações binárias.

Atualmente adota-se, a priori, o grafo da adjacência física entre segmentos, a qual é necessariamente simétrica. Os pares de rótulos compatíveis, associados ao nó origem e ao nó terminal de cada arco do grafo, são determinados pela interseção de todas as relações binárias aplicáveis no contexto. Neste caso, estas relações, que incorporam o conhecimento a priori do domínio da cena, são construídas presumindo que um par de rótulos só pode ser candidato a pertencer a qualquer uma delas se, no contexto do domínio da cena, for possível a contiguidade física entre os objetos correspondentes.

Uma maneira conveniente de modelar o tipo de compatibilidade apresentada é, conforme se considera mais precisamente no capítulo seguinte, utilizar uma função (g) do conjunto de pares da relação, que determina o grafo utilizado no conjunto $2^A \times A$; onde A simboliza o conjunto universo de identificações de objetos.

O enfoque adotado neste trabalho é não preestabelecer o grafo sobre o qual se caracteriza o conhecimento semântico; pelo contrário, a estrutura é que deve refletir os relacionamentos disponíveis. Assim, a condição necessária e suficiente para que um arco ligue um nó a outro é que pelo menos uma das relações seja aplicável ao par de segmentos. Da mesma forma que a abordagem corrente, os pares de rótulos compatíveis são obtidos pela interseção de todas as relações aplicáveis aos nós em questão. É importante explicitar que estas não exigem que o par de segmentos seja necessariamente contíguo. Além disto, tornou-se viável considerar segmentos que se constituem em regiões não-contíguas.

Este trabalho baseia-se nesta abordagem de análise de cenas, onde se dá especial atenção à representação da cena ao nível de identificação de objeto. Os objetivos são apresentar e justificar (ma^{tematicamente}, através da álgebra discreta) uma nova abordagem de redução de ambiguidades, bem como propor um consequente modelo de metodologia alternativa para integrar a segmentação com a interpretação.

CAPÍTULO 3

UMA MODELAGEM ALGÉBRICA DE SEGMENTAÇÃO E INTERPRETAÇÃO

"Todo o nosso problema consiste em fazer com que nossos erros sejam tão breves quanto possível".

(John Archibald Wheeler)

3.1 - CONSIDERAÇÕES BÁSICAS

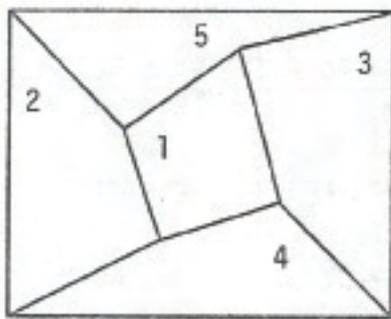
Várias hipóteses e resultados formais de álgebra discreta, enunciados a seguir, fundamentam as considerações abordadas neste capítulo. Em princípio, visa-se generalizá-las, embora se tenha, às vezes, de dar prioridade a conveniências das aplicações a propor.

Considere-se o conjunto R , finito e não-vazio, de regiões obtidas no reconhecimento inicial de fronteiras de uma imagem digitalizada.

Seja a relação binária α em R representando a adjacência física entre regiões, bem como seu grafo correspondente².

Conforme considerações do Capítulo 2, é possível que se realizem fusões entre essas regiões (Figura 3.1). Estas novas regiões obtidas por fusão (no capítulo anterior denominadas segmentos) podem ser vistas como elementos de $2^{R-\{\emptyset\}}$.

² É importante explicitar que, neste trabalho, o conceito de grafo (grafo direcionado ou "digraph") é primordialmente utilizado como estrutura gráfica descritiva de uma relação binária, num conjunto finito, ao invés de uma estrutura algébrica constituída de um conjunto de vértices, de um de arcos e de uma função deste no produto cartesiano entre os vértices.



$R = \{1,2,3,4,5\}$

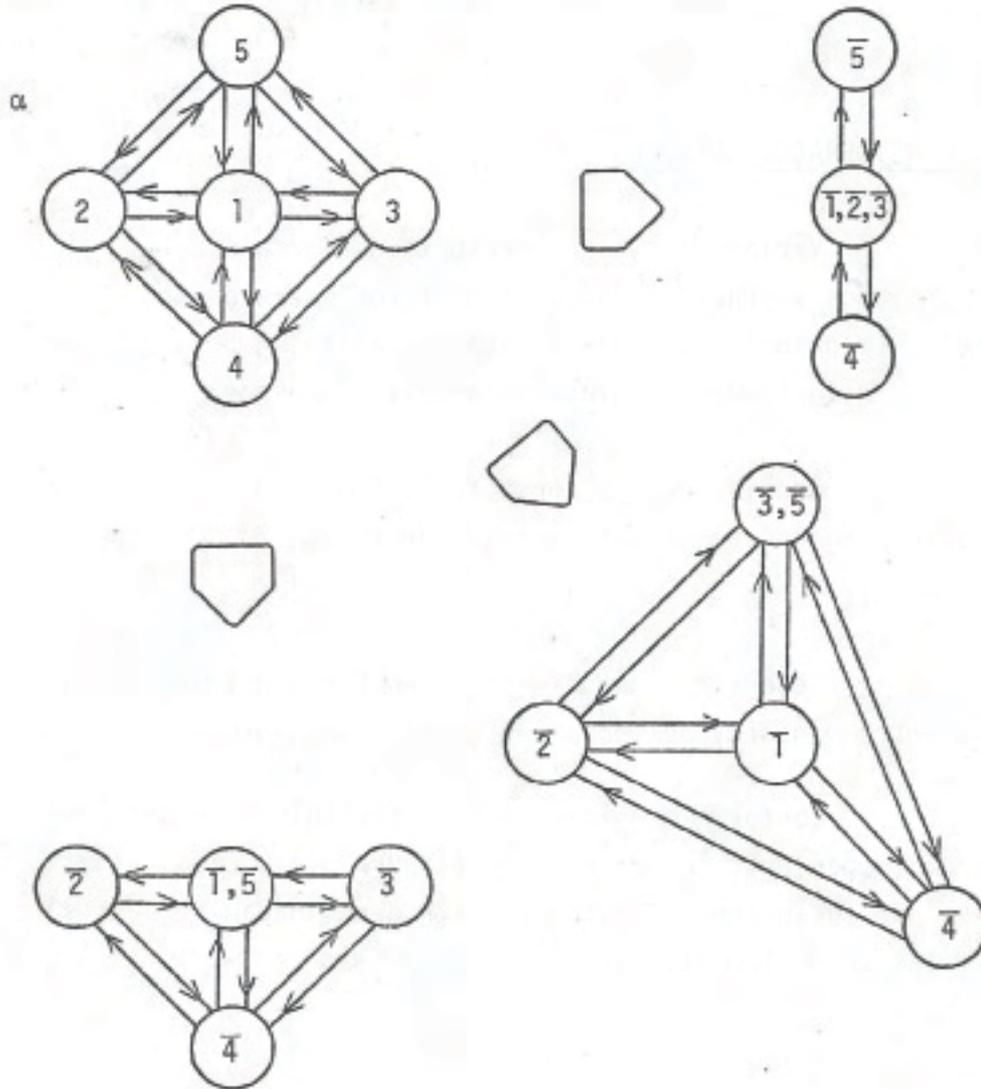


Fig. 3.1 - Exemplificações simplificadas de fusões de nós na modelagem da adjacência física por grafos.

Considere-se agora uma relação β num conjunto A de segmentos ($0 \neq A \subseteq 2^R - \{\emptyset\}$), tal que:

1) $s' \beta s'' \implies s' \cap s'' = \emptyset$;

2) $s' \beta s'' \implies$ existe $r' \in s', r'' \in s''$ tal que $\{r'\} \beta \{r''\}$;

$$\left. \begin{array}{l} 3) \{r'\} \beta \{r''\} \\ s' \supseteq \{r'\} \\ s'' \supseteq \{r''\} \\ s' \cap s'' = \emptyset \end{array} \right\} \implies s' \beta s'' .$$

A restrição em relacionar apenas segmentos disjuntos é pertinente, dado que segmentos que se superpõem não fazem parte de uma mesma segmentação; portanto, não convém relacioná-los. As outras restrições podem parecer fortes, porém é fácil superá-las numa relação que não as satisfaçam, incluindo arcos fictícios adicionais suficientes. Entendendo-se por arco fictício um relacionamento entre segmentos, de tal forma que é imposta total compatibilidade para quaisquer interpretações desses segmentos. Isto é justificável tendo em vista que a ausência de relacionamento entre um par de segmentos implica, semanticamente, total compatibilidade entre quaisquer interpretações a eles atribuídas.

Caso β represente a extensão de α a segmentos, ou seja, à adjacência física, as três condições são prontamente atendidas.

Observe-se também que a relação binária β não é necessariamente simétrica, embora α assim o seja. Além disto, a conveniência da definição de β e a associação intuitiva entre cada grafo (resultante de fusões várias) e uma partição de R motiva a substituição de α , em R , por β em \bar{R} , onde $\bar{R} = \{\{r\} | r \in R\}$.

Pode parecer insustentável a denominação de segmentos a um elemento qualquer de $2^R - \{\emptyset\}$ em lugar de considerar apenas os sub

grafos conectados³ de α . Também pode parecer isento de significado a fusão de regiões que não constituem um subgrafo de tal tipo. Esta possibilidade de um segmento composto de regiões não-contíguas representar um único objeto no domínio da cena é um dos aspectos genéricos alme me ja do s.

Deve-se considerar a associação de rótulos⁴ semânticos a cada nó do grafo de β . Isto é, a cada elemento da estrutura deve-se conferir significação contextual com relação ao domínio da cena que está sendo modelada. Isto leva a abstrair o conjunto-universo de rótulos e, para cada segmento, o conjunto de rótulos possíveis. Considere-se então o conjunto $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_r\}$, finito e não-vazio, assim como os conjuntos $\Lambda_s \subseteq \Lambda \quad \forall s \in (2^R - \{\emptyset\})$.

Ocupa-se aqui apenas da associação determinística de rótulos, isto é, os graus de certeza desta associação são 0% ou 100%, não ocorrendo níveis intermediários.

A seguir, define-se o que venha a ser rotulação. Em geral, ela não se restringe a uma partição de R .

DEFINIÇÃO⁵ 3.1* - f é uma rotulação de A ,

\longleftrightarrow

$$f : A \rightarrow 2^\Lambda,$$

onde $f(s) \subseteq \Lambda_s \quad \forall s \in A$.

³ A conectabilidade aludida é aquela conceituada na Teoria dos Grafos, onde para qualquer par de nós existe pelo menos um caminho de um nó ao outro.

⁴ Representam simbolicamente as interpretações.

⁵ As definições, notações e proposições assinaladas com * devem-se em essência (mas, em geral, não em forma) a trabalhos constantes em referências bibliográficas, os quais são identificados na correspondente nota de rodapé. As eventuais demonstrações destes resultados são apresentadas quando elas não ocorrem nos artigos de origem ou quando maior grau de formalização for útil.

* Velasco and Rosenfeld (1979).

Por conseguinte, a condição imposta aos rótulos de um segmento qual quer é que eles pertençam ao conjunto de rótulos possíveis de serem as associados ao segmento.

Reflexões sobre as singularidades de uma rotulação suge rem a seguinte definição:

DEFINIÇÃO 3.2* - f é a rotulação nula de A ,

\longleftrightarrow

$$f(s) = \phi \quad \forall s \in A.$$

Visando caracterizar as restrições relacionais entre segmentos, é conveniente tratar da compatibilidade local entre rótulos. O termo local significa que a compatibilidade é considerada apenas en tre rótulos associados a pares de segmentos relacionados por β^6 .

Para abordar de maneira formal a compatibilidade, o con ceito de função é suficiente.

DEFINIÇÃO 3.3* - g é uma compatibilidade em A ,

\longleftrightarrow

$$g: \beta \rightarrow 2^{A \times A},$$

$$g(s', s'') \subseteq \Lambda_{s'} \times \Lambda_{s''} \quad \forall (s', s'') \in \beta.$$

Uma opção natural é tomar dentre as relações binárias en tre rótulos, contextualmente dedutíveis, aquelas aplicáveis a cada par de β . A função g traduz a satisfação simultânea dessas restrições. Va le a pena salientar que para assegurar coerência de g com o conhecimen to a priori do domínio da cena é desejável que se $s' \beta s''$ e $s'' \beta s'$, então: $(\lambda', \lambda'') \in g(s', s'') \iff (\lambda'', \lambda') \in g(s'', s')$.

⁶ Deve-se conferir a propriedade da terminologia "local" no caso de β representar a adjacência física.

* Velasco and Rosenfeld (1979).

De um modo geral, buscam-se rotulações tal que: dados dois segmentos quaisquer, relacionados via β , e um rótulo de um destes nós, existe pelo menos um rótulo do outro nó que lhe é compatível. É o que comumente se conceitua de consistência. Formalmente define-se

DEFINIÇÃO 3.4* - f é consistente com uma compatibilidade g em A ,

\longleftrightarrow

$$\left. \begin{array}{l} \forall (s', s'') \in \beta \\ \forall \lambda' \in f(s') \\ \forall \lambda'' \in f(s'') \end{array} \right\} \begin{array}{l} [\{ \lambda' \} \times f(s'')] \quad g(s', s'') \neq \phi \\ e \\ [f(s') \times \{ \lambda'' \}] \quad g(s', s'') \neq \phi. \end{array}$$

É imediata a dedução da proposição:

PROPOSIÇÃO 3.1**

Se f é nula, então f é consistente.

Igualmente, decorre o seguinte lema:

LEMA 3.1**

Se f' é uma rotulação (de A) consistente (com g em A)
 f'' é uma rotulação (de A) consistente (com g em A)
 $f' \cup f''$ é uma rotulação (de A) consistente (com g em A).

Para os propósitos da análise de cenas, é ideal a existência e a unicidade de uma rotulação consistente que tenha associado um único rótulo a cada segmento. Na não-unicidade, bem como na inexistência desta, uma alternativa é determinar, se possível, a rotulação que, além de consistente, contenha todas as rotulações consistentes. Tais noções podem ser assim formalizadas:

DEFINIÇÃO 3.5** - f é uma rotulação⁷ não-ambígua⁸,

\longleftrightarrow

⁷ de A .

⁸ com relação a g em A .

* Velasco and Rosenfeld (1979).

** Rosenfeld et alii (1976).

f for consistente⁸ e
 $\# f(s) = 1 \quad \forall s \in A.$

DEFINIÇÃO 3.6* - f é a rotulação⁷ consistente máxima⁸,

\iff

f é consistente⁸ e

f contém qualquer rotulação⁷ consistente⁸.

Felizmente é válida a seguinte proposição:

PROPOSIÇÃO 3.2*

Existe a rotulação⁷ consistente máxima⁸.

DEMONSTRAÇÃO

- 1) Como R e Λ são finitos,
o conjunto de todas as possíveis rotulações de A é finito;
- 2) de (1),
é finito o conjunto de todas as possíveis rotulações de A consistentes⁹;
- 3) por construção,
 F é a rotulação formada pela união de todas essas rotulações consistentes⁹;
- 4) de (3) e Lema 3.1,
 F é consistente⁹;
- 5) de (3) e (2),
qualquer rotulação consistente⁹ de A está contida em F ;
- 6) de (4), (5) e Definição 3.6,
existe a rotulação consistente⁹ máxima de A ;

Usa-se, doravante, a notação f^∞ para a rotulação consistente máxima*.

⁷ de A .

⁸ com relação a g em A .

⁹ com relação a uma mesma compatibilidade em A .

* Rosenfeld et alii (1976).

3.2 - UM PROBLEMA FUNDAMENTAL

É interessante caracterizar uma questão, em rotulação discreta, resolvida por Rosenfeld et alii (1976), útil na abordagem do problema a ser tratado na Seção 3.3. A questão em exame busca a obtenção da rotulação consistente máxima.

O tipo de resolução algorítmica utilizada tem como características relevantes a iteração, a eliminação de rótulos como única espécie de operação e o paralelismo. Tal paralelismo significa simultaneidade de operação em todos os nós do grafo numa iteração qualquer. Tal abordagem denomina-se relaxação ou, talvez mais precisamente, versão paralela da filtragem de Walz (1975).

Como alternativa para a caracterização formal da noção de relaxação, utilizam-se as ilustrações da Figura 3.2, uma vez que não chegam a comprometer os objetivos desejados.

O operador de relaxação proposto conserva um rótulo de um nó qualquer se, e somente se, em qualquer segmento relacionado ao nó, via a relação β , existe pelo menos um rótulo associado, compatível (conforme g) com o rótulo em exame. Isto equivale à eliminação de qualquer rótulo que seja incompatível com todos os rótulos de pelo menos um segmento relacionado. Simbolicamente, o operador, aqui notado por δ , é tal que δf é uma outra rotulação em A , onde:

DEFINIÇÃO 3.7*

$$\lambda \in \delta f(s) \iff \begin{cases} \lambda \in f(s) \\ e \\ [(\lambda) \times f(s')] \cap g(s, s') \neq \emptyset \quad \forall s' \in A, s \beta s'. \end{cases}$$

A Figura 3.3 ilustra tal operador de relaxação.

* *Velasco and Rosenfeld (1979).*

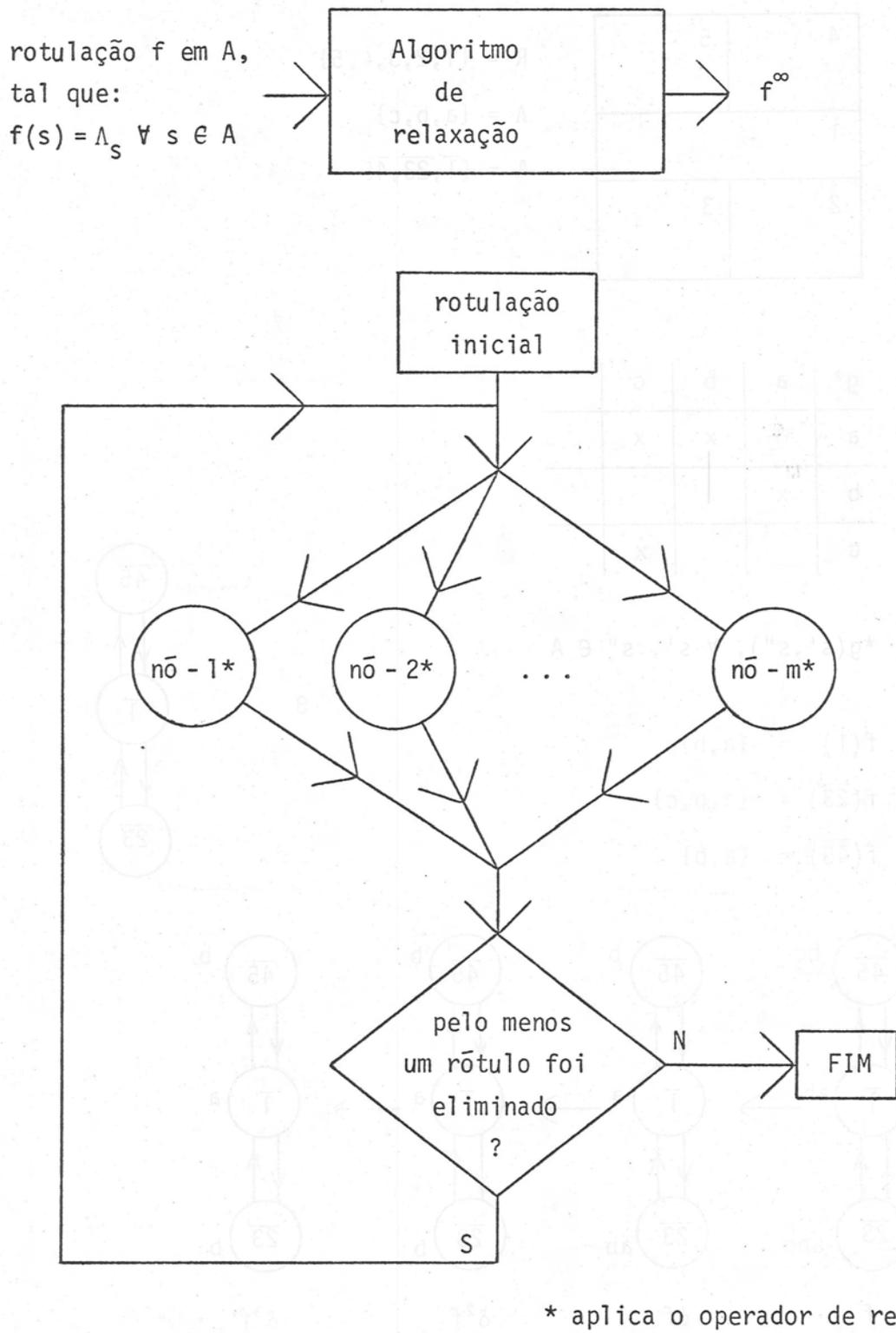
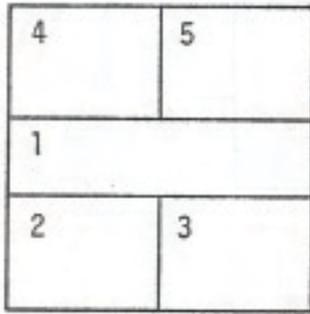


Fig. 3.2 - O processo de relaxação.



$$R = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$\Lambda = \{a, b, c\}$$

$$A = \{\overline{1}, \overline{23}, \overline{45}\}$$

g^*	a	b	c
a		x	x
b	x		
c			x

$$*g(s', s''), \forall s', s'' \in A$$

$$f(\overline{1}) = \{a, b\}$$

$$f(\overline{23}) = \{a, b, c\}$$

$$f(\overline{45}) = \{a, b\}$$

β

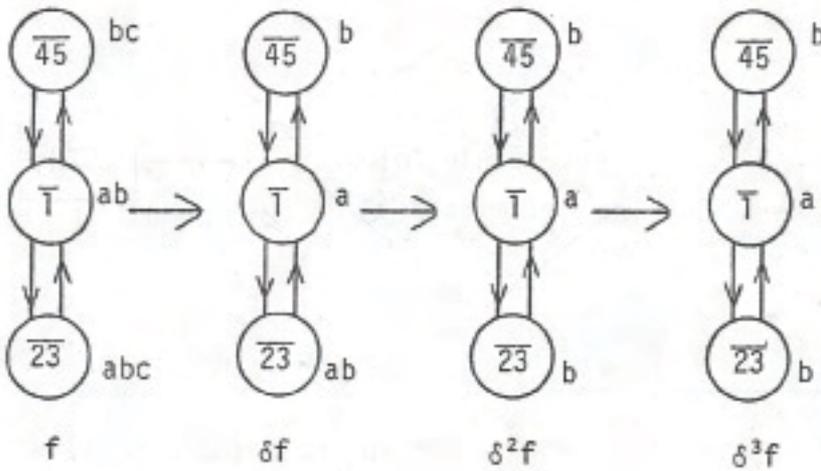


Fig. 3.3 - Um processo de eliminação por relaxação.

Uma vez que a utilização de δ é iterativa, as notações* a seguir facilitam a manipulação formal, ou seja:

$$\delta^0 f = f ,$$

$$\delta^{k+1} f = \delta(\delta^k f) \quad \forall k > 0 .$$

Não cabe aqui argumentar a validade de tal operador. Relacionam-se apenas as consequências úteis ao tratamento algébrico da seção subsequente.

Dado que a relaxação apenas elimina rótulos, consequentemente deduz-se que a rotulação obtida em cada iteração está contida na anterior e a aplicação do operador a uma rotulação nula produz ela própria. As proposições seguintes traduzem tais considerações:

PROPOSIÇÃO 3.3**

$$\forall k \geq 1 \quad \delta^k f \subset \delta^{k-1} f$$

PROPOSIÇÃO 3.4**

$$\forall k \geq 0 ,$$

Se $\delta^k f$ é uma rotulação nula, então $\delta^{k+j} f = \delta^k f$, $j \geq 0$.

O resultado que garante a obtenção da rotulação consistente máxima pelo operador de relaxação δ é:

PROPOSIÇÃO 3.5**

existe $k \geq 0$, tal que $\delta^k f = f^\infty$.

(Para tal k denota-se $\delta^k f$ por $\delta^\infty f$).

* Velasco and Rosenfeld (1979).

** Rosenfeld et alii (1976).

O critério de parada do processo iterativo de relaxação é consequência imediata do teorema seguinte, já estabelecido na área de análise de cenas.

PROPOSIÇÃO 3.6*

$$\delta^k f = f^\infty \iff \delta^{k+j} f = \delta^k f \quad \forall j \geq 1.$$

3.3 - UM PROBLEMA SINGULAR

Uma vez que, supostamente, já foram apresentados hipóteses e resultados algébricos suficientes, formula-se e resolve-se o problema algébrico fundamental deste trabalho, que motiva as aplicações sugeridas nos capítulos seguintes.

Conforme a associação intuitiva mencionada na Seção 3.1 e a conveniência aplicativa em meta, fixa-se a atenção nos conjuntos de segmentos que constituem partições do conjunto de regiões. Considere-se, então, todas as partições de R possíveis de obter apenas com elementos de A (S_1, S_2, \dots, S_n). Convencionou-se que o índice i , daqui para frente, pode assumir como valores possíveis qualquer elemento do conjunto $\{1, 2, 3, \dots, n\}$.

Algumas proposições-*lema*, que ora convém ser expostas, encontram-se no Apêndice A para tornar a apresentação mais direta.

Sabe-se pela seção anterior que, de posse de uma partição qualquer S_i , o operador δ resolve a questão de obter a rotulação consistente máxima de tal conjunto. Caso se tenha várias partições, para cada uma deve-se aplicar o processo de relaxação. Isto se afigura como uma grande redundância computacional; particularmente nos casos em que as partições pouco diferem entre si. A questão emergente é a

* *Rosenfeld et alii (1976)*.

possibilidade de agrupar as partições e efetuar um único processo de relaxação obtendo um resultado equivalente. Sabe-se que o operador δ não se presta a tal alternativa, reduzindo o problema à determinação de outro operador de relaxação satisfatório. A representação esquemática da Figura 3.4 sintetiza estas considerações.

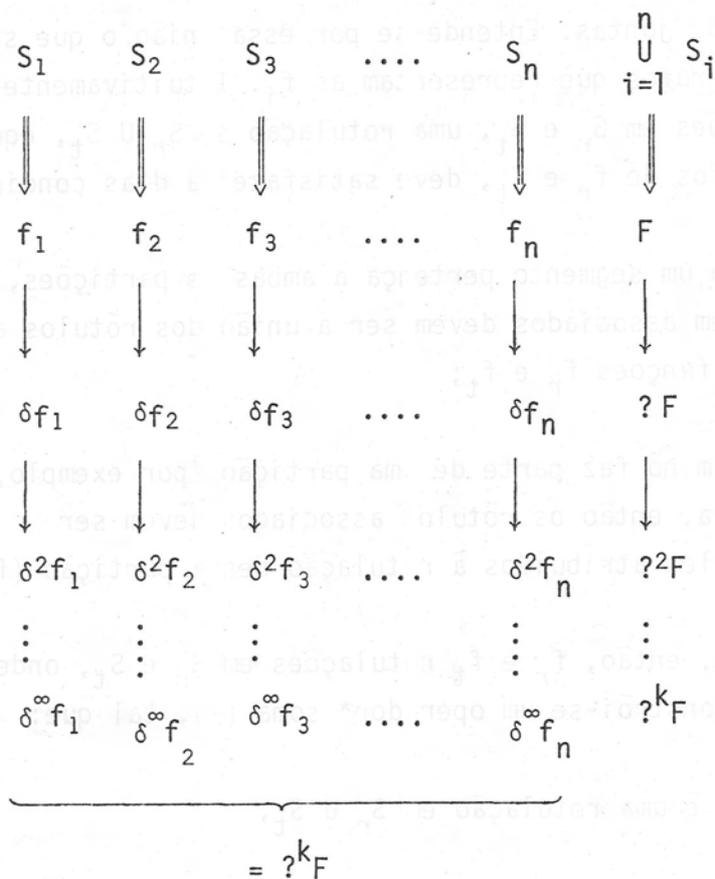


Fig. 3.4 - Um problema singular relativo à rotação discreta de grafos via relaxação.

É importante ressaltar a natureza estritamente local como característica intrínseca da abordagem de relaxação. Assim, na decisão de eliminar ou não um rótulo de um nó, podem ser consultados apenas os segmentos a ele relacionados, além dele próprio.

Seja, então, para cada partição S_i uma rotação f_i , tal que $f_i(s) = \Lambda_s, \forall s \in S_i$ e g uma compatibilidade em A . Ou seja, a ca

da segmento, indiferente de que partição possa pertencer, são associados todos os rótulos possíveis.

Deve-se caracterizar uma rotulação em $S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_n$ que seja equivalente, no sentido de associação de rótulos, a todas as rotulações f_i juntas. Entende-se por essa união o que se obtém quando se unem os grafos que representam as f_i . Intuitivamente, se f_r e f_t são rotulações em S_r e S_t , uma rotulação em $S_r \cup S_t$, equivalente à fusão dos grafos de f_r e f_t , deve satisfazer a duas condições:

- 1) caso um segmento pertença a ambas as partições, os rótulos a serem associados devem ser a união dos rótulos associados pelas funções f_r e f_t ;
- 2) se um nó faz parte de uma partição (por exemplo, S_r) e não de outra, então os rótulos associados devem ser exclusivamente aqueles atribuídos à rotulação desta partição (f_r).

Considere-se, então, f_r e f_t rotulações em S_r e S_t , onde $r, t \in \{1, 2, \dots, n\}$. Constrói-se um operador* soma (+), tal que:

$$f_r + f_t \text{ é uma rotulação em } S_r \cup S_t,$$

$$\text{onde: } s \in (S_r \cap S_t), (f_r + f_t)(s) = f_r(s) \cup f_t(s),$$

$$s \in (S_r - S_t), (f_r + f_t)(s) = f_r(s).$$

Disto decorre diretamente que:

PROPOSIÇÃO 3.7*

O operador soma é associativo e comutativo.

* *Velasco and Rosenfeld (1979).*

Em vista disto, pode-se caracterizar a rotulação, que serve de ponto de partida no pretense processo único de relaxação, como $\sum_{i=1}^n f_i$, em A , e abreviá-la por $\sum f_i$.

Decorrente das considerações anteriores afigura-se o significativo resultado abaixo:

PROPOSIÇÃO 3.8

Se $s_0 \in A$
 $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, tal que $s_0 \in S_j$,

então $f_j(s_0) = (\sum f_i)(s_0)$.

A seguir, faz-se necessário tratar de algumas noções cujas definições participam diretamente da definição do operador de relaxação que será aqui proposto.

O fato de a técnica de relaxação lidar apenas com compatibilidades locais conduz à abstração dos nós localmente envolvidos por um dado segmento em exame. Denomina-se, então, vizinhança de um segmento (com relação a um subconjunto A de $2^R - \{\emptyset\}$) o conjunto formado pelo segmento e por todos aqueles segmentos que com ele se relacionam (via β) e pertencem a A . Ou seja:

DEFINIÇÃO 3.8

V_S^A é a vizinhança de s com relação a A ,

\iff

$$V_S^A = \{s' \in A \mid s \beta s'\} \cup \{s\}.$$

Dado que os conjuntos de segmentos, objeto desta investigação, são partições do conjunto de regiões, um tipo singular de subconjunto da vizinhança, que se diz ser uma classe de β -ênica, é aquele cujos elementos são disjuntos dois a dois. Mais precisamente diz-se que:

DEFINIÇÃO 3.9

C_S^A é uma classe de β -ênica de s com relação a A ,

↔

$s \in C_S^A$,

$C_S^A \subseteq V_S^A$,

$\forall s', s'' \in C_S^A (s' \neq s'') \implies s' \cap s'' = \emptyset$.

Refinando mais ainda tal abstração, define-se a particularização de classe de β -ênica do seguinte modo:

DEFINIÇÃO 3.10

M_S^A é uma classe máxima de β -ênica de s com relação a A ,

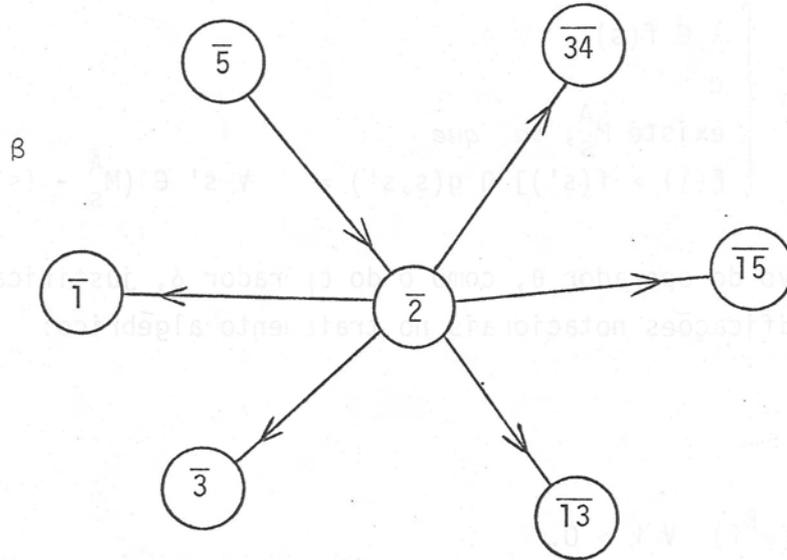
↔

M_S^A é uma classe de β -ênica de s com relação a A e não está contida propriamente em nenhuma outra classe de β -ênica de s com relação a A .

A Figura 3.5 ilustra tais conceitos.

$$R = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$A = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{34}, \bar{5}, \bar{3}, \bar{45}, \bar{13}, \bar{15}\}$$



$$V_{\bar{2}}^A = \{\bar{2}, \bar{1}, \bar{34}, \bar{15}, \bar{13}, \bar{3}\}$$

classes de β -ênica de $\bar{2}$ com relação a A

$$\{\bar{2}, \bar{1}\}, \{\bar{2}, \bar{15}\}, \{\bar{2}, \bar{1}, \bar{3}\} \text{ etc.}$$

classes máximas de β -ênica de $\bar{2}$ com relação a A

$$\{\bar{2}, \bar{1}, \bar{34}\}, \{\bar{2}, \bar{1}, \bar{3}\}, \{\bar{2}, \bar{13}\}, \{\bar{2}, \bar{15}, \bar{34}\}, \{\bar{2}, \bar{3}, \bar{15}\}$$

Fig. 3.5 - Ilustração dos conceitos de vizinhança e classes de β -ênica.

Agora há condição de propor o operador de relaxação (θ) que soluciona o problema em análise. Ele conserva um rótulo de um segmento, se e somente se, em pelo menos uma classe máxima de β -ênica des

te segmento o rótulo for compatível com pelo menos um rótulo de cada um dos segmentos vizinhos. Isto é:

DEFINIÇÃO 3.11

$$\lambda \in \theta f(s) \iff \begin{cases} \lambda \in f(s) \\ \text{e} \\ \text{existe } M_s^A, \text{ tal que} \\ [(\lambda) \times f(s')] \cap g(s, s') \neq \emptyset \quad \forall s' \in (M_s^A - \{s\}). \end{cases}$$

O uso iterativo do operador θ , como o do operador δ , justifica as seguintes simplificações notacionais no tratamento algébrico:

$$\theta^0 f = f,$$

$$\theta^{k+1} f = \theta(\theta^k f) \quad \forall k > 0.$$

A justificativa da validade do operador θ seria assegurada pela condição:

$$\theta^k (\sum f_i) = \sum (\delta^k f_i) \quad \text{para algum } k \geq 0.$$

Resta, portanto, argumentar dedutivamente as evidências de tal proposição.

Inicialmente, os conceitos de vizinhança e classe de β -ência são diretamente envolvidos em várias proposições que levam a comprovar uma singular correspondência entre todas as partições que contêm um dado segmento e suas classes máximas de β -ência com relação a A . Deve-se aplicar em tal resultado, vários teoremas que envolvem os operadores δ e θ permitem, finalmente, atingir a justificativa da solução proposta.

Antes de enunciar o lema que garante que uma classe máxima de β -ência numa partição é também uma classe máxima com relação a

união de todas as partições, apresentam-se cinco proposições em que este lema se fundamenta.

PROPOSIÇÃO 3.9

Se $M_{S_0}^A$ é uma classe máxima de β -ênica de s_0 com relação a A e $A \subset B$,

então $M_{S_0}^A$ é uma classe de β -ênica de s_0 com relação a B .

DEMONSTRAÇÃO

1) da hipótese e da Definição 3.10,

$$s_0 \in M_{S_0}^A;$$

2) tal como em (1),

$$M_{S_0}^A \subset A;$$

3) de (2) e da hipótese,

$$M_{S_0}^A \subset B;$$

4) de (3) e (1),

$$s_0 \in B;$$

5) da hipótese e da Definição 3.10,

$$\# M_{S_0}^A > 1;$$

6) tal como em (5),

$$\forall s', s'' \in M_{S_0}^A (s' \neq s'') \implies s' \cap s'' = \emptyset;$$

7) de (5) e (1),

$$\text{considere-se } s \in M_{S_0}^A, s \neq s_0;$$

8) de (7) e da Definição 3.10,

$$s_0 \beta s;$$

9) de (7) e (3),

$$s \in B;$$

10) de (9), (8), (4) e da Definição 3.8,

$$s \in V_{s_0}^B;$$

11) de (4) e da Definição 3.8,

$$s_0 \in V_{s_0}^B;$$

12) de (7), (10) e (11),

$$M_{s_0}^A \subseteq V_{s_0}^B;$$

13) de (1), (12), (5), (6) e da Definição 3.9,

$M_{s_0}^A$ é uma classe de β -ênica de s_0 com relação a B.

PROPOSIÇÃO 3.10

Se C_s^A é uma classe de β -ênica de s com relação a A,

então existe pelo menos uma classe (M_s^A) máxima de β -ênica de s com relação a A, tal que $C_s^A \subseteq M_s^A$.

A obtenção de tal classe máxima pode ser realizada pelo simples algoritmo seguinte:

entrada : C_s^A e V_s^A ;

saída : M_s^A tal que $C_s^A \subseteq M_s^A$;

início

$$M_s^A := C_s^A;$$

$$X := V_s^A - C_s^A;$$

enquanto X for não-vazio

faça início

tome $s \in X$;

se $\{s\} \cap M_s^A = \emptyset$ então $M_s^A := M_s^A \cup \{s\}$;

$X := X - \{s\}$;

fim;

fim.

A equivalência entre vizinhança e classe máxima de β -ên-
cia numa partição é o que decorre facilmente.

PROPOSIÇÃO 3.11

$V_S^{S_i}$ é a vizinhança de s com relação a S_i ,

$\iff V_S^{S_i}$ é uma classe máxima de β -ên-
cia de s com relação a S_i .

COLORÁRIO 3.1

Se $s_0 \in S_i$,

então existe uma única classe máxima de β -ên-
cia de s_0 com relação a S_i .

As outras duas proposições são:

PROPOSIÇÃO 3.12

Se $s_0 \in S_i$,

$s' \in (A - S_i)$,

$s_0 \beta s'$,

então

existe $s'' \in S_i$ tal que $\begin{cases} s'' \beta s_0 \\ s' \cap s'' \neq \emptyset. \end{cases}$

DEMONSTRAÇÃO

1) da hipótese,

$$s' \cap s_0 = \emptyset;$$

2) tal como em (1),

existe $r' \in s'$, $r_0 \in s_0$, tal que $\{r_0\} \beta \{r'\}$;

3) de (2) e (1),

$$r' \notin s_0;$$

4) de (3), hipótese e como S_i é uma partição de R ,

existe $s'' \in S_i$, tal que $r' \in s''$;

5) da hipótese, (3), (4) e como S_i é uma partição de R ,

$$s'' \cap s_0 = \emptyset;$$

6) de (2), (4), (5),

$$s_0 \beta s'';$$

7) de (2) e (4),

$$s' \cap s'' \neq \emptyset;$$

8) de (4), (6) e (7),

$$\text{existe } s'' \in S_i, \text{ tal que } \begin{cases} s_0 \beta s'' \\ s' \cap s'' \neq \emptyset. \end{cases}$$

PROPOSIÇÃO 3.13

Se $M_{s_0}^{S_i}$ é a classe máxima de β -ênica de s_0 com relação a S_i ,

$C_{s_0}^A$ é uma classe de β -ênica de s_0 com relação a A ,

$$s \in (C_{s_0}^A - M_{s_0}^{S_i}),$$

então

$$s \notin S_i.$$

DEMONSTRAÇÃO

1) como hipótese provisória,

$$s \in S_i;$$

2) da hipótese,

$$s \in C_{s_0}^A;$$

3) de (2), da hipótese e da Definição 3.9,

$$s_0 \beta s;$$

4) da hipótese,

$$s \in M_{s_0}^{S_i};$$

5) de (4) e da Proposição 3.11,

$$s \in V_{s_0}^{S_i};$$

6) de (5) e (1),
 $s_0 \beta s;$

7) de (1), (3) e (6),
 $s \notin S_i.$

LEMA 3.2

Se $M_{S_0}^{S_i}$ é a classe máxima de β -ênica de s_0 com relação a S_i ,

$$S_i \subseteq A,$$

então $M_{S_0}^{S_i}$ é uma classe máxima de β -ênica de s_0 com relação a A .

DEMONSTRAÇÃO

1) da hipótese

$$S_i \subseteq A;$$

2) da hipótese, (1) e da Proposição 3.9,

$M_{S_0}^{S_i}$ é uma classe de β -ênica de s_0 com relação a A ;

3) de (2) e da Proposição 3.10,

existe uma classe máxima de β -ênica de s_0 com relação a $A(M_{S_0}^A)$, tal que $M_{S_0}^{S_i} \subseteq M_{S_0}^A$;

4) de (3), como hipótese provisória,

$$M_{S_0}^{S_i} \neq M_{S_0}^A;$$

5) de (3) e (4),

considere-se $s' \in (M_{S_0}^A - M_{S_0}^{S_i})$;

6) de (5), (3) e da Definição 3.10,

$$s' \in A;$$

7) tal como (6),

$$s_0 \beta s';$$

8) da hipótese (3), (4) e da Proposição 3.13,

$$s' \notin S_i;$$

9) da hipótese, (6), (7), (8) e da Proposição 3.12,

$$\text{existe } s'' \in S_1, \text{ tal que } \begin{cases} s_0 \beta s'' \\ s' \cap s'' = \emptyset; \end{cases}$$

10) de (9) e da Definição 3.8,

$$s'' \in V_{s_0}^{S_1};$$

11) de (10), hipótese e da Proposição 3.11,

$$s'' \in M_{s_0}^{S_1};$$

12) de (11) e (3),

$$s'' \in M_{s_0}^A;$$

13) de (5), (12), (3) e da Definição 3.10,

$$s' \cap s'' = \emptyset;$$

14) de (4), (9) e (13),

$$M_{s_0}^{S_1} = M_{s_0}^A;$$

15) de (14) e (3),

$$M_{s_0}^{S_1} \text{ é uma classe máxima de } \beta\text{-ênica de } s_0 \text{ com relação a } A.$$

Agora deve-se demonstrar a reciprocidade do Lema 3.2. Antes, porém, necessitam-se de dois resultados adicionais. O primeiro de corre imediatamente da Definição 3.10.

PROPOSIÇÃO 3.14

Se $M_{s_0}^A = \{s_0, s_1, \dots, s_m\}$ é uma classe máxima de β -ênica de s_0 com relação a A ,

então $M_{s_0}^A$ é uma partição de $s_0 \cup s_1 \cup \dots \cup s_m$.

PROPOSIÇÃO 3.15

Se $M_{S_0}^A$ é uma classe máxima de β -ênica de s_0 com relação a A

$$M_{S_0}^A \subset B \subset A,$$

então

$M_{S_0}^A$ é uma classe máxima de β -ênica de s_0 com relação a B .

DEMONSTRAÇÃO

1) da hipótese e da Definição 3.10,

$$\left. \begin{array}{l} s \in (A - M_{S_0}^A) \\ s_0 \beta s \end{array} \right\} \implies \text{existe } s' \in M_{S_0}^A, \text{ tal que } s' \cap s \neq \emptyset;$$

2) da hipótese,

$$s \in (B - M_{S_0}^A) \implies s \in (A - M_{S_0}^A);$$

3) de (2) e (1),

$$\left. \begin{array}{l} s \in (B - M_{S_0}^A) \\ s_0 \beta s \end{array} \right\} \implies \text{existe } s' \in M_{S_0}^A, \text{ tal que } s' \cap s \neq \emptyset;$$

4) de (3) e da Definição 3.10,

$M_{S_0}^A$ é uma classe máxima de β -ênica de s_0 com relação a B .

LEMA 3.3

Se $M_{S_0}^A$ é uma classe máxima de β -ênica de s_0 com relação a A e $r \in R \implies \{r\} \in A$,

então existe pelo menos um $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, tal que $M_{S_0}^A$ é a classe máxima de β -ênica de s_0 com relação a S_j ¹⁰.

¹⁰ S_1, S_2, \dots, S_n são todas as partições de R possíveis de obter apenas com elementos de A .

DEMONSTRAÇÃO

1) da hipótese e da Definição 3.10,

$$M_{s_0}^A = \{s_0, s_1, s_2, \dots, s_m\} \quad m \geq 1;$$

2) da hipótese de (1) e da Proposição 3.14,

$$M_{s_0}^A \text{ é uma partição de } s_0 \cup s_1 \cup \dots \cup s_m;$$

3) de (1), da hipótese e da Definição 3.10,

$$s_0 \cup s_1 \cup \dots \cup s_m \subseteq R;$$

4) 1º CASO,

$$s_0 \cup s_1 \cup \dots \cup s_m \neq R;$$

5) de (3), (4) e da Proposição A.4,

$$\text{existe } Y \subseteq A, \text{ tal que } Y \text{ é uma partição de } R - (s_0 \cup s_1 \cup \dots \cup s_m);$$

6) de (1) e (5),

$$\text{considere-se } Y \cup M_{s_0}^A;$$

7) de (2), (5), (6) e da Proposição A.5,

$$Y \cup M_{s_0}^A \text{ é uma partição de } R \text{ e } Y \cup M_{s_0}^A \subseteq A, \text{ ou seja,}$$

$$\text{existe } j \in \{1, 2, \dots, s\}, \text{ tal que } Y \cup M_{s_0}^A = S_j;$$

8) de (6) e (7),

$$M_{s_0}^A \subseteq S_j;$$

9) de (7) e da Proposição A.1,

$$S_j \subseteq A;$$

10) da hipótese, (8), (9) e da Proposição 3.15,

$$M_{s_0}^A \text{ é uma classe máxima de } \beta\text{-ênica de } s_0 \text{ com relação a } S_j;$$

11) 2º CASO

$$s_0 \cup s_1 \cup \dots \cup s_m = R;$$

12) de (1), (2) e (11),

$M_{S_0}^A \subset A$ é uma partição de R , ou seja,

existe $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, tal que $M_{S_0}^A = S_j$;

13) de (12), e da hipótese,

$M_{S_0}^A$ é uma classe máxima de β -ênica de s_0 com relação a S_j ;

14) de (4), (7), (10) e (11), (12), (13) e do Corolário 3.1,

existe $j \in \{1, 2, \dots, s\}$, tal que $M_{S_0}^A$ é a classe máxima de β -ênica de s_0 com relação a S_j .

Com os Lemas 3.2 e 3.3 está assegurada uma importante correspondência entre as partições que contêm um dado segmento e suas classes máxima de β -ênica com relação a A . As proposições, abaixo, que inter-relacionam os operadores δ e θ encerram finalmente a argumentação dedutiva.

Os dois teoremas seguintes evidenciam a equivalência, numa partição, entre os operadores δ e θ . O primeiro é facilmente dedutível das definições dos operadores e da Proposição 3.11 (equivalência entre vizinhança e classe máxima, numa partição).

PROPOSIÇÃO 3.16

$$j \in \{1, 2, \dots, n\} \implies \theta f_j = \delta f_j.$$

PROPOSIÇÃO 3.17

$$\forall k \geq 0$$

$$j \in \{1, 2, \dots, n\} \implies \theta^k f_j = \delta^k f_j.$$

DEMONSTRAÇÃO

1) da Proposição 3.16

para $k = 1$,

$$j \in \{1, 2, \dots, n\} \implies \theta^{k f_j} = \delta^{k f_j};$$

2) base indutiva

para algum $k \geq 1$,

$$j \in \{1, 2, \dots, n\} \implies \theta^{k f_j} = \delta^{k f_j};$$

3)

seja $j \in \{1, 2, \dots, n\}$

$s_0 \in S_j$

$$\lambda \in \theta^{k+1} f_j(s_0);$$

4) de (3) e da Definição 3.11,

$$\lambda \in \theta^{k f_j}(s_0) \text{ e}$$

existe $M_{s_0}^{S_j}$, tal que $[(\lambda) \times \theta^{k f_j}(s')] \cap g(s_0, s') \neq \emptyset$

$$\forall s' \in (M_{s_0}^{S_j} - \{s_0\});$$

5) de (4), da Proposição 3.11 e do Corolário 3.1,

$$\lambda \in \theta^{k f_j}(s_0) \text{ e}$$

$$[(\lambda) \times \theta^{k f_j}(s')] \cap g(s_0, s') \neq \emptyset \quad \forall s' \in (V_{s_0}^{S_j} - \{s_0\});$$

6) de (5) e (2),

$$\lambda \in \delta^{k f_j}(s_0) \text{ e}$$

$$[(\lambda) \times \delta^{k f_j}(s')] \cap g(s_0, s') \neq \emptyset \quad \forall s' \in (V_{s_0}^{S_j} - \{s_0\});$$

7) de (6) e da Definição 3.8,

$$\lambda \in \delta^{k f_j}(s_0) \text{ e}$$

$$[(\lambda) \times \delta^{k f_j}(s')] \cap g(s_0, s') \neq \emptyset \quad \forall s' \in S_j, \quad s_0 \beta s';$$

8) de (7) e da Definição 3.7,

$$\lambda \in \theta^{k+1} f_j(s_0)$$

9) de (3) e (8),

$$j \in \{1, 2, \dots, n\} \implies \theta^{k+1} f_j \subseteq \delta^{k+1} f_j;$$

10)

seja $\lambda \in \delta^{k+1}f_j(s_0)$, onde $s_0 \in S_j$ e $j \in \{1, 2, \dots, n\}$;

11) de (10) e da Definição 3.7,

$$\lambda \in \delta^k f_j(s_0)$$

e

$$[\{\lambda\} \times \delta^k f_j(s')] \cap g(s_0, s') \neq \emptyset \quad \forall s' \in S_j, s_0 \beta s';$$

12) de (11), (2) e da Definição 3.8,

$$\lambda \in \theta^k f_j(s_0)$$

e

$$[\{\lambda\} \times \theta^k f_j(s')] \cap g(s_0, s') \neq \emptyset \quad \forall s' \in (V_{S_0}^{S_j} - \{s_0\});$$

13) de (12), da Proposição 3.11 e do Lema 3.2,

$$V_{S_0}^{S_j} = M_{S_0}^{S_j} \quad e$$

$$\text{existe } M_{S_0}^{2R}, \text{ tal que } M_{S_0}^{S_j} = M_{S_0}^{2R};$$

14) de (12), (13) e da Definição 3.11,

$$\lambda \in \theta^{k+1} f_j(s_0);$$

15) de (10) e (14),

$$j \in \{1, 2, \dots, n\} \implies \delta^{k+1} f_j \subseteq \theta^{k+1} f_j;$$

16) de (9) e (15),

$$j \in \{1, 2, \dots, n\} \implies \theta^{k+1} f_j = \delta^{k+1} f_j;$$

17) de (1), (2), (16) e por indução,

$$\forall k \geq 0$$

$$j \in \{1, 2, \dots, n\} \implies \theta^k f_j = \delta^k f_j.$$

A seguir, relacionam-se as rotulações de cada partição com a união de todas elas.

PROPOSIÇÃO 3.18

$$\left. \begin{array}{l} s_0 \in A \\ j \in \{1, 2, \dots, n\}, \text{ tal que } s_0 \in S_j \end{array} \right\} \rightarrow \delta f_j(s_0) \subseteq \theta(\Sigma f_j(s_0)).$$

DEMONSTRAÇÃO

1)

seja $\lambda \in \delta f_j(s_0)$

2) de (1) e da Definição 3.7,

$\lambda \in f_j(s_0)$

e

$[(\lambda) \times f_j(s')] \cap g(s_0, s') \neq \emptyset \quad \forall s' \in S_j, s_0 \beta s'$;

3) de (2), da Proposição 3.8 e da Definição 3.8,

$\lambda \in \Sigma f_j(s_0)$

e

$[(\lambda) \times \Sigma f_j(s')] \cap g(s_0, s') \neq \emptyset \quad \forall s' \in (V_{S_0}^{S_j} - \{s_0\})$;

4) de (3), da Proposição 3.11,

$\lambda \in \Sigma f_j(s_0)$

e

$[(\lambda) \times \Sigma f_j(s')] \cap g(s_0, s') \neq \emptyset \quad \forall s' \in (M_{S_0}^{S_j} - \{s_0\})$;

5) de (4) e do Lema 3.2,

existe $M_{S_0}^A$, tal que $M_{S_0}^A = M_{S_0}^{S_j}$;

6) de (4) e (5),

$\lambda \in \Sigma f_j(s_0)$

e

existe $M_{S_0}^A$, tal que $[(\lambda) \times \Sigma f_j(s')] \cap g(s_0, s') \neq \emptyset$

$\forall s' \in (M_{S_0}^A - \{s_0\})$;

7) de (6) e da Definição 3.11,

$\lambda \in \theta(\Sigma f_j(s_0))$;

8) de (1) e (7),

$$\delta f_j(s_0) \subseteq \theta(\Sigma f_i(s_0)).$$

PROPOSIÇÃO 3.19

$$\left. \begin{array}{l} \forall k \geq 0, \\ s_0 \in A, \\ j \in \{1, 2, \dots, n\}, \text{ tal que } s_0 \in S_j \end{array} \right\} \Rightarrow \delta^k f_j(s_0) \subseteq \theta^k(\Sigma f_i(s_0)).$$

DEMONSTRAÇÃO

1) da Proposição 3.18

para $k = 1$,

$s_0 \in A$,

$j \in \{1, 2, \dots, n\}$, tal que $s_0 \in S_j$

$$\left. \begin{array}{l} \text{para } k = 1, \\ s_0 \in A, \\ j \in \{1, 2, \dots, n\}, \text{ tal que } s_0 \in S_j \end{array} \right\} \Rightarrow \delta^k f_j(s_0) \subseteq \theta^k(\Sigma f_i(s_0)).$$

2) base indutiva

para algum $k \geq 1$,

$s_0 \in A$,

$j \in \{1, 2, \dots, n\}$, tal que $s_0 \in S_j$

$$\left. \begin{array}{l} \text{para algum } k \geq 1, \\ s_0 \in A, \\ j \in \{1, 2, \dots, n\}, \text{ tal que } s_0 \in S_j \end{array} \right\} \Rightarrow \delta^k f_j(s_0) \subseteq \theta^k(\Sigma f_i(s_0)).$$

3)

seja $\lambda \in \delta^{k+1} f_j(s_0)$;

4) de (3) e da Definição 3.7,

$\lambda \in \delta^k f_j(s_0)$

e

$[\{\lambda\} \times \delta^k f_j(s')] \cap g(s_0, s') \neq \emptyset \quad \forall s' \in S_j, s_0 \beta s'$;

5) de (4), (2) e da Definição 3.8,

$\lambda \in \theta^k(\Sigma f_i(s_0))$

e

$[\{\lambda\} \times \theta^k(\Sigma f_i(s_0))] \cap g(s_0, s') \neq \emptyset \quad \forall s' \in (V_{S_0}^{S_j} - \{s_0\})$;

6) de (5), da Proposição 3.11 e do Lema 3.2,

$V_{S_0}^{S_j} = M_{S_0}^{S_j}$ e

existe $M_{S_0}^A$, tal que $M_{S_0}^{S_j} = M_{S_0}^A$;

7) de (5), (6) e da Definição 3.11,

$$\lambda \in \theta^{k+1}(\Sigma f_i(s_0));$$

8) de (3) e (7),

$$\delta^{k+1}f_j(s_0) \subseteq \theta^{k+1}(\Sigma f_i(s_0));$$

9) da Proposição 3.8, (1), (2), (8) e por indução,

$$\left. \begin{array}{l} \forall k \geq 0, \\ s_0 \in A, \\ j \in \{1, 2, \dots, n\}, \text{ tal que } s_0 \in S_j \end{array} \right\} \Rightarrow \delta^k f_j(s_0) \subseteq \theta^k(\Sigma f_i(s_0)).$$

PROPOSIÇÃO 3.20

$$\left. \begin{array}{l} s_0 \in A \\ \lambda \in \theta(\Sigma f_i(s_0)) \end{array} \right\} \rightarrow \text{existe } j \in \{1, 2, \dots, n\} \text{ tal que } \lambda \in \delta f_j(s_0).$$

DEMONSTRAÇÃO

1) da hipótese e da Definição 3.11,

$$\lambda \in \Sigma f_i(s_0)$$

e

$$\text{existe } M_{s_0}^A, \text{ tal que } [(\lambda) \times \Sigma f_i(s')] \cap g(s_0, s') \neq \emptyset$$

$$\forall s' \in (M_{s_0}^A - \{s_0\});$$

2) de (1) e do Lema 3.3,

$$\text{existe } j \in \{1, 2, \dots, n\}, \text{ tal que } M_{s_0}^A = M_{s_0}^{S_j};$$

3) de (1), (2) e da Proposição 3.8,

$$\lambda \in f_j(s_0)$$

e

$$[(\lambda) \times f_j(s')] \cap g(s_0, s') \neq \emptyset \quad \forall s' \in (M_{s_0}^{S_j} - \{s_0\});$$

4) de (3) e da Definição 3.10,

$$\lambda \in f_j(s_0)$$

e

$$[\{\lambda\} \times f_j(s')] \cap g(s_0, s') \neq \emptyset \quad \forall s' \in S_j, s_0 \beta s';$$

5) de (4) e da Definição 3.7,

$$\lambda \in \delta f_j(s_0);$$

6) de (2) e (5),

existe $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, tal que $\lambda \in \delta f_j(s_0)$.

PROPOSIÇÃO 3.21

$$\left. \begin{array}{l} \forall k \geq 0 \\ s_0 \in A, \\ \lambda \in \theta^k(\Sigma f_i(s_0)) \end{array} \right\} \Rightarrow \text{existe } j \in \{1, 2, \dots, n\}, \text{ tal que } \lambda \in \delta^k f_j(s_0).$$

DEMONSTRAÇÃO

1) da Proposição 3.20

$$\left. \begin{array}{l} \text{para } k = 1, \\ s_0 \in A, \\ \lambda \in \theta^k(\Sigma f_i(s_0)) \end{array} \right\} \Rightarrow \text{existe } j \in \{1, 2, \dots, n\}, \text{ tal que } \lambda \in \delta^k f_j(s_0);$$

2) base indutiva

$$\left. \begin{array}{l} \text{para algum } k \geq 1 \\ s_0 \in A, \\ \lambda \in \theta^k(\Sigma f_i(s_0)) \end{array} \right\} \Rightarrow \text{existe } j \in \{1, 2, \dots, n\}, \text{ tal que } \lambda \in \delta^k f_j(s_0);$$

3)

seja $\lambda \in \theta^{k+1}(\Sigma f_i(s_0))$;

4) de (3) e da Definição 3.11,

$$\lambda \in \theta^k(\Sigma f_i(s_0))$$

e

existe $M_{s_0}^A$, tal que $[\{\lambda\} \times \theta^k(\Sigma f_i(s'))] \cap g(s_0, s') \neq \emptyset$
 $\forall s' \in (M_{s_0}^A - \{s_0\})$;

5) de (4) e do Lema 3.3,

existe $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, tal que $M_{s_0}^A = M_{s_0}^{S_j}$;

6) de (4) e (5),

$$\lambda \in \theta^k(\Sigma f_i(s_0))$$

e

$$[\{\lambda\} \times \theta^k(\Sigma f_i(s'))] \cap g(s_0, s') \neq \emptyset \quad \forall s' \in (M_{s_0}^{S_j} - \{s_0\});$$

7) de (5), (6) e da Proposição 3.8,

$$\lambda \in \theta^k f_j(s_0)$$

e

$$[\{\lambda\} \times \theta^k f_j(s')] \cap g(s_0, s') \neq \emptyset \quad \forall s' \in (M_{s_0}^{S_j} - \{s_0\});$$

8) de (7) e da Definição 3.10,

$$\lambda \in \theta^k f_j(s_0)$$

e

$$[\{\lambda\} \times \theta^k f_j(s')] \cap g(s_0, s') \neq \emptyset \quad \forall s' \in S_j, s_0 \beta s';$$

9) de (8) e da Definição 3.11,

$$\lambda \in \theta^{k+1} f_j(s_0);$$

10) de (5) e (9),

$$\text{existe } j \in \{1, 2, \dots, n\}, \text{ tal que } \lambda \in \theta^{k+1} f_j(s_0);$$

11) da Proposição 3.8, (1), (2), (3), (10) e por indução,

$$\left. \begin{array}{l} \forall k \geq 0, \\ s_0 \in A, \\ \lambda \in \theta^k(\Sigma f_i(s_0)) \end{array} \right\} \Rightarrow \text{existe } j \in \{1, 2, \dots, n\}, \text{ tal que } \lambda \in \delta^k f_j(s_0).$$

Finalmente, resulta a proposição procurada:

PROPOSIÇÃO 3.22

$$\theta^k(\Sigma f_i) = \Sigma(\delta^k f_i), \quad \forall k \geq 0.$$

DEMONSTRAÇÃO

1)

seja $s_0 \in A$,
 $k \geq 0$,
 $\lambda \in \Sigma(\delta^k f_i(s_0))$;

2) de (1) e da definição do operador soma (+),

existe $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, tal que $\lambda \in \delta^k f_j(s_0)$;

3) de (1), (2) e da Proposição 3.19,

$\lambda \in \theta^k(\Sigma f_i(s_0))$;

4) de (1) e (3),

$\Sigma(\delta^k f_i) \subseteq \theta^k(\Sigma f_i)$;

5)

seja $s_0 \in A$,
 $k \geq 0$,
 $\lambda \in \theta^k(\Sigma f_i(s_0))$;

6) de (5) e da Proposição 3.21,

existe $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, tal que $\lambda \in \delta^k f_j(s_0)$;

7) de (6) e da definição do operador soma (+),

$\lambda \in \Sigma(\delta^k f_i(s_0))$;

8) de (5) e (7),

$\theta^k(\Sigma f_i) \subseteq \Sigma(\delta^k f_i)$;

9) de (1), (4), (5) e (8),

$\theta^k(\Sigma f_i) = \Sigma(\delta^k f_i), \quad \forall k \geq 0$.

Dado que o operador θ apenas elimina rótulos, pode-se assegurar que existe $k \geq 0$, tal que $\theta^k(\Sigma f_i) = \theta^{k+j}(\Sigma f_i) \quad \forall j \geq 1$. Para tal k , denota-se $\theta^k(\Sigma f_i)$ por $\theta^\infty(\Sigma f_i)$.

Pode-se então enunciar, numa notação sucinta, uma conclusão fundamental imediatamente decorrente da Proposição 2.2 e das Proposições 3.5 e 3.6.

COROLÁRIO 3.2

$$\theta^{\infty}(\Sigma f_i) = \Sigma(\delta^{\infty} f_i).$$

O que se obtém, num único processo de relaxação, ao aplicar o operador θ à união das rotulações de todas as partições de R , obtíveis de A , é equivalente à união das rotulações consistentes máximas, obtidas por tantos processos de relaxação quantos foram os números de partições. Isto resolve de modo satisfatório a questão abordada. É importante lembrar a restrição imposta pelo Lema 3.3 ao conjunto de segmentos adotado. No capítulo seguinte é argüido que tal condição não constitui empecilho à generalidade de aplicação desta abordagem.

Estabelecida a solução algébrica, resta buscar a resolução do problema algorítmicamente. Examina-se de início o algoritmo de obtenção das classes máximas e, a seguir, o de aplicação do operador θ , uma vez que este se utiliza da saída daquele.

A entrada do primeiro algoritmo é a vizinhança de um segmento com relação a um conjunto A de segmentos (s e $V_s^A - \{s\}$), e a saída, todas as classes máximas (M_s^A) de β -ênica de s com relação a A .

Seja o grafo não-direcionado (G_V), tendo como vértices os segmentos relacionados a s , via β , de modo que quaisquer dois segmentos disjuntos estão ligados por um arco, ou seja:

$$G_V = (V_s^A - \{s\}, E, \phi)$$
$$\text{tal que } \phi(e) = \langle s', s'' \rangle^{11} \iff s' \cap s'' = \emptyset.$$

¹¹ $\langle s', s'' \rangle$ representa um par não-ordenado constituído de elementos de $V_s^A - \{s\}$.

Antes de prosseguir, considerem-se alguns conceitos da Teoria dos Grafos que tem utilização imediata na argumentação seguinte.

DEFINIÇÃO 3.12*

Um grafo¹² é dito completo se, e somente se, qualquer de seus vértices for adjacente a todos os outros.

DEFINIÇÃO 3.13*

Um subgrafo completo de um grafo¹² G é dito máximo se, e somente se, este subgrafo não estiver contido em nenhum outro subgrafo completo de G .

DEFINIÇÃO 3.14*

Um clique de um grafo¹² é um seu subgrafo completo máximo.

Como assegura as duas próximas proposições, demonstra-se que determinar todas as classes máximas de β -ênica de s é equivalente a encontrar os cliques do grafo G_V .

PROPOSIÇÃO 3.23

Se M_S^A é uma classe máxima de β -ênica de s com relação a A , então

um subgrafo de G_V formado pelos elementos pertencentes a $M_S^A - \{s\}$ é um clique.

¹² Não-direcionado.

* Harary (1972), p. 20.

DEMONSTRAÇÃO

1)

considere-se o subgrafo (G') de G_V formado por $M_S^A - \{s\}$;

2) de (1),

tome $s', s'' \in M_S^A - \{s\}$;

3) de (2) e da Definição 3.10,

$s' \cap s'' = \emptyset$;

4) de (3) e da definição de G_V ,

existe $e \in E$, tal que $\phi(e) = \langle s', s'' \rangle$;

5) de (2), (4) e da Definição 3.12,

G' é completo;

6)

considere-se um subgrafo G'' de G_V ,

tal que $V(G'') \supseteq M_S^A - \{s\}$ ¹³;

7) de (6), da hipótese e da Definição 3.10,

$\left. \begin{array}{l} s''' \in V(G'') \\ s''' \notin M_S^A - \{s\} \end{array} \right\} \longrightarrow \text{existe } s^{IV} \in M_S^A - \{s\}, \text{ tal que } \\ s''' \cap s^{IV} \neq \emptyset;$

8) de (6), (7), da Definição 3.12 e da definição de G_V ,

G'' não é completo;

9) de (5), (6) e (8),

G' é completo máximo.

¹³ $V(G'')$ simboliza o conjunto de vértices do subgrafo G'' .

PROPOSIÇÃO 3.24

Se um subgrafo (G') de G_V formado pelos vértices de $X \subseteq V_S^A - \{s\}$ é um clique,
então $X \cup \{s\}$ é uma classe máxima de β -ênica de s com relação a A .

DEMONSTRAÇÃO

- 1) da hipótese,
quaisquer dois vértices de G' são adjacentes;
- 2) de (1) e da definição de G_V ,
quaisquer dois vértices de G' são disjuntos;
- 3)
seja $s' \in V_S^A - \{s\}$, tal que $s' \notin X$ ¹⁴;
- 4) de (3) e da hipótese,
existe $s'' \in X$, tal que s' e s'' não são adjacentes;
- 5) de (4) e da definição de G_V ,
 $s' \cap s'' \neq \emptyset$;
- 6) da Definição 3.14,
 $s \cap s''' = \emptyset, \forall s''' \in X$;
- 7) de (2), (5), (6) e da Definição 3.10,
 $X \cup \{s\}$ é uma classe máxima de β -ênica de s com relação a A .

Infelizmente, a Teoria da Complexidade de Algoritmos de mostra que a determinação dos cliques de um grafo é um problema NP-completo. Apesar disto, já foram obtidos algoritmos¹⁵ cujos comportamentos são aceitáveis para entradas de tamanho pequeno. No contexto das

¹⁴ Caso $X = V_S^A - \{s\}$ é imediato concluir que $X \cup \{s\}$ é uma classe máxima.

¹⁵ Facilmente encontrada na literatura especializada.

classes máximas, isto significa vizinhanças com cardinalidade não muito grande. Tal condição é satisfeita pelo menos quando β representa a adjacência física entre segmentos. Além disto, é suficiente o tamanho da vizinhança para viabilizar a utilização do operador θ . Convém relembrar a enorme redundância computacional evitada na alternativa em que se considera um processo de relaxação para cada segmentação.

Apresenta-se a seguir um algoritmo que executa as funções do operador de relaxação θ . Toma-se como entrada o conjunto de rótulos associados a um segmento numa iteração qualquer do processo de eliminação, e como saída, os rótulos que permanecem na rotulação da iteração seguinte; ou seja:

entrada: $\theta^k(f(s))$ para $k \geq 0$

saída : $\theta^{k+1}(f(s))$

início

$\theta^{k+1}(f(s)) := \phi$;

Aux := $\theta^k f(s)$;

enquanto Aux $\neq \phi$ e existir a próxima M_S^A faça

início

tome a próxima M_S^A ;

C := Aux;

faça para todo $s' \in M_S^A - \{s\}$

$C := C - \{\lambda \in C \mid [(\lambda) \times \theta^k(f(s'))] \cap g(s, s') = \phi\}$

até o fim ou C = ϕ ;

% C contém os rótulos de s compatíveis com

% todos os segmentos da última classe

% máxima examinada

Aux := Aux - C;

% Aux contém os rótulos de s que não são

% compatíveis em nenhuma das classes máximas

% de s até então examinadas

$\theta^{k+1}(f(s)) := \theta^{k+1}(f(s)) \cup C$;

fim;

fim.

CAPÍTULO 4

UMA ABORDAGEM PARA REDUÇÃO DE AMBIGUIDADE

"Não poderia haver melhor destino para qualquer teoria do que o de indicar o caminho para uma teoria mais abrangente na qual ela continue a viver, como um caso limite".

(Albert Einstein)

4.1 - DESCRIÇÃO

No capítulo anterior realizou-se a seguinte abstração:

- tomou-se como base o conjunto de regiões (R) que constitui, na imagem digitalizada, o reconhecimento inicial de fronteiras e pode ser visto como a saída da representação de baixo nível da cena a analisar;
- dado um subconjunto não-vazio de $2^R - (\emptyset)$, nele definiu-se uma relação binária (β) e, apenas com seus elementos construíram-se todas as possíveis partições de R;
- para cada uma dessas partições associou-se deterministicamente uma rotulação, tal que a atribuição dos rótulos teve como única restrição a compatibilidade com o conhecimento disponível no baixo nível de representação da cena;
- com base num conhecimento a priori do domínio da cena e do inter-relacionamento entre seus constituintes (compatibilidade g), procurou-se obter, para cada partição, sua rotulação consistente máxima (ou seja, consistente com g e contém qualquer possível rotulação consistente) através de um único processo de relaxação.

Neste capítulo, procura-se aplicar este formalismo ao caso real de redução de ambiguidades em segmentações obtidas no nível de representação de objeto, supondo que o conhecimento então disponível seja, no mínimo, logicamente equivalente àquele conferido pela função de compatibilidade g .

As regiões componentes do reconhecimento inicial de fronteiras são convenientemente representadas pelo conjunto R . A relação β em A' , $\phi \neq A' \subseteq 2^R - \{\phi\}$, é arbitrária. E nas abordagens ora conhecidas, conforme se mencionou no Capítulo 2, ela tem sido tomada como a adjacência física.

É importante destacar agora duas considerações fundamentais. Observa-se que nem todo subconjunto de R pode ser considerado um segmento¹⁶, uma vez que estes são obtidos de R a partir apenas de fusões de regiões adjacentes. De forma análoga, nem a toda partição de R pode-se atribuir o significado de segmentação. Porém, é irrefutável que qualquer segmento tem uma representação única em termos de subconjunto de R , e a cada segmentação possível pode-se associar uma, e somente uma, partição de R como modelo satisfatório. Com relação às demais construções formais, considera-se plenamente adaptável a questão aqui abordada.

É cabível então caracterizar as condições sob as quais são formados, na prática, os segmentos a partir de regiões (R) que constituem o reconhecimento inicial de fronteiras na imagem digitalizada.

Os segmentos possíveis de constituir o conjunto A' são aqueles resultantes de fusão de regiões adjacentes, ou seja, subgrafos conectados de α . A condição de que toda região é considerada como um segmento não é necessária.

¹⁶ Conforme o significado utilizado no Capítulo 2.

De posse de todas as segmentações (S_1, S_2, \dots, S_k) formadas por elementos de A' , com suas respectivas rotulações compatíveis com as restrições de baixo nível, o problema de interesse, neste capítulo, resume-se em reduzir ao máximo a ambiguidade de cada uma dessas rotulações através de um único processo de relaxação. Pretende-se atingir tal objetivo por intermédio das rotulações consistentes máximas, uma vez que estas podem vir a ser não-ambíguas.

À primeira vista, pode parecer que tal questão é exatamente a mesma tratada no capítulo anterior, quando se propõe o operador θ como solução. Felizmente este operador também é aplicado aqui. Porém, as justificativas apresentadas no Capítulo 3 não são imediatamente aplicáveis neste caso. Observando os pressupostos lá considerados, as conclusões finais obtidas são decisivamente dependentes da hipótese de que toda região é escolhida como um segmento, isto é, $r \in R \implies \{r\} \in A'$. Não sendo, portanto, o que se apresenta no momento.

Para que a abordagem do Capítulo 3 seja aplicável, precisa-se ampliar o conjunto (A') de segmentos de modo a satisfazer a condição anteriormente mencionada. Imediatamente tende-se a indagar acerca da associação de rótulos a adotar para estes segmentos adicionais. O senso comum propõe, então, a associação de rótulos vazios para estes segmentos fictícios, visto que a destituição de interpretação é semanticamente equivalente à interpretação vazia.

Como decorrência disso, é importante observar que novas segmentações são formadas, passando a se constituir em $S_1, S_2, \dots, S_k, S_{k+1}, S_{k+2}, \dots, S_n$. Resumindo simbolicamente, têm-se

$$\Phi \neq A' \subseteq 2^R - \{\Phi\};$$

S_1, S_2, \dots, S_k todas as partições a partir de A' ;

$$A = A' \cup \{\{r\} \mid r \in R \text{ e } \{r\} \notin A'\};$$

$S_1, S_2, \dots, S_k, S_{k+1}, \dots, S_n$ todas as partições a partir de A ;

$$f_j(s) = \phi \forall s \in \{\{r\} | r \in R \text{ e } \{r\} \notin A'\}.$$

Além disso, constata-se que a inclusão de outros subconjuntos de R, mesmo com interpretação não-vazia, não afeta a obtenção das rotulações consistentes máximas das partições S_1, S_2, \dots, S_k , quer via operador δ quer via θ .

Deve-se, a seguir, verificar se a equivalência semântica argüida é corroborada pelas considerações algébricas. Sabe-se que:

$$\Sigma (\delta_{f_i}^{\infty}) = \theta^{\infty}(\Sigma f_i),$$

ou seja,

$$\sum_{j=1}^k (\delta_{f_j}^{\infty}) + \sum_{j=k+1}^n (\delta_{f_j}^{\infty}) = \theta^{\infty}(\Sigma f_i).$$

Decorre, então, que para confirmar o caráter fictício dos subconjuntos introduzidos, as rotulações $\delta_{f_j}^{\infty}$ ($k < j < n$) deveriam, de preferência, ser nulas.

Uma argumentação formal, composta pelos dois teoremas subsequentes, assegura tal condição como consequência da conectabilidade¹⁷ do grafo da relação β em qualquer segmentação S_j ($k < j < n$).

Antes, porém, é oportuno enunciar uma definição e um teorema da álgebra discreta úteis na próxima demonstração.

¹⁷ Diz-se que um grafo é conectado (ou fortemente conectado) quando quaisquer dois nós são mutuamente alcançáveis através de pelo menos um caminho.

DEFINIÇÃO 4.1*

O "cut-set" de um grafo com relação a uma dicotomia $\{N_1, N_2\}$ no seu conjunto de nós é o conjunto de arcos, os quais ligam vértices de N_1 com vértices de N_2 e vice-versa.

PROPOSIÇÃO 4.1*

Se um grafo é conectado,
então

no "cut-set" correspondente a qualquer dicotomia $\{N_1, N_2\}$, no seu conjunto de vértices, existe pelo menos um arco de N_1 para N_2 e pelo menos um arco de N_2 para N_1 .

Inicialmente, enuncia-se uma proposição, logo a seguir utilizada, afirmando que em rotulações consistentes não-nulas, cujos grafos são conectados, inexistem segmentos com rotulação vazia.

PROPOSIÇÃO 4.2

Se o grafo de β em $X(\Phi \neq X \subseteq 2^R - \{\Phi\})$ é conectado e f é uma rotulação de X não-nula e consistente com g em X ,
então

$$f(s) \neq \Phi, \quad \forall s \in X.$$

DEMONSTRAÇÃO

1) da hipótese, da Definição 3.4 e da Definição 3.7,

$$\delta f = f;$$

2) como hipótese provisória,

$$\text{existe } s \in X, \text{ tal que } f(s) = \Phi;$$

3) de (2),

$$\text{considere-se } \bar{X} = \{s \in X \mid f(s) = \Phi\};$$

* Preparata and Yeh (1974), p. 64-65.

- 4) da hipótese, de (2) e (3),
considere-se a dicotomia $(\bar{X}, X - \bar{X})$ de X ;
- 5) da hipótese, de (4) e da Proposição 4.1,
existe $s' \in \bar{X}$ e $s'' \in (X - \bar{X})$ tal que $s' \beta s''$
e
existe $s' \in \bar{X}$ e $s'' \in (X - \bar{X})$ tal que $s'' \beta s'$;
- 6) de (5) e (3) e da hipótese,
considere-se $\lambda \in f(s'')$;
- 7) de (6), (5) e (3) e da Definição 3.7,
 $\lambda \notin \delta f(s'')$;
- 8) de (6) e (7),
 $\delta f \neq f$;
- 9) de (2), (1) e (8),
 $f(s) = \phi, \forall s \in X$.

A seguir, a confirmação de que $\delta_{f_j}^{\infty}$ ($k < j \leq n$) são rotulações nulas, considerando-se que a todo segmento fictício \bar{e} associada a interpretação vazia e que qualquer uma destas segmentações contém, pelo menos, um destes segmentos, ou seja:

$$s \in (A - A') \implies f_j(s) = \phi \text{ e } S_j \cap (A - A') \neq \phi \text{ (} k < j \leq n \text{)} .$$

PROPOSIÇÃO 4.3

Se B é conectado em S_j ($k < j \leq n$),
então

$\delta_{f_j}^{\infty}$ é uma rotulação nula.

DEMONSTRAÇÃO

- 1) da hipótese
1º CASO: $S_j \subseteq (A - A')$;
- 2) da hipótese e de (1),
 $f_j(s) = \phi \forall s \in S_j$;
- 3) de (2),
 $\delta_{f_j}^{\infty}$ é uma rotulação nula;

4) da hipótese,

2º CASO: $S_j \notin (A-A')$;

5) de (4) e da Definição 3.3,

$\delta_{f_j}^\infty$ é consistente;

6) como hipótese provisória,

$\delta_{f_j}^\infty$ não é uma rotulação nula;

7) da hipótese, de (5) e (6) e da Proposição 4.2,

$\delta_{f_j}^\infty(s) \neq \emptyset \quad \forall s \in S_j$;

8) da hipótese,

existe $s' \in S_j$ tal que $f_j(s') = \emptyset$;

9) de (8),

existe $s' \in S_j$ tal que $\delta_{f_j}^\infty(s') = \emptyset$;

10) de (4), (6), (7) e (9),

$\delta_{f_j}^\infty$ é uma rotulação nula;

11) de (1), (3), (4) e (10),

$\delta_{f_j}^\infty$ é uma rotulação nula.

Uma vez demonstrado que basta a conectabilidade de β nas segmentações que contêm segmentos fictícios para que as rotulações consistentes máximas dessas segmentações sejam nulas, examina-se o caso particular da relação binária β , que representa a adjacência física.

Pode-se assegurar que o grafo da adjacência física em qualquer segmentação de R é necessariamente conectado, como consequência da validade desta mesma propriedade no grafo de α no conjunto de regiões R . Tal proposição é válida mesmo sem restringir os segmentos àqueles que podem determinar subgrafos conectados no grafo de α .

PROPOSIÇÃO 4.4

O grafo de β^{18} em qualquer partição (S_i) de R é conectado.

DEMONSTRAÇÃO

1) seja

$$s', s'' \in S_i, \quad s' \neq s'';$$

2) seja

$$r' \in s' \quad \text{e} \quad r'' \in s'';$$

3) de (1) e (2) e como S_i é uma partição de R ,
 $r' \neq r''$;

4) de (3) e como o grafo (G_α) de α em R é conectado,
existe pelo menos um caminho, em G_α ,
de r' até r'' ;

5) de (4)

considere-se um desses caminhos:

$$r' = r_0, r_1, r_2, \dots, r_{c-1}, r_c = r'', \quad \text{onde } c \geq 1;$$

6) como S_i é uma partição de R ,

$$r \in R \longrightarrow \text{existe um \u00fanico } s \in S_i, \text{ tal que } r \in s;$$

7) de (5) e (6),

considere-se para cada $r_j, s_j \in S_i$, tal que $r_j \in s_j, 0 \leq j \leq c$;

8) de (5) e (7)

considere-se a seq\u00eancia $s' = s_0, s_1, s_2, \dots, s_{c-1}, s_c = s''$;

9) de (7) e (8),

$$0 \leq j \leq c-1 \longrightarrow \begin{cases} \text{ou } s_j = s_{j+1}, \\ \text{ou } s_j \neq s_{j+1}; \end{cases}$$

¹⁸ Supondo, nesta proposi\u00e7\u00e3o, que β representa a extens\u00e3o da adjac\u00eancia f\u00edsica a segmentos.

10) de (5),

$$r_j \alpha r_{j+1} \quad \forall j, \quad 0 \leq j \leq k-1;$$

11) de (7) e como S_i é uma partição de R ,

$$s_j \neq s_{j+1} \implies s_j \cap s_{j+1} = \emptyset;$$

12) de (11), (7) e (10),

$$s_j \neq s_{j+1} \implies s_j \beta s_{j+1};$$

13) de (8), (9) e (12),

$$s' = s_0, s_1, s_2, \dots, s_{C-1}, s_C = s'' \text{ é um caminho de } s' \text{ até } s'' \text{ no grafo de } \beta \text{ em } S_i;$$

14) de (1) e (13),

o grafo de β em S_i é conectado.

O problema da redução da ambigüidade em interpretação de cenas, da maneira como aqui foi abordado, tem assegurado uma solução algébrica via o operador θ , conforme as argumentações até então exibidas. Com respeito à solução algorítmica desta questão, precisa-se caracterizar a entrada e a saída do processo. É natural que se considere como entrada as segmentações formadas a partir do conjunto (A) de segmentos adotados juntamente com suas rotulações; a saída são estas mesmas segmentações com suas respectivas rotulações consistentes máximas. Embora não comprometendo os objetivos almejados, pode-se ser mais restrito: como entrada adota-se o conjunto A juntamente com as interpretações associadas a cada um de seus elementos; quanto à saída, é suficiente a união daquelas rotulações consistentes máximas. Justificam-se tais alternativas face ao funcionamento intrínseco do operador θ no processo de relaxação, o qual não cogita da identificação de segmentações. Além disto o objetivo aqui é, especificamente, reduzir a ambigüidade das interpretações associadas aos segmentos do conjunto A.

4.2 - UMA GENERALIZAÇÃO DA APLICAÇÃO DE RELAXAÇÃO A "WAVEFORMS" COM SEGMENTAÇÃO AMBÍGUA

Uma abordagem de redução de ambigüidade, através da técnica de relaxação, foi proposta por Velasco e Rosenfeld (1979), com res

peito a "waveforms". Em tal trabalho o objetivo principal é efetuar um único processo de relaxação ao invés de um processo para cada segmentação. Estes autores sugerem, como uma extensão desejável, o desenvolvimento de um operador similar para o caso bidimensional, em especial às imagens.

Pretende-se, nesta seção, caracterizar a solução algébrica até agora utilizada como uma extensão do tratamento apresentado por aqueles autores com relação a imagens. Inicialmente enuncia-se, de modo sucinto, os pressupostos e os resultados significativos no caso das "waveforms". A seguir, então, argumenta-se a suposta expansão do caso unidimensional.

Como fundamentos básicos toma-se o intervalo onde a "waveform" está definida $[0, L]$, e os pontos que determinam as regiões elementares $(l_0 = 0, l_1, l_2, \dots, l_{t-1}, l_t = L)$. Cada região r_j pode ser representada pelo intervalo $[l_{j-1}, l_j]$, $1 \leq j \leq t$. Vê-se um segmento como uma lista de regiões da forma $(r_j, r_{j+1}, \dots, r_{j+h})$. Caso $j=1$, diz-se que o segmento é inicial, e final, quando $j+h=t$. A consecutividade entre segmentos indica que se a última região de um deles é r_j , a região inicial do outro é r_{j+1} . Diz-se que o primeiro segmento é antecessor do outro e este, por sua vez, sucessor daquele. A denominação adjacente é então utilizada para designar segmentos antecessores ou sucessores.

Uma espécie importante de conjunto de segmentos é aquele denominado completo. Ele contém pelo menos um segmento inicial e um final; além disto, todo segmento, desde que não seja inicial, tem predecessores no conjunto, e, dentre aqueles que não são finais, todos possuem sucessores. Uma segmentação de uma "waveform", com relação a um conjunto completo de segmentos, é conceituada como um subconjunto deste conjunto completo, de modo que ela possua no máximo um segmento inicial e um final, no qual todo segmento tenha no máximo um antecessor e um sucessor. É facilmente demonstrável que qualquer segmentação é um conjunto completo de segmentos. É evidente também o fato de que toda segmentação constitui uma partição do conjunto de regiões.

Dado um conjunto (A) completo de segmentos, consideram-se todas as segmentações possíveis de ser formadas com estes segmentos (S_1, S_2, \dots, S_n); de modo correspondente, f_1, f_2, \dots, f_n , são suas rotulações. O operador de relaxação (Δ) definido, que se aplica a cada segmentação de per se, conserva um rótulo de segmento se, e somente se, existir pelo menos um rótulo no segmento antecessor e outro no segmento sucessor, ambos compatíveis com o rótulo em exame¹⁹. Formalmente isto equivale a dizer que:

$$\lambda \in \Delta f_j(s) \iff \begin{cases} \lambda \in f_j(s), \\ [f_j(s') \times \{\lambda\}] \cap g(s', s) \neq \Phi, \\ [\{\lambda\} \times f_j(s'')] \cap g(s, s'') \neq \Phi, \\ \text{onde } s' \text{ é o antecessor de } s \text{ e} \\ s'' \text{ é o sucessor de } s. \end{cases}$$

O operador de relaxação (Δ^*), aplicado à rotulação $\sum_{j=1}^n f_j$, elimina um rótulo de um dado segmento caso não exista rótulo compatível em nenhum segmento antecessor ou, da mesma forma, em nenhum dos sucessores. Supõe-se que a um dado segmento é associado o mesmo conjunto de rótulos em qualquer segmentação que ele pertença, ou seja, $f_j(s) = \sum_{j=1}^n f_j(s) \quad \forall s \in S_j$.

A partir de várias proposições intermediárias, chegou-se à conclusão da equivalência entre o resultado obtido pelo operador Δ^* e a união daqueles obtidos por Δ em cada uma das segmentações possíveis. Isto pode ser representado por:

$$\sum_{j=1}^n (\Delta_{f_j}^m) = (\Delta^*)^m \left(\sum_{j=1}^n f_j \right), \quad \forall m \geq 0,$$

¹⁹ No caso de tratar de um segmento inicial ou final, só faz sentido uma dentre as duas condições.

donde decorre que:

$$(\Delta^*)^\infty \left(\sum_1^n f_j \right) = \sum_1^n (\Delta_{f_j}^\infty) .$$

Uma vez resumidos os resultados básicos tidos como mais significativos, passa-se agora a tratar do problema da ambigüidade em "waveforms", segundo a abordagem algébrica utilizada nas seções anteriores.

Inicialmente, considera-se o conjunto de regiões como aquele formado pelos intervalos mais elementares determinados no intervalo de definição da "waveform", ou seja:

$$R = \{r_j | r_j = [l_{j-1}, l_j], \quad 1 \leq j \leq t\} .$$

Um segmento constitui um subconjunto de R, cujos elementos formam uma lista do tipo $(r_j, r_{j+1}, r_{j+2}, \dots, r_{j+h})$.

A adjacência física em R é tal que a condição necessária e suficiente para que duas regiões estejam relacionadas é que elas sejam consecutivas; isto é:

$$r_j \alpha r_h \iff h = j+1 .$$

O passo seguinte é tentar caracterizar a relação β num dado conjunto completo de segmentos. Tendo em vista a definição dos operadores Δ e Δ^* , esta relação deve ser a adjacência física. Isto se confirma pela equivalência demonstrada nas proposições seguintes, entre esta relação e β , ou seja: caso um segmento seja antecessor (sucessor) de outro, necessariamente eles relacionam-se via β ; reciprocamente, se dois segmentos relacionam-se via β , então um deles é sucessor (antecessor) do outro, tal como:

$$\begin{array}{l} s' \text{ é antecessor de } s'' \implies s' \beta s'' \\ \text{(sucessor)} \qquad \qquad \qquad (s'' \beta s') . \end{array}$$

DEMONSTRAÇÃO

1) da hipótese,

s' antecessor de s'' ;
(sucessor)

2) de (1) e do conceito de segmento,

$s' \rightarrow (r_j, r_{j+1}, \dots, r_{j+k}), s'' \rightarrow (r_{j+k+1}, r_{j+k+2}, \dots, r_{j+k+h});$
(s'') (s')

3) de (2),

$s' \cap s'' = \emptyset;$

4) de (2),

$r_{j+k} \alpha r_{j+k+1};$

5) de (3), (2) e (4),

$s' \beta s'' (s'' \beta s');$

$s' \beta s'' \implies s' \bar{e}$ antecessor de s''
($s'' \beta s'$) (sucessor)

DEMONSTRAÇÃO

1) da hipótese,

$s' \beta s'' (s'' \beta s');$

2) de (1),

$s' \cap s'' = \emptyset;$

3) de (1),

existe $r' \in s', r'' \in s''$, tal que $r' \alpha r''$;
($r'' \alpha r'$)

4) de (3),

$r' = r_j$ e $r'' = r_{j+1};$
($r'' = r_j$ e $r' = r_{j+1}$)

5) hipótese provisória:

$r_j \bar{e}$ uma região não-final de s' ;
(s'')

6) de (5) e (3),

$$r_{j+1} \in s' ; \\ (s'')$$

7) de (3), (4) e (6),

$$s' \cap s'' \neq \emptyset ;$$

8) de (2), (5) e (7),

$$r_j \text{ é uma região final de } s' ; \\ (s'')$$

9) hipótese provisória:

$$r_{j+1} \text{ é uma região não-inicial de } s'' ; \\ (s')$$

10) de (9) e (3),

$$r_j \in s'' ; \\ (s')$$

11) de (3), (4) e (10),

$$s' \cap s'' \neq \emptyset ;$$

12) de (2), (9) e (11),

$$r_{j+1} \text{ é uma região inicial de } s'' ; \\ (s')$$

13) de (3), (8) e (12),

$$s' \text{ antecessor de } s'' . \\ (\text{sucessor})$$

Agora, antes de examinar o significado dos conceitos de vizinhança, classe de β -ênica e classe máxima de β -ênica no contexto das "waveforms", deve-se apresentar duas outras proposições, ambas facilmente dedutíveis das considerações anteriores. A primeira afirma que segmentos iniciais (finais) podem possuir apenas sucessores (antecessores). A outra garante que os antecessores (sucessores) de um dado segmento são não-disjuntos dois a dois:

$$s \text{ é inicial e } s \beta s' \implies s' \text{ é sucessor de } s , \\ (\text{final}) \quad (s' \beta s) \quad (\text{antecessor})$$

$$\left. \begin{array}{l} s' \text{ é antecessor de } s \\ \text{(sucessor)} \\ s'' \text{ é antecessor de } s \\ \text{(sucessor)} \end{array} \right\} \implies s' \cap s'' \neq \emptyset.$$

Examinam-se, agora, as vizinhanças de um segmento com relação a um conjunto completo de segmentos.

Uma vez que a relação β se mostrou equivalente à adjacência, a vizinhança de um segmento é constituída por ele e por todos aqueles segmentos adjacentes a ele. Tendo em vista o último resultado, pode-se inferir de imediato que, para segmentos iniciais (finais), qualquer uma de suas classes de β -ênica é também uma classe máxima de β -ênica. Ainda segundo a última proposição e com relação a segmentos não-iniciais e não-finais, qualquer classe máxima possui necessariamente três elementos: o segmento em evidência, um sucessor e um antecessor.

Para corroborar ainda mais a equivalência entre β e a adjacência, verifica-se que, numa dada segmentação, a vizinhança e a classe máxima de β -ênica confundem-se.

Pode-se agora partir para a argumentação com respeito à equivalência, no contexto das "waveforms", entre os operadores δ e Δ numa dada segmentação. Os dois resultados seguintes são suficientes:

$$\lambda \in \delta f_j(s) \implies \lambda \in \Delta f_j(s).$$

DEMONSTRAÇÃO

1) por hipótese,

$$\lambda \in \delta f_j(s);$$

2) de (1) e da Definição 3.7,

$$\lambda \in f_j(s)$$

e

$$[\{\lambda\} \times f_j(\bar{s})] \cap g(s, \bar{s}) \neq \emptyset \quad \forall \bar{s} \in S_j, \quad s \beta \bar{s};$$

3) da Definição 3.8,

$$\bar{s} \in S_j \text{ e } \bar{s} \beta s \iff \bar{s} \in (V_S^{S_j} - \{s\});$$

4) como qualquer classe máxima possui três elementos,

$$V_S^{S_j} - \{s\} = \{s'\} \cup \{s''\},$$

$$\text{onde } \begin{cases} s' \text{ é antecessor de } s, \\ s'' \text{ é sucessor de } s; \end{cases}$$

5) de (2), (3) e (4),

$$\lambda \in f_j(s),$$

$$[\{\lambda\} \times f_j(s')] \cap g(s, s') \neq \emptyset,$$

$$[\{\lambda\} \times f_j(s'')] \cap g(s, s'') \neq \emptyset;$$

6) de (5),

$$\lambda \in f_j(s),$$

$$[f_j(s') \times \{\lambda\}] \cap g(s', s) \neq \emptyset,$$

$$[\{\lambda\} \times f_j(s'')] \cap g(s, s'') \neq \emptyset;$$

7) de (6) e da definição de operador Δ ,

$$\lambda \in \Delta f_j(s).$$

$$\lambda \in \Delta f_j(s) \implies \lambda \in \delta f_j(s).$$

DEMONSTRAÇÃO

1) por hipótese,

$$\lambda \in \Delta f_j(s);$$

2) de (1) e da definição do operador Δ ,

$$\lambda \in f_j(s),$$

$$[f_j(s') \times \{\lambda\}] \cap g(s', s) \neq \emptyset,$$

$$[\{\lambda\} \times f_j(s'')] \cap g(s, s'') \neq \emptyset,$$

$$\text{onde } \begin{cases} s' \text{ é o antecessor de } s \text{ e} \\ s'' \text{ é o sucessor de } s; \end{cases}$$

3) de (2) e devido à equivalência entre β e a adjacência física,
 $s' \beta s$ e $s \beta s''$;

4) de (2), (3) e como qualquer classe máxima tem três elementos,

$$V_S^{S_j} = \{s, s', s''\};$$

5) de (2), (3) e (4),

$$\lambda \in f_j(s),$$

$$[\{\lambda\} \times f_j(\bar{s})] \cap g(s, \bar{s}) \neq \emptyset \quad \forall \bar{s} \in (V_S^{S_j} - \{s\});$$

6) de (5),

$$\lambda \in f_j(s),$$

$$[\{\lambda\} \times f_j(\bar{s})] \cap g(s, \bar{s}) \neq \emptyset \quad \forall \bar{s} \in S_j, \quad s \beta \bar{s};$$

7) de (6) e da Definição 3.7,

$$\lambda \in \delta f_j(s).$$

Da mesma forma, necessita-se evidenciar também no mesmo contexto a equivalência entre os operadores θ e Δ^* num conjunto (A) completo de segmentos. Usa-se, então, a mesma abordagem utilizada nas duas proposições anteriores, a saber:

$$\lambda \in \theta \left(\sum_1^k f_j(s) \right) \implies \lambda \in \Delta^* \left(\sum_1^k f_j(s) \right).$$

DEMONSTRAÇÃO

1) da hipótese,

$$\lambda \in \theta \left(\sum_1^k f_j(s) \right);$$

2) de (1) e da Definição 3.11,

$$\lambda \in \sum_1^k f_j(s),$$

$$\text{existe } M_S^A, \text{ tal que } [\{\lambda\} \times \sum_1^k f_j(\bar{s})] \cap g(s, \bar{s}) \neq \emptyset$$

$$\forall \bar{s} \in (M_S^A - \{s\});$$

3) como qualquer classe máxima tem três elementos,

$$M_s^A = (s, s', s''),$$

onde $\begin{cases} s' \text{ é sucessor de } s, \\ s'' \text{ é antecessor de } s; \end{cases}$

4) de (2) e (3),

$$\lambda \in \sum_1^k f_j(s),$$

$$[\{\lambda\} \times \sum_1^k f_j(s')] \cap g(s, s') \neq \emptyset,$$

$$[\{\lambda\} \times \sum_1^k f_j(s'')] \cap g(s, s'') \neq \emptyset;$$

5) de (4),

$$\lambda \in \sum_1^k f_j(s),$$

$$[\{\lambda\} \times \sum_1^k f_j(s')] \cap g(s, s') \neq \emptyset,$$

$$[\sum_1^k f_j(s'') \times \{\lambda\}] \cap g(s'', s) \neq \emptyset;$$

6) de (5) e pela definição de Δ^* ,

$$\lambda \in \Delta^* \left(\sum_1^k f_j(s) \right).$$

$$\lambda \in \Delta^* \left(\sum_1^k f_j(s) \right) \longrightarrow \lambda \in \theta \left(\sum_1^k f_j(s) \right).$$

DEMONSTRAÇÃO

1) da hipótese,

$$\lambda \in \Delta^* \left(\sum_1^k f_j(s) \right);$$

2) de (1) e da definição de Δ^* ,

$$\lambda \in \sum_1^k f_j(s),$$

existe $s', s'' \in A$, onde $\begin{cases} s' \bar{\epsilon} \text{ um antecessor de } s \text{ tal que} \\ s'' \bar{\epsilon} \text{ um sucessor de } s \end{cases}$

$$[\sum_1^k f_j(s') \times \{\lambda\}] \cap g(s', s) \neq \emptyset,$$

$$[\{\lambda\} \times \sum_1^k f_j(s'')] \cap g(s, s'') \neq \emptyset;$$

3) de (2), devido à equivalência entre adjacência física e β ,

$\{s, s', s''\}$ é uma classe máxima de β -ênica de s com relação a A ;

4) de (2) e (3),

$$\lambda \in \sum_1^k f_j(s),$$

existe M_S^A tal que

$$[\{\lambda\} \times \sum_1^k f_j(\bar{s})] \cap g(s, \bar{s}) \neq \emptyset \quad \forall \bar{s} \in (M_S^A - \{s\});$$

5) de (4) e da Definição 3.11,

$$\lambda \in \theta \left(\sum_1^k f_j(s) \right).$$

Pode parecer que as considerações até aqui observadas são suficientes para mostrar que os operadores δ e θ generalizam a abordagem utilizada para as "waveforms". Porém, falta evidenciar neste contexto que uma classe máxima de β -ênica com relação a uma segmentação também o é com respeito a um conjunto completo que contenha esta segmentação; inversamente, para toda classe máxima com relação a um conjunto completo existe, pelo menos, uma segmentação no conjunto que a contém. Tal correspondência, conforme mencionado no final da Seção 4.1, é o ponto fundamental para a validade dos Lemas 3.2 e 3.3, os

quais determinam as Proposições 3.18 a 3.21. Estas últimas é que finalmente asseguram a condição $\theta^m \left(\sum_1^k f_j \right) = \sum_1^k (\theta^m f_j)$.

No contexto das "waveforms" e considerando A como um con junto completo de segmentos, o Lema 3.2 é assegurado a partir da Proposição 3.9, levando em conta a equivalência entre a adjacência física e β . A recíproca desta proposição (Lema 3.3) decorre também desta equivalência e do resultado já demonstrado no artigo em referência: se s_1, s_2, \dots, s_m são segmentos consecutivos, então existe pelo menos uma segmentação (S) , tal que $s_j \in S, 1 \leq j \leq m$.

Acredita-se que essas considerações são suficientes para caracterizar a abordagem da técnica de relaxação usada nesta disserta ção como uma generalização daquela utilizada por Velasco e Rosenfeld (1979).

SEGMENTAÇÃO E INTERPRETAÇÃO INTEGRADAS

"Posso alegrar-me agora até mesmo com a demonstração de que uma teoria que estimo é falsa — isso constituiria também um êxito científico".

(John Carew Eccles)

5.1 - SEGMENTAÇÃO GUIADA PELA INTERPRETAÇÃO

Conforme se mencionou anteriormente, a integração das tarefas de segmentação e interpretação da imagem digitalizada apresenta-se, atualmente, como a abordagem mais plausível ao nível de representação de objeto na percepção visual. Isto ocorre, dado a insuficiência para identificar objetos apenas através de atributos icônicos, dispensando o conhecimento do domínio da cena em análise.

A integração é hoje concebida como uma sucessão de segmentações e interpretações, onde cada segmentação é obtida a partir da anterior via fusões de segmentos adjacentes. Os critérios de decisão de fusão são prioritariamente semânticos, contrastando com a exclusividade icônica adotada num tipo especial de segmentação denominada "region growing". Uma outra característica importante da integração refere-se ao critério de conclusão do processo que é exclusivamente semântico.

O modelo de integração mais representativo do atual estado da arte é, pelo menos dentre os que têm registro na literatura especializada, o IGS (Interpretation Guided Segmentation) devido a Tenenbaum e Barrow (1977). Nesta seção descreve-se tal abordagem visando adotá-la como base de comparação a uma alternativa proposta logo a seguir.

Conforme descrito no Capítulo 2, o reconhecimento inicial de fronteiras na imagem digitalizada determina um conjunto (R) de

regiões, onde cada uma delas apresenta-se como um grupo de pontos gráficos ("pixels") com atributos icônicos similares. Estas fronteiras servem de base à formação dos segmentos que correspondem a objetos significativos com respeito ao domínio da cena em análise. Um conjunto (A) de segmentos assim obtido constitui-se na entrada para as fases de segmentação e interpretação. Os segmentos inicialmente considerados pelo IGS são de tal modo que correspondem também às regiões obtidas por ocasião da detecção de fronteiras. Pode-se então afirmar que a entrada para o IGS é a partição mais refinada do conjunto (R) de regiões.

O IGS atribui para cada segmento, todos os elementos do conjunto universo de rótulos. A seguir, eliminam-se aqueles que não satisfazem a restrições não-relacionais; por exemplo, tamanho, geometria, topologia, etc. Estas podem até levar em conta o domínio da cena^{2º}. Sobre esta rotulação inicial é efetuado um processo iterativo de eliminação de rótulos conforme as restrições relacionais locais entre segmentos. Tal redução de rótulos pode utilizar a técnica de relaxação ou mesmo de uma filtragem não-paralela do tipo daquela de Walz (1975). A partir desta nova rotulação, são examinados todos os pares de segmentos adjacentes, cujos conjuntos de rótulos associados são não-disjuntos. Destes pares de segmentos fundem-se, necessariamente, aqueles cujos conjuntos de rótulos são unitários ou aqueles que, mesmo não tendo rótulos únicos, devem possuir o mesmo rótulo. Esta segunda condição é verificável por inspeção na função da compatibilidade (g) entre segmentos. Qualquer segmento criado por fusão conserva os rótulos comuns a ambos os segmentos geradores. Caso não ocorra nenhuma fusão entre os pares de segmentos adjacentes em exame, funde-se o par com fronteira de mais baixo contraste, conservando da mesma forma os rótulos comuns. Após tais etapas, retorna-se à eliminação de rótulos sob controle das compatibilidades locais. O "loop" cessa quando, na rotulação corrente, inexistir par de segmentos adjacentes com rotulações não-disjuntas. É importante observar que os rótulos conservados, num segmento obtido por fusão, são submetidos à concordância com as restrições não-relacionais, sendo eliminados os que não satisfazem tais condições.

^{2º} Tal procedimento é denominado *classificação da imagem*.

Ao nível macro, um diagrama (Figura 5.1) de fluxo da técnica em apreço esclarece a ordem de precedência na execução das várias operações mencionadas acima.

Uma vez que a condição de parada do algoritmo é sempre verificada após um processo de relaxação (ou filtragem), pode-se garantir que a saída obtida é uma rotulação consistente. A Figura 5.2 resume a abordagem em termos de entrada e saída.

O IGS, embora imperfeito, segundo Tenenbaum e Barrow (1977), representa o estado da arte em segmentação e interpretação de imagens. Experimentalmente, este método mostrou-se bem mais eficaz do que as técnicas que não levam em consideração os aspectos semânticos.



Fig. 5.1 - Fluxo de execução do "IGS".

(continua)

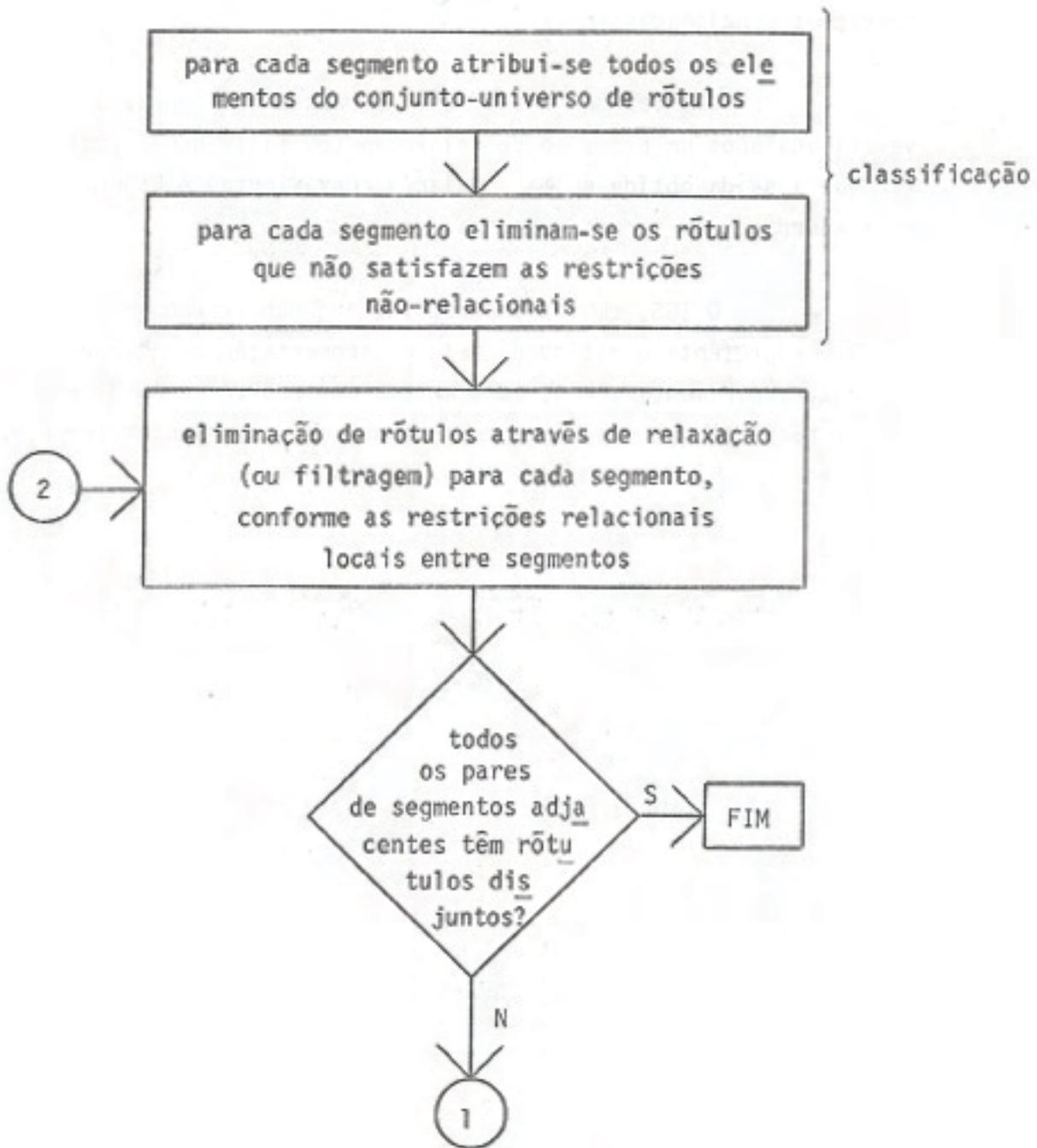


Fig. 5.1 - Fluxo de execução do "IGS".

(continua)

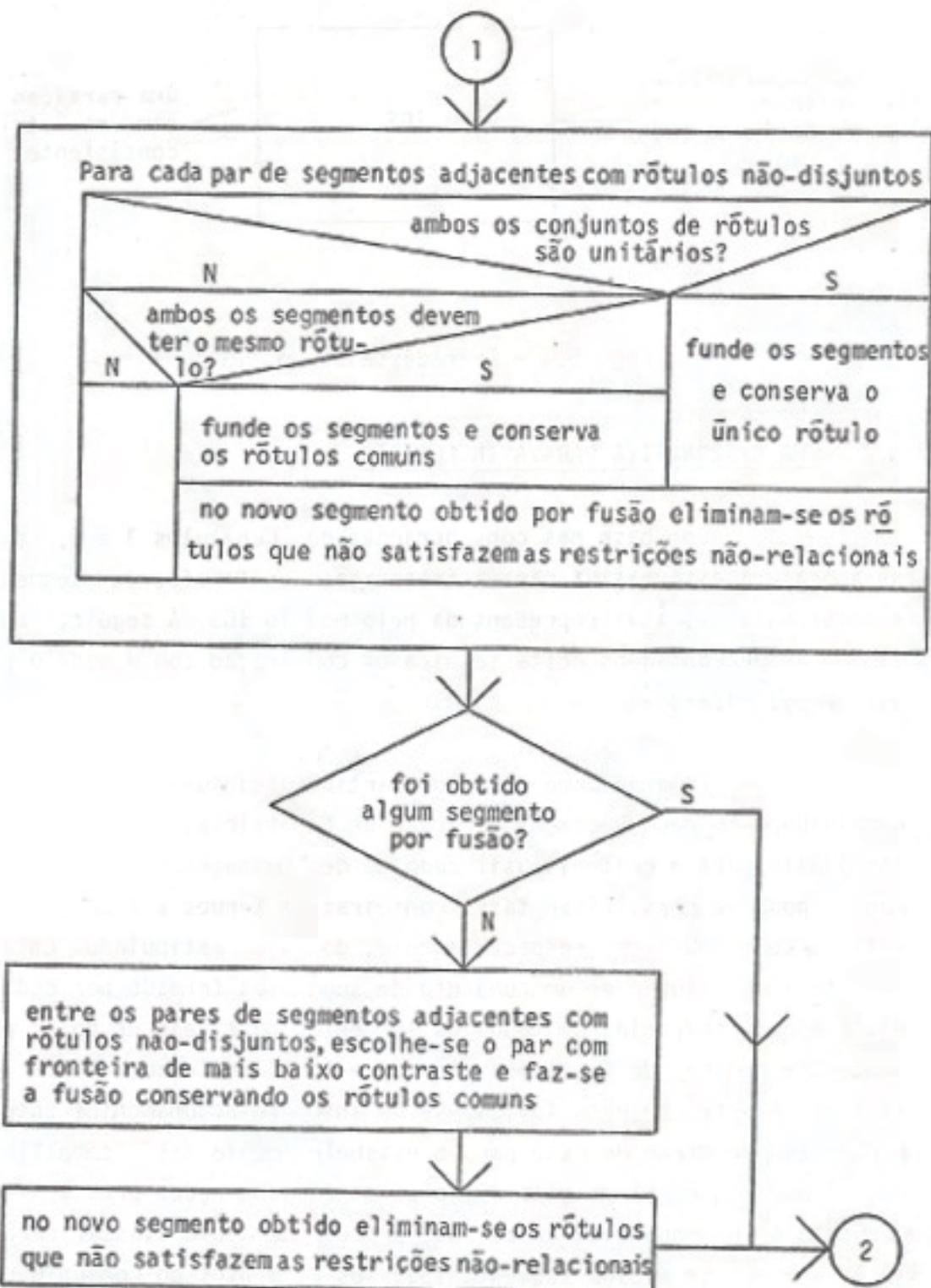


Fig. 5.1 - Conclusão.

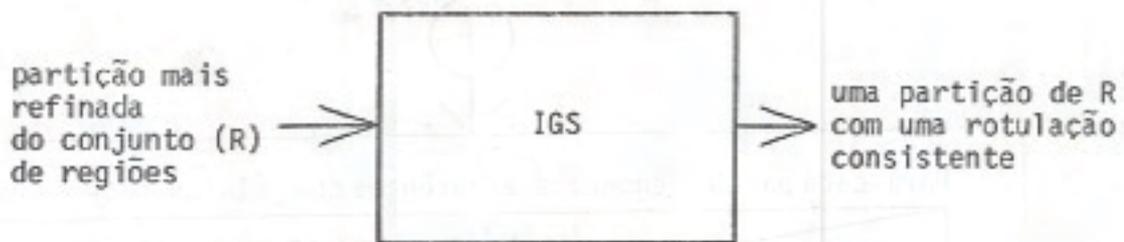


Fig. 5.2 - Entrada/saída do "IGS".

5.2 - UMA ALTERNATIVA PARA A INTEGRAÇÃO

Com base nas considerações dos Capítulos 3 e 4, sugere-se agora uma alternativa para a integração das tarefas de segmentação e interpretação, aqui representada pelo modelo IGS. A seguir, apresentam-se as desvantagens desta técnica em comparação com o modelo proposto, exemplificando-a.

Tomando como ponto de partida o conjunto de regiões de terminado pelo reconhecimento inicial de fronteiras, e adotando um valor limite para o critério utilizado na determinação deste reconhecimento, pode-se classificar tais fronteiras em tênues e fixas, conforme estejam aquêm ou alêm, respectivamente, do valor estipulado. Então, sugere-se a construção de um conjunto de segmentos formado por cada uma das regiões, acrescido de todos os segmentos possíveis de obter por fusão entre regiões de fronteiras tênues e fisicamente adjacentes (Figura 5.3). A este conjunto aplicam-se os inter-relacionamentos entre segmentos que servirão de base para o estabelecimento das compatibilidades. É óbvio que tal escolha satisfaz as considerações pressupostas no Capítulo 4. De modo similar ao IGS, procede-se a uma classificação, isto é, atribui-se a cada segmento todos os elementos do conjunto universo de rótulos e, logo a seguir, eliminam-se os rótulos incompatíveis com as restrições não-relacionais. Sobre a rotulação resultante efetua-se um processo de relaxação com o operador θ , conforme as restrições

relacionais locais preestabelecidas. Obtém-se assim uma saída²¹ mais eficaz com relação ao objetivo da análise de cenas. Esta saída, em face das características do operador utilizado, representa a união das rotulações consistentes máximas de todas as segmentações possíveis de construir com apenas os elementos do conjunto de segmentos tomado como entrada. A Figura 5.4 caracteriza esta metodologia.

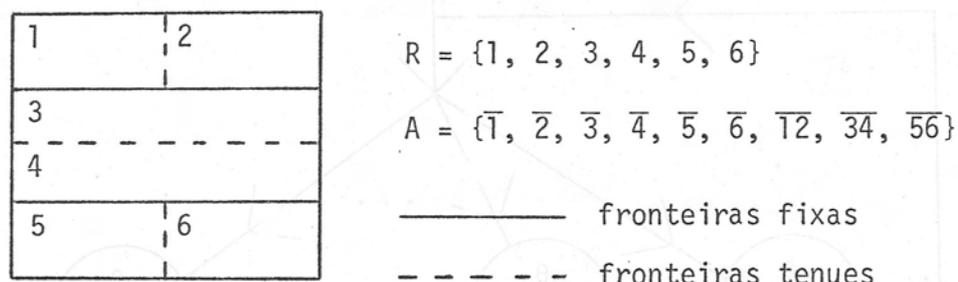


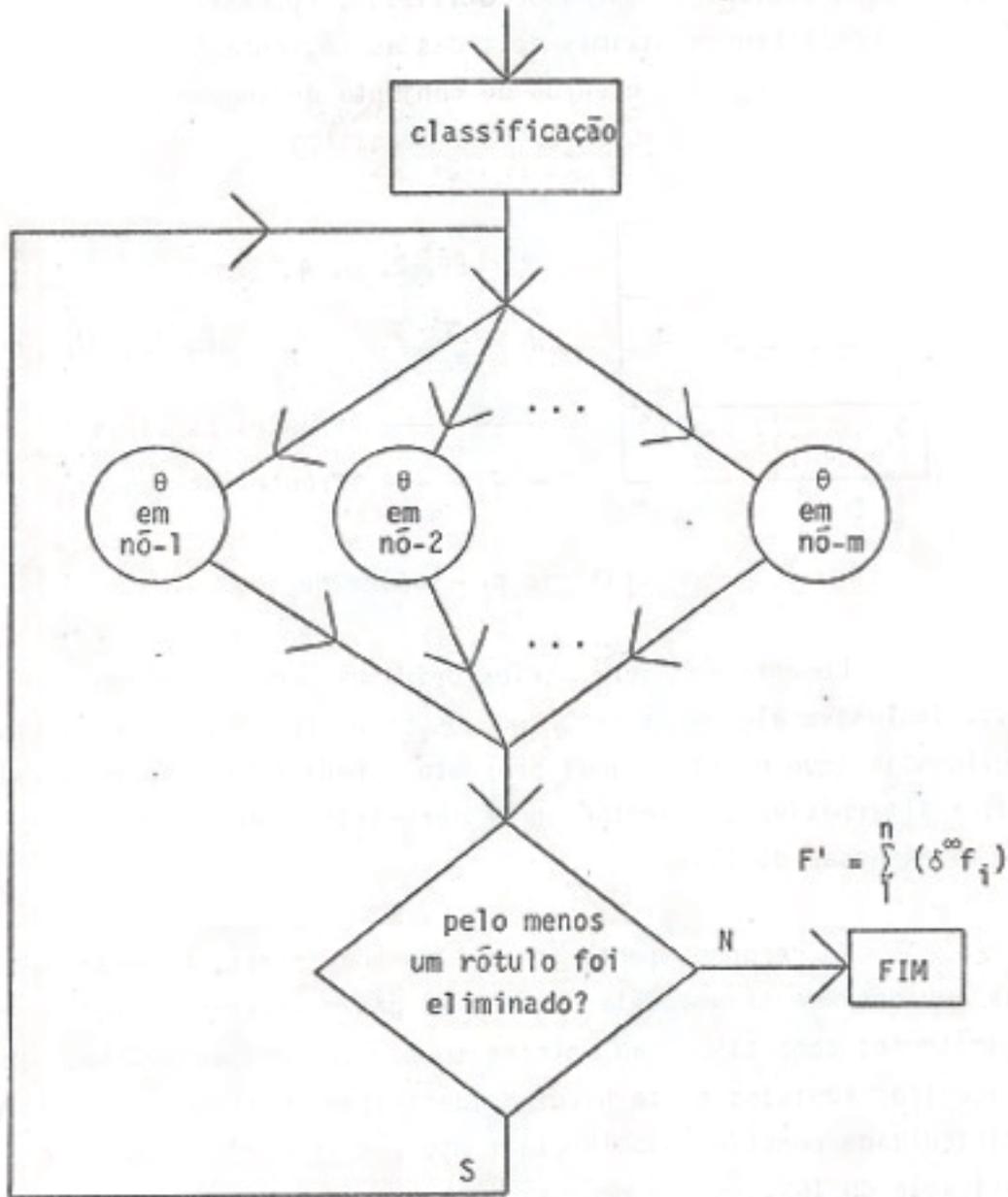
Fig. 5.3 - Um critério de escolha de segmentos.

Comenta-se agora vários defeitos e desvantagens do modelo IGS, inclusive alguns já reconhecidos pelos autores deste modelo, o que evidencia que o método aqui proposto supera tais problemas. Além disso, a alternativa apresentada pode ser vista, sob um certo aspecto, como uma extensão do IGS.

No reconhecimento inicial de fronteiras, é comum a ocorrência duvidosa de alguma delas devido ao baixo contraste entre regiões limítrofes como também ao intrínseco caráter aproximado dos critérios icônicos adotados neste nível de descrição. Procura-se contornar tal dificuldade considerando inicialmente várias segmentações. No caso da aplicação do IGS, faz-se necessária a execução de tantas relaxações (ou filtragens) quantos forem o número de segmentações tomadas. Comentou-se anteriormente a incômoda redundância computacional consequente. No modelo alternativo proposto, tal inconveniência inexistente, visto que se considera um conjunto de segmentos, ignorando explicitamente as segmentações possíveis de ser construídas.

²¹ Locais significam adjacência no grafo de β , o que não implica, necessariamente, uma correspondente contiguidade física.

$\phi \neq A \subseteq 2^R - \{\emptyset\}$,
tal que $r \in R \rightarrow \{r\} \in A$,
 $F: A \rightarrow 2^{\Lambda \times \Lambda}$, onde $F(s) = \Lambda_s \quad \forall s \in A$



f_1, f_2, \dots, f_n são rotulações de S_1, \dots, S_n (tal que $f_i(s) = \Lambda_s \quad \forall s \in S_i$) que representam todas as segmentações possíveis de construir com elementos de A .

Fig. 5.4 - Uma alternativa para o IGS.

Uma forte restrição do IGS é fundamentar o inter-relacionamento semântico apenas entre segmentos pictoricamente adjacentes. O grau de generalidade decorrente da utilização da relação β no enfoque alternativo suprime tal desvantagem. Consequentemente, é possível a incorporação de maior conhecimento no modelo de domínio da cena.

Atentando para o fluxo de execução do IGS, constata-se que a rotulação da segmentação obtida é consistente. Porém, o fato de, durante o processo, ser possível a fusão de segmentos com a preservação apenas dos rótulos comuns não assegura que tal rotulação seja necessariamente a consistente máxima. Contrastando com tal aspecto restritivo, o método alternativo obtém necessariamente a união das rotulações consistentes máximas de todas as segmentações implícitas no conjunto de segmentos adotados, conferindo, portanto, uma notável generalidade.

Os resultados colhidos na implementação experimental do IGS, pelos autores deste método, indicam um consumo de 80% do tempo de execução dispendido na fusão de segmentos. Tal espécie de procedimento não ocorre na metodologia aqui sugerida, o que permite prever uma significativa melhora no desempenho da interpretação.

Como o critério de fusão de segmentos no IGS é exclusivamente semântico, é possível ocorrer fusão entre qualquer par de segmentos contíguos, inclusive naqueles com fronteira de alto contraste, o que pode ser contraditório com o conhecimento suprido pelos modelos icônicos. Isto pode ser evitado no modelo alternativo, em face da classificação das fronteiras em fixas e tênues, as quais passam a significar a possibilidade ou não de delimitarem, respectivamente, objetos distintos. A modelagem alternativa pode ainda satisfazer, de modo teórico, tal critério de fusão do IGS, desde que se considerem todas as fronteiras como tênues.

Quanto à fusão entre pares de segmentos contíguos pouco contrastáveis, o IGS não a efetua necessariamente. Ela está condiciona

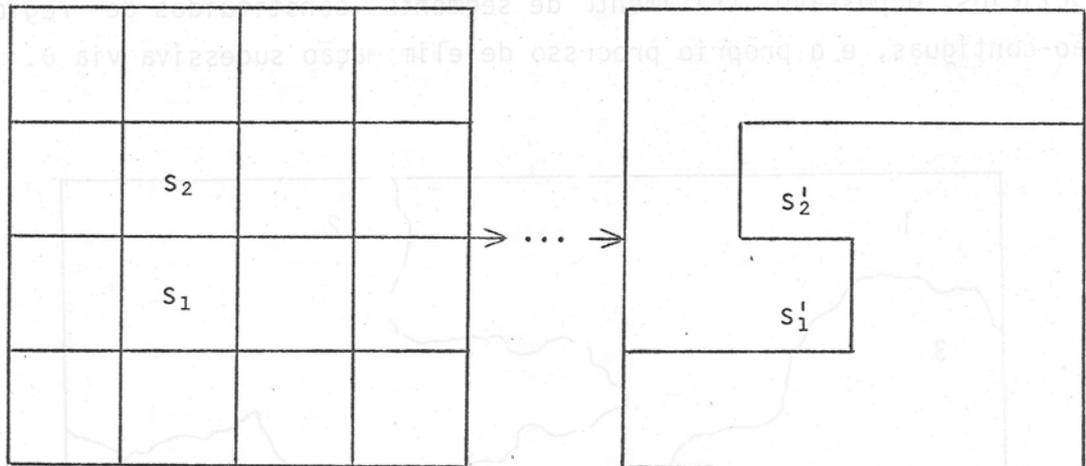


Fig. 5.5 - Aplicação indevida da relação "acima".

FONTE: Barrow and Tenenbaum (1981), p. 444.

Muitas vezes um objeto da cena em exame pode apresentar-se na imagem como duas regiões não-contíguas face à anteposição de outro objeto. O enfoque alternativo suporta esta dificuldade, tendo em vista que o conjunto de segmentos adotado é um subconjunto qualquer do conjunto de regiões.

Enfim, pode-se considerar teoricamente o método alternativo como uma extensão do IGS, sob a condição de que todas as fronteiras do reconhecimento inicial sejam tênues. Assim sendo, qualquer que seja a segmentação produzida pelo IGS ela é necessariamente considerada pela metodologia proposta.

Apresenta-se a seguir uma ilustração da utilização do operador de relaxação θ , segundo a metodologia alternativa proposta. Apesar de simples, a cena (Figura 5.6) é suficiente para exemplificar algumas características originais, anteriormente comentadas, quais sejam: a consideração de fronteiras fixas e tênues na construção dos segmentos, a construção do inter-relacionamento entre os segmentos como reflexo do conhecimento disponível, a possibilidade de relacionar segmentos não-pictoricamente adjacentes, a inclusão de relacionamentos

fictícios, o possível tratamento de segmentos constituídos de regiões não-contíguas, e o próprio processo de eliminação sucessiva via θ .

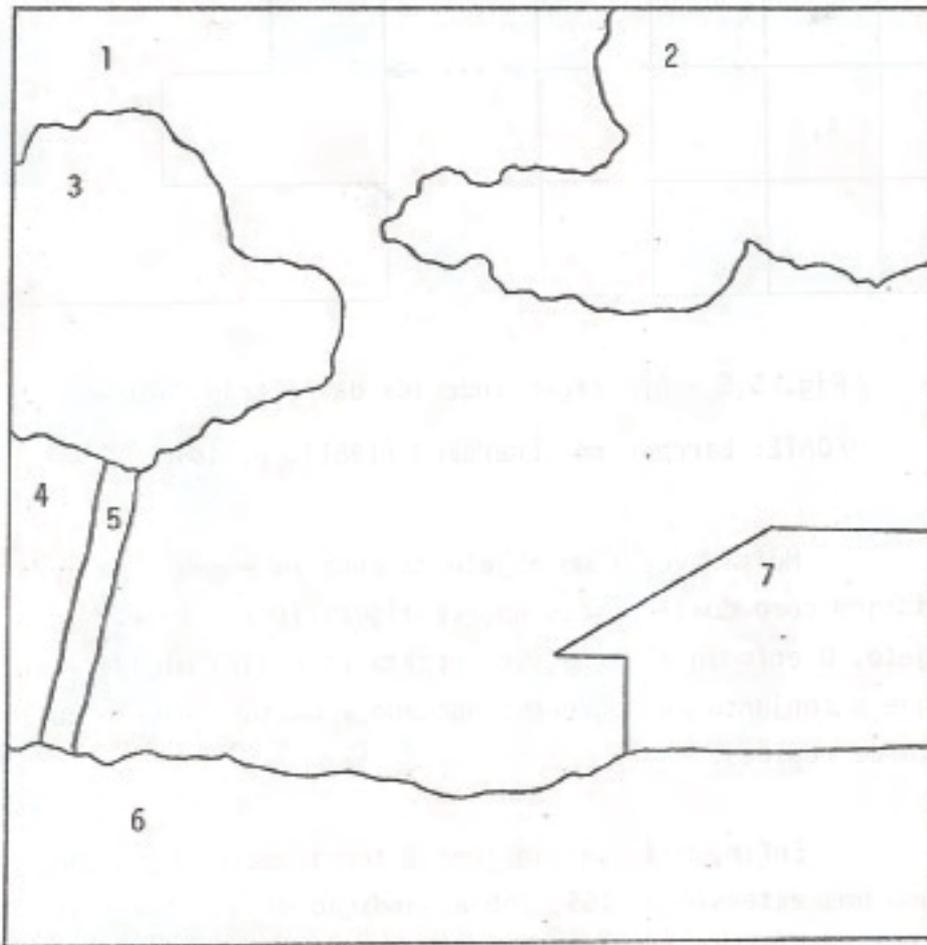


Fig. 5.6 - Uma cena natural simplificada que ilustra um processo de relaxação.

Inicialmente considere-se o conjunto de regiões e o de segmentos, supondo que as fronteiras entre as regiões 3 e 5, e 5 e 6 são tênues, o que em geral é comum neste tipo de cena. O segmento $\overline{14}$ é escolhido para ressaltar uma das características há pouco mencionadas. Assim:

$$R = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\},$$

$$A = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{14}, \overline{35}, \overline{56}, \overline{356}\}.$$

Observe-se que as segmentações envolvidas são as seguintes:

$$S_1 = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}\},$$

$$S_2 = \{\bar{14}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}\},$$

$$S_3 = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{35}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{7}\},$$

$$S_4 = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{56}, \bar{7}\},$$

$$S_5 = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{356}, \bar{4}, \bar{7}\},$$

$$S_6 = \{\bar{14}, \bar{35}, \bar{2}, \bar{6}, \bar{7}\},$$

$$S_7 = \{\bar{14}, \bar{56}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{7}\},$$

$$S_8 = \{\bar{14}, \bar{356}, \bar{2}, \bar{7}\}.$$

O conjunto universo de rótulos (Λ) adotado compõe-se das identificações: Céu (C), Nuvem (N), Árvore (A), Grama (G), Casa (K), ou seja:

$$\Lambda = \{C, N, A, G, K\}.$$

Seguem as relações binárias que incorporam o conhecimento, não completo mas suficiente, do domínio da cena. A relação $\Lambda \times \Lambda$ é aplicada aos segmentos ficticiamente relacionados. Assim:

R_a

adjacente a	
C	N, A, G, K
N	C
A	C, G
G	C, A, K
K	C, G

R_b

em baixo de	
C	-
N	-
A	-
G	C, N, A, K
K	N

R_c

em cima de	
C	G
N	G, K
A	G
G	-
K	G

Deve-se agora construir a relação β e, paralelamente, a função de compatibilidade g . Observe-se que esta função foi modelada a fim de facilitar o tratamento formal. Numa implementação do método, sua

obtenção não se faz necessária. É também oportuno relembrar que dois segmentos se relacionam, caso pelo menos uma das relações binárias, acima consideradas, seja a eles aplicáveis. Os pares de rótulos compatíveis refletem então o resultado da interseção dessas relações. Então:

$$\begin{array}{l} \bar{1} \xrightarrow{\beta} \bar{2} \\ \bar{3} \\ \bar{5} \\ \bar{6} \\ \bar{7} \\ \overline{35} \\ \overline{56} \\ \overline{356} \end{array} \quad \begin{array}{l} g(\bar{1}, \bar{6}) = R_a \cap R_c. \\ \\ g(\bar{1}, \bar{2}) = g(\bar{1}, \bar{3}) = g(\bar{1}, \bar{5}) = g(\bar{1}, \bar{7}) = \\ g(\bar{1}, \overline{35}) = g(\bar{1}, \overline{56}) = g(\bar{1}, \overline{356}) = R_a. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \bar{2} \xrightarrow{\beta} \bar{1} \\ \bar{4} \\ \bar{5} \\ \bar{6} \\ \bar{7} \\ \overline{14} \\ \overline{35} \\ \overline{56} \\ \overline{356} \end{array} \quad \begin{array}{l} g(\bar{2}, \bar{1}) = g(\bar{2}, \overline{14}) = R_a. \\ \\ g(\bar{2}, \bar{4}) = g(\bar{2}, \bar{5}) = g(\bar{2}, \bar{6}) = g(\bar{2}, \bar{7}) = \\ g(\bar{2}, \overline{56}) = R_c. \\ \\ g(\bar{2}, \overline{35}) = g(\bar{2}, \overline{356}) = \Lambda \times \Lambda^{22}. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \bar{3} \xrightarrow{\beta} \bar{1} \\ \bar{4} \\ \bar{5} \\ \bar{6} \\ \bar{7} \\ \overline{14} \\ \overline{56} \end{array} \quad \begin{array}{l} g(\bar{3}, \bar{1}) = g(\bar{3}, \overline{14}) = R_a. \\ \\ g(\bar{3}, \bar{6}) = g(\bar{3}, \bar{7}) = R_c. \\ \\ g(\bar{3}, \bar{4}) = g(\bar{3}, \bar{5}) = g(\bar{3}, \overline{56}) = R_a \cap R_c. \end{array}$$

²² Observe-se que $\bar{2} \beta \bar{5}$.

$$\overline{4} \xrightarrow{\beta} \begin{array}{c} \overline{2} \\ \overline{3} \\ \overline{5} \\ \overline{6} \\ \overline{35} \\ \overline{56} \\ \overline{356} \end{array}$$

$$g(\overline{4}, \overline{5}) = g(\overline{4}, \overline{35}) = g(\overline{4}, \overline{56}) =$$

$$g(\overline{4}, \overline{356}) = R_a.$$

$$g(\overline{4}, \overline{2}) = R_b.$$

$$g(\overline{4}, \overline{3}) = R_a \cap R_b.$$

$$g(\overline{4}, \overline{6}) = R_a \cap R_c.$$

$$\overline{5} \xrightarrow{\beta} \begin{array}{c} \overline{1} \\ \overline{2} \\ \overline{3} \\ \overline{4} \\ \overline{6} \\ \overline{14} \end{array}$$

$$g(\overline{5}, \overline{1}) = g(\overline{5}, \overline{4}) = g(\overline{5}, \overline{14}) = R_a.$$

$$g(\overline{5}, \overline{2}) = R_b.$$

$$g(\overline{5}, \overline{3}) = R_a \cap R_b.$$

$$g(\overline{5}, \overline{6}) = R_a \cap R_c.$$

$$\overline{6} \xrightarrow{\beta} \begin{array}{c} \overline{1} \\ \overline{2} \\ \overline{3} \\ \overline{4} \\ \overline{5} \\ \overline{7} \\ \overline{14} \\ \overline{35} \end{array}$$

$$g(\overline{6}, \overline{1}) = g(\overline{6}, \overline{4}) = g(\overline{6}, \overline{5}) = g(\overline{6}, \overline{7}) =$$

$$g(\overline{6}, \overline{14}) = g(\overline{6}, \overline{35}) = R_a \cap R_b.$$

$$g(\overline{6}, \overline{2}) = g(\overline{6}, \overline{3}) = R_b.$$

$$\overline{7} \xrightarrow{\beta} \begin{array}{c} \overline{1} \\ \overline{2} \\ \overline{3} \\ \overline{6} \\ \overline{14} \\ \overline{35} \\ \overline{56} \\ \overline{356} \end{array}$$

$$g(\overline{7}, \overline{1}) = g(\overline{7}, \overline{14}) = g(\overline{7}, \overline{56}) =$$

$$g(\overline{7}, \overline{356}) = R_a.$$

$$g(\overline{7}, \overline{2}) = g(\overline{7}, \overline{3}) = R_b.$$

$$g(\overline{7}, \overline{6}) = R_a \cap R_c.$$

$$g(\overline{7}, \overline{35}) = \Lambda \times \Lambda^{23}.$$

²³ Observe-se que: $\overline{7} \beta \overline{3}$.

$$\begin{array}{l}
 14 \xrightarrow{\beta} \bar{2} \\
 \bar{3} \\
 \bar{5} \\
 \bar{6} \\
 \bar{7} \\
 \overline{35} \\
 \overline{56} \\
 \overline{356}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 g(\overline{14}, \bar{2}) = g(\overline{14}, \bar{3}) = g(\overline{14}, \bar{5}) = \\
 g(\overline{14}, \bar{7}) = g(\overline{14}, \overline{35}) = g(\overline{14}, \overline{56}) = \\
 g(\overline{14}, \overline{356}) = R_a. \\
 \\
 g(\overline{14}, \bar{6}) = R_a \cap R_c.
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 35 \xrightarrow{\beta} \bar{1} \\
 \bar{2} \\
 \bar{4} \\
 \bar{6} \\
 \bar{7} \\
 \overline{14}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 g(\overline{35}, \bar{1}) = g(\overline{35}, \bar{4}) = g(\overline{35}, \overline{14}) = R_a. \\
 \\
 g(\overline{35}, \bar{6}) = R_a \cap R_c. \\
 \\
 g(\overline{35}, \bar{2}) = g(\overline{35}, \bar{7}) = \Lambda \times \Lambda^{24}.
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 56 \xrightarrow{\beta} \bar{1} \\
 \bar{2} \\
 \bar{3} \\
 \bar{4} \\
 \bar{7} \\
 \overline{14}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 g(\overline{56}, \bar{1}) = g(\overline{56}, \bar{4}) = g(\overline{56}, \bar{7}) = \\
 g(\overline{56}, \overline{14}) = R_a. \\
 \\
 g(\overline{56}, \bar{3}) = R_a \cap R_b. \\
 \\
 g(\overline{56}, \bar{2}) = R_b.
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \overline{356} \xrightarrow{\beta} \bar{1} \\
 \bar{2} \\
 \bar{4} \\
 \bar{7} \\
 \overline{14}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 g(\overline{356}, \bar{1}) = g(\overline{356}, \bar{4}) = g(\overline{356}, \bar{7}) = \\
 g(\overline{356}, \overline{14}) = R_a. \\
 \\
 g(\overline{356}, \bar{2}) = \Lambda \times \Lambda^{25}.
 \end{array}$$

Considerem-se as classes máximas de β -ênica de cada segmento com relação ao conjunto A:

²⁴ Observe-se que: $\bar{5} \beta \bar{2}$, $\bar{3} \beta \bar{7}$.

²⁵ Observe-se que: $\bar{5} \beta \bar{2}$.

$$M_1^A = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}\}$$
$$= \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{35}, \overline{6}, \overline{7}\}$$

$$= \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{56}, \overline{7}\}$$
$$= \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{356}, \overline{7}\}$$

$$M_2^A = \{\overline{2}, \overline{1}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}\}$$
$$= \{\overline{2}, \overline{14}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}\}$$
$$= \{\overline{2}, \overline{14}, \overline{56}, \overline{7}\}$$
$$= \{\overline{2}, \overline{14}, \overline{35}, \overline{6}, \overline{7}\}$$
$$= \{\overline{2}, \overline{14}, \overline{356}, \overline{7}\}$$
$$= \{\overline{2}, \overline{1}, \overline{4}, \overline{35}, \overline{6}, \overline{7}\}$$
$$= \{\overline{2}, \overline{1}, \overline{4}, \overline{56}, \overline{7}\}$$
$$= \{\overline{2}, \overline{1}, \overline{4}, \overline{356}, \overline{7}\}$$

$$M_3^A = \{\overline{3}, \overline{1}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}\}$$
$$= \{\overline{3}, \overline{14}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}\}$$
$$= \{\overline{3}, \overline{14}, \overline{56}, \overline{7}\}$$
$$= \{\overline{3}, \overline{1}, \overline{4}, \overline{56}, \overline{7}\}$$

$$M_4^A = \{\overline{4}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{5}, \overline{6}\}$$
$$= \{\overline{4}, \overline{2}, \overline{35}, \overline{6}\}$$
$$= \{\overline{4}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{56}\}$$
$$= \{\overline{4}, \overline{2}, \overline{356}\}$$

$$M_5^A = \{\overline{5}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{6}\}$$
$$= \{\overline{5}, \overline{14}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{6}\}$$

$$M_6^A = \{\overline{6}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{7}\}$$
$$= \{\overline{6}, \overline{14}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{5}, \overline{7}\}$$
$$= \{\overline{6}, \overline{35}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{7}\}$$
$$= \{\overline{6}, \overline{14}, \overline{35}, \overline{2}, \overline{7}\}$$

$$M_7^A = \{\overline{7}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{6}\}$$
$$= \{\overline{7}, \overline{14}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{6}\}$$
$$= \{\overline{7}, \overline{35}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{6}\}$$
$$= \{\overline{7}, \overline{56}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}\}$$
$$= \{\overline{7}, \overline{356}, \overline{1}, \overline{2}\}$$
$$= \{\overline{7}, \overline{14}, \overline{35}, \overline{2}, \overline{6}\}$$
$$= \{\overline{7}, \overline{14}, \overline{56}, \overline{2}, \overline{3}\}$$
$$= \{\overline{7}, \overline{14}, \overline{356}, \overline{2}\}$$

$$M_{14}^A = \{\overline{14}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}\}$$
$$= \{\overline{14}, \overline{35}, \overline{2}, \overline{6}, \overline{7}\}$$
$$= \{\overline{14}, \overline{56}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{7}\}$$
$$= \{\overline{14}, \overline{356}, \overline{2}, \overline{3}\}$$

$$M_{35}^A = \{\overline{35}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{7}\}$$
$$= \{\overline{35}, \overline{14}, \overline{2}, \overline{6}, \overline{7}\}$$

$$M_{56}^A = \{\overline{56}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{7}\}$$
$$= \{\overline{56}, \overline{14}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{7}\}$$

$$M_{356}^A = \{\overline{356}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{7}\}$$
$$= \{\overline{356}, \overline{14}, \overline{2}, \overline{7}\}$$

Associando a cada segmento todos os rótulos do conjunto A, resta classificar esta rotulação visando uma eliminação prévia segundo critério(s) icônico(s). O resultado é então considerado como rotulação inicial (f) para o processo de relaxação.

Um critério razoável, nesse caso, é a cor. A classificação dá-se conforme as seguintes considerações:

- uma região azul não deve ser nuvem, árvore e nem grama;
- uma região verde não deve ser céu nem nuvem;
- uma região branca não deve ser céu, árvore e nem grama.

Satisfeitas essas restrições mostra-se a seguir a rotulação inicial e as obtidas nas etapas de relaxação. Logo depois justificam-se todas as eliminações de rótulos. Deste modo:

SEGMENTOS	ITERAÇÕES		
	$\theta^0 f$	$\theta^1 f$	$\theta^2 f$
$\bar{1}$	C, K	C	C
$\bar{2}$	N, K	N, K	N, K
$\bar{3}$	A, G, K	A, K	A, K
$\bar{4}$	C, K	K	K
$\bar{5}$	A, G, K	ϕ	ϕ
$\bar{6}$	A, G, K	G	G
$\bar{7}$	C, N, A, G, K	G, K	G, K
$\bar{14}$	C, K	C	C
$\bar{35}$	A, G, K	A, K	A, K
$\bar{56}$	A, G, K	G	G
$\bar{356}$	A, G, K	A, G, K	A, G, K

SEGMENTO $\bar{1}$

$$\text{R\~{o}tulo K} - [\{k\} \times \theta^0 f(\bar{2})] \cap g(\bar{1}, \bar{2}) = \emptyset$$

O segmento $\bar{2}$ pertence a todas as classes m\~{a}ximas de $\bar{1}$.

SEGMENTO $\bar{3}$

$$\text{R\~{o}tulo G} - [\{G\} \times \theta^0 f(\bar{4})] \cap g(\bar{3}, \bar{4}) = \emptyset,$$

$$[\{G\} \times \theta^0 f(\bar{5})] \cap g(\bar{3}, \bar{5}) = \emptyset,$$

$$[\{G\} \times \theta^0 f(\bar{56})] \cap g(\bar{3}, \bar{56}) = \emptyset.$$

Qualquer classe m\~{a}xima de $\bar{3}$ cont\~{e}m pelo menos um dos segmentos $\bar{4}$, $\bar{5}$ ou $\bar{56}$.

SEGMENTO $\bar{4}$

$$\text{R\~{o}tulo C} - [\{C\} \times \theta^0 f(\bar{2})] \cap g(\bar{4}, \bar{2}) = \emptyset.$$

O segmento $\bar{2}$ pertence a todas as classes m\~{a}ximas de $\bar{4}$.

SEGMENTO $\bar{5}$

$$\text{R\~{o}tulo A} - [\{A\} \times \theta^0 f(\bar{2})] \cap g(\bar{5}, \bar{2}) = \emptyset.$$

O segmento $\bar{2}$ pertence a todas as classes m\~{a}ximas de $\bar{5}$.

$$\text{R\~{o}tulo G} - [\{G\} \times \theta^0 f(\bar{6})] \cap g(\bar{5}, \bar{6}) = \emptyset$$

O segmento $\bar{6}$ pertence a todas as classes m\~{a}ximas de $\bar{5}$.

$$\text{R\~{o}tulo K} - [\{K\} \times \theta^0 f(\bar{3})] \cap g(\bar{5}, \bar{3}) = \emptyset.$$

O segmento $\bar{3}$ pertence a todas as classes m\~{a}ximas de $\bar{5}$.

SEGMENTO $\bar{6}$

$$\text{R\~{o}tulo A} - [\{A\} \times \theta^0 f(\bar{1})] \cap g(\bar{6}, \bar{1}) = \emptyset,$$

$$[\{A\} \times \theta^0 f(\bar{14})] \cap g(\bar{6}, \bar{14}) = \emptyset.$$

Qualquer classe m\~{a}xima de $\bar{6}$ cont\~{e}m pelo menos um dos segmentos $\bar{1}$ ou $\bar{14}$.

$$\begin{aligned} \text{R\~{o}tulo K} - [\{K\} \times \theta^0 f(\overline{1})] \cap g(\overline{6}, \overline{1}) &= \phi, \\ [\{K\} \times \theta^0 f(\overline{14})] \cap g(\overline{6}, \overline{14}) &= \phi. \end{aligned}$$

Qualquer classe m\u00e1xima de $\overline{6}$ cont\u00e9m pelo menos um dos segmentos $\overline{1}$ ou $\overline{14}$.

SEGMENTO $\overline{7}$

$$\text{R\~{o}tulo C} - [\{C\} \times \theta^0 f(\overline{2})] \cap g(\overline{7}, \overline{2}) = \phi.$$

$$\text{R\~{o}tulo N} - [\{N\} \times \theta^0 f(\overline{2})] \cap g(\overline{7}, \overline{2}) = \phi.$$

$$\text{R\~{o}tulo A} - [\{A\} \times \theta^0 f(\overline{2})] \cap g(\overline{7}, \overline{2}) = \phi.$$

O segmento $\overline{2}$ pertence a todas as classes m\u00e1ximas de $\overline{7}$.

SEGMENTO $\overline{14}$

$$\text{R\~{o}tulo K} - [\{K\} \times \theta^0 f(\overline{2})] \cap g(\overline{14}, \overline{2}) = \phi.$$

O segmento $\overline{2}$ pertence a todas as classes m\u00e1ximas de $\overline{14}$.

SEGMENTO $\overline{35}$

$$\text{R\~{o}tulo G} - [\{G\} \times \theta^0 f(\overline{6})] \cap g(\overline{35}, \overline{6}) = \phi.$$

O segmento $\overline{6}$ pertence a todas as classes m\u00e1ximas de $\overline{35}$.

SEGMENTO $\overline{56}$

$$\text{R\~{o}tulo A} - [\{A\} \times \theta^0 f(\overline{2})] \cap g(\overline{56}, \overline{2}) = \phi.$$

$$\text{R\~{o}tulo K} - [\{K\} \times \theta^0 f(\overline{3})] \cap g(\overline{56}, \overline{3}) = \phi.$$

Os segmentos $\overline{2}$ e $\overline{3}$ pertencem a todas as classes m\u00e1ximas de $\overline{56}$.

CAPÍTULO 6

CONSIDERAÇÕES FINAIS

"Deixarei contudo que o pouco que aprendi seja conhecido, de modo que alguém melhor do que eu possa adivinhar a verdade, provando e refutando meus erros com seu trabalho. Isso me dará prazer, pois terei sido um meio para trazer à luz a verdade".

(Albrecht Dürer)

A investigação científica está começando a obter resultados promissores na modelagem da automatização do processo perceptivo visual. Apesar de nem todos os componentes de um eventual sistema não especializado possuírem implementação, ainda que experimental, os resultados teóricos fundamentais encorajam a prosseguir o aprimoramento de uma tal organização.

Este trabalho está diretamente relacionado com o aspecto de redução de ambiguidade, mais especificamente ao nível de representação de objeto, que surge durante as etapas de segmentação e interpretação da imagem em análise. As propostas aqui sugeridas, munidas das respectivas considerações formais, visam generalizar as já existentes, assim como buscar um melhor desempenho a despeito da intrínseca dificuldade computacional encontrada.

Dentre o que seria desejável realizar a fim de dar continuidade a essa linha de desenvolvimento, além obviamente de uma implementação experimental, destaca-se a associação não-determinística nos grafos rotulados e uma representação do conhecimento do domínio da cena em termos de relações n-arias. Do ponto de vista de uma implementação, o algoritmo que aqui representa o operador de relaxação proposto precisa de otimizações, as quais podem ser deduzidas do exemplo apresentado na Seção 5.2. Ou seja, a estrutura de dados poderia suportar, por exemplo, a detecção de segmentos que necessariamente pertencem a to

das as classes máximas de um segmento em exame, assim como outras si tuações análogas nas quais se evitaria examinar em vão classes máximas adicionais.

Enfim, acredita-se que as evidências apresentadas são su ficientes para isentar de desmérito o teor das incursões intelectuais relatadas nesta dissertação.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BARROW, H.G.; TENENBAUM, J.M. Computational vision. *Proceeding of the IEEE*, 69(5):572-595, May 1981.
- HARARY, F. *Graph theory*. 3. ed. Massachusetts, Addison-Wesley, 1972. 273 p.
- PREPARATA, F.P.; YEH, R.T. *Introduction to discrete structures for computer science and engineering*. Second printing. USA, Addison-Wesley, 1974. 354 p.
- ROSENFELD, A.; HUMMEL, R.A.; ZUCKER, S.W. Scene labeling by relaxation operations. *IEEE Transaction on Systems, Man, and Cybernetics*, 6(6):420-433, June 1976.
- TENENBAUM, J.M.; BARROW, H.G. IGS: A paradigm for integrating image segmentation and interpretation. In: AGGARWAL, J.K.; DUDA, R.O.; ROSENFELD, A. *Computer methods in image analysis*. New York, IEEE Press, 1977. Part VII, p. 435-444.
- VELASCO, F.R.D.; ROSENFELD, A. The application of relaxation to waveforms with ambiguous segmentations. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 9(8):420-428, Aug. 1979.
- WALZ, D. Understanding line drawings of scenes with shadows. In: WINSTON, P.H. *The psychology of computer vision*. U.S.A. McGraw-Hill, 1975. p. 19-92.

BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTAR

- AHO, A.V.; HOPCROF, J.E.; ULLMANN, J.D. *The design and analysis of computer algorithms*. USA, Addison-Wesley, 1974. 470 p.
- BALLARD, D.H.; BROWN, C.W. *Computer vision*. New Jersey, Prentice-Hall, 1982. 523 p.
- GILL, A. *Applied algebra for the computer sciences*. New Jersey, Prentice-Hall, 1976. 432 p.
- PREPARATA, F.P.; RAY, S.R. An approach to artificial nonsymbolic cognition. *Information Science*, 4(1):65-86, Jan. 1972.
- ROSENFELD, A. Picture processing by computer. *Computer Surveys*, 1(3):146-174, Sept. 1969.
- VELASCO, F.R.D. *Gramáticas generalizadas de grafos em reconhecimento de padrões*. Tese de Doutorado em Computação Aplicada. São José dos Campos, INPE, Abr. 1977.
- WINSTON, P.H. *Artificial intelligence*. Second printing. Massachusetts, Addison-Wesley, 1979. 444 p.
- YAKIMOVSKY, Y.; FELDMAN, J.A. A semantics-based decision theory region analyser. In: AGGARWAL, J.K.; DUDA, R.O.; ROSENFELD, A. *Computer methods in image analysis*. New York, IEEE Press, 1977. Part VII, p. 426-434.
- ZUCKER, S.W. Relaxation labelling and the reduction of local ambiguities. In: AGGARWAL, J.K.; DUDA, R.O.; ROSENFELD, A. *Computer methods in image analysis*. New York, IEEE Press, 1977. Part VII, p. 445-454.

APÊNDICE A

PROPOSIÇÕES SINGULARES SOBRE SEGMENTAÇÕES

Este apêndice relaciona alguns resultados algébricos úteis às argumentações dedutivas deste trabalho. Eles têm como fundamento as seguintes hipóteses:

R é um conjunto finito e não vazio;

$\emptyset \neq A \subseteq 2^R - \{\emptyset\}$, tal que $r \in R \implies \{r\} \in A$;

S_1, S_2, \dots, S_n são todas as partições de R possíveis de obter apenas com elementos de A .

PROPOSIÇÃO A.1 - $j \in \{1, 2, \dots, n\} \implies S_j \subseteq A$.

PROPOSIÇÃO A.2 - $\bigcup_{j=1}^n S_j = A$.

PROPOSIÇÃO A.3 - $s \in A \implies$ existe $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, tal que $s \in S_j$.

PROPOSIÇÃO A.4 - $T \subsetneq R \implies$ existe $w \subseteq A$, tal que w é uma partição de $R-T$.

PROPOSIÇÃO A.5 - $\left. \begin{array}{l} T \subsetneq R \\ X \text{ é uma partição de } T \\ Y \text{ é uma partição de } R-T \end{array} \right\} \implies X \cup Y \text{ é uma partição de } R$.

