



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA  
**INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS**

**INPE-14090-TDI/1073**

**ANÁLISE DE CONJUNTOS CAÓTICOS ATRATIVOS E NÃO-  
ATRATIVOS EM SISTEMAS DINÂMICOS DE BAIXA E ALTA  
DIMENSÃO: APLICAÇÃO PARA A DINÂMICA DE ONDAS DE  
PLASMA NA CONEXÃO SOL-TERRA**

Erico Luiz Rempel

Tese de Doutorado do Curso de Pós-Graduação em Computação Aplicada, orientada pelos Drs. Reinaldo Roberto Rosa, Abraham Chian-Long Chian e Elberto Einstein Neher Macau, aprovada em 28 de julho de 2003.

INPE  
São José dos Campos  
2006

517.938

Rempel, E. L.

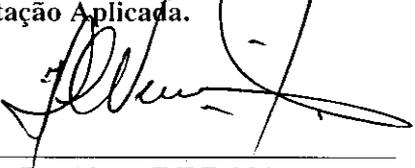
Análise de Conjuntos Caóticos Atrativos e Não-Atrativos em Sistemas Dinâmicos de Baixa e Alta Dimensão: Aplicação para a Dinâmica de Ondas de Plasma na Conexão Sol-Terra / Erico Luiz Rempel. – São José dos Campos: Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE), 2003.

206 p.; (INPE-14090-TDI/1073)

1.Caos. 2.Sistemas Dinâmicos. 3.Ondas Magnetohidrodinâmicas. 4.Vento Solar. 5.Plasmas Espaciais I Título

Aprovado pela Banca Examinadora em  
cumprimento a requisito exigido para a  
obtenção do Título de **Doutor em**  
**Computação Aplicada.**

Dr. Haroldo Fraga de Campos Velho



---

Presidente/INPE-SJCampos/SP

Dr. Reinaldo Roberto Rosa



---

Orientador/INPE-SJCampos/SP

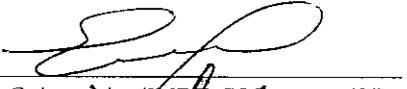
Dr. Abraham Chian Long Chian



---

Orientador/INPE-SJCampos/SP

Dr. Elbert Einstein Neher Macau



---

Orientador/INPE-SJCampos/SP

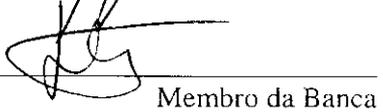
Dr. Fernando Manuel Ramos



---

Membro da Banca/INPE-SJCampos/SP

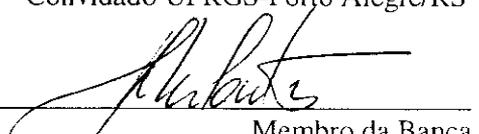
Dr. Felipe Barbedo Rizzato



---

Membro da Banca  
Convidado UFRGS-Porto Alegre/RS

Dr. José da Rocha Miranda Pontes



---

Membro da Banca  
Convidado COPPE/UFRJ-RJaneiro/RJ

Candidato (a): Érico Luiz Rempel

São José dos Campos, 28 de julho de 2003.



Para Lucy



## AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Dr. Reinaldo R. Rosa pela orientação, por ter me apresentado à área de dinâmica não-linear, bem como pelo seu papel na elaboração do projeto original desta Tese, submetido para a FAPESP;

Agradeço ao Dr. Abraham C.-L. Chian pela orientação, pelo incentivo constante e principalmente pela condução da pesquisa durante o meu estágio em Adelaide, estando sempre pronto a ceder seu tempo para atender a todas as minhas dificuldades relacionadas ao trabalho e à minha adaptação na Austrália;

Agradeço ao Dr. Elbert E. N. Macau pela orientação, pelos cursos de dinâmica caótica ministrados e pela ajuda, conselhos e correções de grande valia para o correto desenvolvimento da Tese;

Agradeço à minha esposa Lucy pelo companheirismo, auxílio, cuidado e pela paciência nos momentos mais difíceis, estando sempre pronta a me dar o apoio necessário para que eu pudesse continuar;

Agradeço aos meus pais e meus irmãos pelo apoio e orações;

Agradeço ao amigo Felix Borotto, que me forneceu seus códigos numéricos e me ajudou por diversas vezes com sua experiência na área de sistemas caóticos;

Agradeço ao Freddy Christiansen, do Danish Meteorological Institute, pelo envio de dados cruciais para o desenvolvimento da Tese;

Agradeço aos colegas de curso de Computação Aplicada do INPE, que me ajudaram durante o período de créditos;

Agradeço aos amigos do CSSM, na Universidade de Adelaide, que permitiram a utilização de suas instalações e seus recursos computacionais;

Agradeço aos professores do curso de Computação Aplicada do INPE, que contribuíram com minha formação;

Agradeço ao apoio financeiro da FAPESP durante todo o desenvolvimento do doutorado no Brasil;

Agradeço ao apoio financeiro do CNPq durante o estágio em Adelaide;

Agradeço ao LAC/INPE pelos recursos humanos e computacionais disponíveis, em especial ao serviço prestado pelas secretárias e pelo pessoal da área de suporte em informática;

Agradeço pelos serviços prestados pela biblioteca do INPE, sempre fornecendo todos os artigos solicitados;

Agradeço a Deus pela saúde, direção, capacitação e pela paz de seu Filho, Jesus.

## RESUMO

Nesta tese é feito um estudo numérico sobre a interação entre conjuntos caóticos atrativos e não-atrativos em modelos matemáticos que descrevem a dinâmica de ondas de plasmas na conexão Sol-Terra. O trabalho é dividido em duas partes. Na primeira parte é analisado um sistema dinâmico de baixa dimensão para ondas de Alfvén estacionárias modeladas pela equação Schrödinger não-linear derivativa. Fenômenos não-lineares conhecidos como crises, onde a estrutura de um atrator caótico é alterada subitamente, são caracterizados por meio da verificação da colisão do atrator caótico com uma órbita periódica instável. É mostrado como um atrator caótico após uma crise interior pode ser decomposto em dois conjuntos caóticos não-atrativos, dinamicamente conectados por um conjunto de órbitas periódicas instáveis acopladoras. As implicações deste acoplamento entre dois conjuntos caóticos não-atrativos para a dinâmica intermitente observada em diversos sistemas caótico é discutida. Na segunda parte da tese é feita uma tentativa de avançar o entendimento da conexão entre sistemas caóticos de baixa dimensão e sistemas espaço-temporais. Para isto, é desenvolvida uma metodologia para estender os resultados obtidos na primeira parte para a análise de um sistema dinâmico de alta dimensão obtido pela solução numérica da equação Kuramoto-Sivashinsky. É demonstrada pela primeira vez uma crise interior devido a tangência homoclínica em uma equação diferencial parcial, sendo apresentada uma nova técnica para visualizar esta tangência homoclínica em um espaço de fase de alta dimensão.



**ANALYSIS OF ATTRACTING AND NON-ATTRACTING  
CHAOTIC SETS IN LOW AND HIGH-DIMENSIONAL  
DYNAMICAL SYSTEMS: APPLICATION TO THE DYNAMICS OF  
PLASMA WAVES IN THE SUN-EARTH CONNECTION**

**ABSTRACT**

In this work we present a numerical study on the interaction between chaotic attractors and nonattracting chaotic sets in mathematical models that describe the nonlinear dynamics of plasma waves in the Sun-Earth connection. The work is divided in two parts. In the first part we analyze a low-dimensional dynamical system describing stationary Alfvén waves modeled by the derivative nonlinear Schrödinger equation. Nonlinear phenomena known as crises, where the structure of a chaotic attractor is abruptly changed, are characterized by the verification of the collision of the chaotic attractor with an unstable periodic orbit. It is shown that a post-crisis chaotic attractor can be decomposed in two nonattracting chaotic sets, dynamically connected by a set of coupling unstable periodic orbits. We discuss the importance of this coupling for intermittency. In the second part of the work we study the connection between low-dimensional chaotic systems and spatiotemporal systems. We develop a methodology to extend the results obtained in the first part to analyze a high-dimensional dynamical system obtained from the numerical solution of the Kuramoto-Sivashinsky equation. We characterize for the first time an interior crisis due to a homoclinic tangency in a partial differential equation, and present a novel technique to visualize this homoclinic tangency in a high-dimensional phase space.



# SUMÁRIO

Pág.

## LISTA DE FIGURAS

<b>CAPÍTULO 1 INTRODUÇÃO .....</b>	<b>21</b>
1.1 Ondas de Alfvén e Caos na Conexão Sol-Terra . . . . .	24
1.2 Estrutura da Tese . . . . .	29
<b>CAPÍTULO 2 CONCEITOS FUNDAMENTAIS .....</b>	<b>31</b>
2.1 Sistemas Dinâmicos . . . . .	31
2.2 Mapas . . . . .	32
2.2.1 Mapas Inversíveis . . . . .	32
2.2.2 Difeomorfismo . . . . .	33
2.2.3 Mapas de Poincaré . . . . .	33
2.3 Conjuntos Limite . . . . .	34
2.3.1 Atratores . . . . .	35
2.3.2 Pontos Fixos . . . . .	35
2.3.3 Órbitas Periódicas . . . . .	36
2.3.4 Órbitas Quasiperiódicas . . . . .	36
2.3.5 Órbitas Caóticas . . . . .	39
2.3.5.1 Atratores Caóticos . . . . .	39
2.4 Estabilidade . . . . .	39
2.4.1 Estabilidade de Pontos de Equilíbrio . . . . .	41
2.4.2 Estabilidade de Órbitas Periódicas . . . . .	43
2.4.2.1 Equação Variacional . . . . .	43
2.4.3 Expoentes de Lyapunov . . . . .	45
2.5 Dimensões . . . . .	47

2.6	Variedades Invariantes . . . . .	48
2.6.1	Variedades em Sistemas Contínuos no Tempo . . . . .	49
2.6.2	Variedades em Sistemas Discretos no Tempo . . . . .	50
2.6.3	Dimensão de uma Variedade . . . . .	52
2.6.4	Cruzamentos Homoclínicos e Heteroclínicos . . . . .	53
2.7	Selas Caóticas . . . . .	53
2.7.1	Diferença entre Atrator Caótico e Sela Caótica . . . . .	55
2.8	Bifurcações . . . . .	57
2.8.1	Bifurcação Sela-Nó . . . . .	58
2.8.2	Bifurcação Hopf . . . . .	58
2.8.3	Bifurcação de Duplicação de Período . . . . .	59
2.9	Crises . . . . .	59
<b>CAPÍTULO 3 ALGORITMOS . . . . .</b>		<b>63</b>
3.1	Encontrando Pontos Fixos . . . . .	63
3.1.1	O Método de Newton para Mapas Unidimensionais . . . . .	63
3.1.2	O Método de Newton para Equações Diferenciais . . . . .	64
3.2	Variedades de Pontos de Sela . . . . .	66
3.3	Selas Caóticas . . . . .	68
3.3.1	O Método “Sprinkler” . . . . .	68
3.3.2	O Método “PIM Triple” . . . . .	70
3.3.3	Comentários sobre os Algoritmos . . . . .	71
3.4	Variedades de Pontos de Sela $\times$ Variedades de Selas Caóticas . . . . .	75
<b>CAPÍTULO 4 CAOS NA EQUAÇÃO SCHRÖDINGER NÃO- LINEAR DERIVATIVA . . . . .</b>		<b>77</b>
4.1	Introdução . . . . .	77
4.2	A Equação DNLS . . . . .	77
4.3	Crises Interior e de Fronteira na Equação DNLS . . . . .	79
4.4	Selas Caóticas na Equação DNLS . . . . .	93

4.4.1	Bifurcação Sela-Nó . . . . .	96
4.4.2	Crise Interior . . . . .	101
4.4.3	Encontrando Órbitas de Acoplamento . . . . .	111
4.4.4	Definição da Região de Restrição . . . . .	113

**CAPÍTULO 5 CAOS NA EQUAÇÃO KURAMOTO-SIVASHINSKY . . . . . 119**

5.1	Introdução . . . . .	119
5.2	A Equação Ginzburg-Landau Complexa . . . . .	120
5.3	A Equação Kuramoto-Sivashinsky . . . . .	123
5.4	Resolução Numérica da Equação KS . . . . .	125
5.5	Análise de Estabilidade . . . . .	131
5.6	Sistemas Dinâmicos de Dimensão Finita . . . . .	132
5.7	Seção de Poincaré e Invariância a Translação . . . . .	137
5.8	Crise Interior de Alta Dimensão na Equação KS . . . . .	138
5.9	Selas Caóticas na Equação KS . . . . .	147
5.9.1	Visualização de uma Tangência Homoclínica de Alta Dimensão . . . . .	151
5.9.2	Situação Pós-Crise . . . . .	161
5.9.3	Definição da Região de Restrição . . . . .	164

**CAPÍTULO 6 CONCLUSÃO . . . . . 171**

6.1	Resumo dos Resultados . . . . .	171
6.2	Trabalhos Futuros . . . . .	173
6.2.1	Paralelização de Algoritmos . . . . .	173
6.2.2	Análise no Espaço de Fase no Domínio Espaço-Temporal Unidimensional . . . . .	173
6.2.3	Análise no Espaço de Fase no Domínio Espaço-Temporal Bidimensional . . . . .	174
6.2.4	Análise de Séries Temporais e Espaço-Temporais . . . . .	174
6.3	Possíveis Aplicações . . . . .	175

<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>177</b>
<b>APÊNDICE A OPERADORES DE CAMPO GRADIENTE .....</b>	<b>197</b>
A.1 Operador AAF .....	197
A.2 Operador CEF .....	198
A.3 Análise de Padrões Gradientes na Equação Swift-Hohenberg .....	198
A.4 Análise de Padrões Gradientes no Modelo Bohr-Rand .....	201

## LISTA DE FIGURAS

	Pág.
1.1	Séries temporais do campo magnético interplanetário . . . . . 26
1.2	Séries temporais intermitentes do vento solar . . . . . 27
2.1	Exemplo de mapa de Poincaré . . . . . 34
2.2	Componentes periódicos de uma órbita quasiperiódica . . . . . 38
2.3	Órbita quasiperiódica sobre um toro . . . . . 38
2.4	Estabilidade de pontos fixos . . . . . 40
2.5	Deformação de uma área circular no espaço de fase . . . . . 46
2.6	Ilustração do teorema da variedade estável . . . . . 50
2.7	Variedade invariantes de soluções periódicas . . . . . 52
2.8	Cruzamentos homoclínicos e heteroclínicos . . . . . 54
2.9	Representação de uma sela caótica . . . . . 55
2.10	Diferença entre atrator e sela caótica . . . . . 57
2.11	Diagramas de bifurcação com crises . . . . . 61
2.12	Tangências heteroclínicas e homoclínicas . . . . . 62
3.1	Selas caótica no mapa de Hénon . . . . . 74
3.2	Variedades estáveis no mapa de Hénon . . . . . 76
4.1	Mapa de tempo $T = 2\pi/\Omega$ . . . . . 79
4.2	Diagrama de bifurcação para janela p-3 da equação DNLS . . . . . 81
4.3	Bacias de atração para a equação DNLS . . . . . 83
4.4	Trajетórias periódicas e caóticas no espaço de fase e no mapa de Poincaré 85
4.5	Diagrama de bifurcação com crise de fronteira na equação DNLS . . 86
4.6	Pontos de Poincaré do atrator caótico logo antes da crise de fronteira 87
4.7	Tangência homoclínica responsável por crise de fronteira na equação DNLS . . . . . 88
4.8	Pontos de Poincaré do atrator caótico logo antes da crise interior . . 90
4.9	Tangência homoclínica responsável por crise interior na equação DNLS 91

4.10	Diagrama de crise para a equação DNLS . . . . .	92
4.11	Representação esquemática de uma órbita após um cruzamento homoclínico . . . . .	93
4.12	Variação da sela caótica em função de $\nu$ e diagrama de bifurcação do atrator em uma janela p-2 da equação DNLS. . . . .	95
4.13	Conjuntos invariantes nas proximidades de uma bifurcação sela-nó na equação DNLS . . . . .	97
4.14	Sela caótica e suas variedades após uma bifurcação sela-nó na equação DNLS . . . . .	99
4.15	Estimação do tempo médio de transiente após uma bifurcação sela-nó na equação DNLS . . . . .	100
4.16	Conjuntos invariantes antes de uma crise interior na equação DNLS .	102
4.17	Estimação do tempo médio de transiente em uma crise interior na equação DNLS . . . . .	103
4.18	Colisão do atrator caótico com uma sela caótica na equação DNLS .	104
4.19	Colisão do atrator caótico com a variedade estável de uma sela caótica na equação DNLS . . . . .	106
4.20	Conjuntos invariantes após a crise, em $\nu = 0.06205$ . . . . .	107
4.21	Conjuntos invariantes após a crise, em $\nu = 0.0616$ . . . . .	109
4.22	Série temporal estroboscópica mostrando a intermitência induzida pela crise na equação DNLS . . . . .	111
4.23	Séries temporais estroboscópicas ilustrando a diminuição do tempo médio de transientes após a crise na equação DNLS . . . . .	112
4.24	Definição de uma região retangular com condições iniciais para o método de Newton para encontrar órbitas de acoplamento. . . . .	114
4.25	Órbita de acoplamento p-11 na equação DNLS . . . . .	115
4.26	Órbita de acoplamento p-13 na equação DNLS . . . . .	116
4.27	Definição da região de restrição na equação DNLS . . . . .	117
5.1	taxa de crescimento dos modos de Fourier em função do número de onda $k$ . . . . .	122

5.2	Modulação lenta do modo crítico próximo ao ponto de bifurcação . . .	122
5.3	Diagramas de bifurcação para a equação KS . . . . .	135
5.4	Variação temporal dos modos de Fourier na equação KS . . . . .	136
5.5	Simetrias na equação KS . . . . .	139
5.6	Padrão espaço-temporal $u(x, t)$ para $\nu = 0.02992006$ . . . . .	140
5.7	Diagrama de bifurcação, expoente de Lyapunov máximo e comprimento de correlação para a equação KS. . . . .	141
5.8	Variação temporal do expoente de Lyapunov máximo da equação KS	142
5.9	Projeção tridimensional do atrator caótico da equação KS próximo a uma crise interior . . . . .	145
5.10	Projeção tridimensional da variedade instável da órbita periódica instável p-3 logo após a crise interior . . . . .	146
5.11	Atrator caótico e a variedade instável do ponto de sela na crise interior da equação KS . . . . .	148
5.12	Variação da sela caótica e diagrama de bifurcação para a equação KS	150
5.13	Projeção tridimensional da sela caótica na equação KS . . . . .	151
5.14	Conjuntos invariantes próximo a uma bifurcação sela-nó na equação KS	152
5.15	Grade de condições iniciais para a aplicação do método “sprinkler” na equação KS . . . . .	154
5.16	Projeção tridimensional da grade junto com a sela caótica, 1 . . . . .	155
5.17	Projeção tridimensional 2 da grade junto com a sela caótica, 2 . . . . .	156
5.18	Projeção tridimensional 3 da grade junto com a sela caótica, 3 . . . . .	157
5.19	Cálculo do tempo médio de transiente na equação KS . . . . .	159
5.20	Colisão do atrator caótico com a sela caótica e sua variedade estável em uma crise interior na equação KS . . . . .	160
5.21	Tangência homoclínica na equação KS, 1 . . . . .	162
5.22	Tangência homoclínica na equação KS, 2 . . . . .	163
5.23	Conjuntos invariantes após a crise interior na equação KS . . . . .	165
5.24	Série temporal intermitente após a crise interior da equação KS . . .	166
5.25	Definição da região de restrição na equação KS no momento da crise	169

5.26	Definição da região de restrição na equação KS após a crise interior .	170
A.1	Dois quadros de uma simulação da equação SH . . . . .	200
A.2	Evolução de $F_A$ para uma simulação da equação SH . . . . .	201
A.3	Evolução da componente fase de CEF ( $\Im(S_c)$ ) para uma simulação da equação SH. . . . .	202
A.4	Evolução espaço-temporal de uma perturbação aplicada no modelo de Bohr-Rand . . . . .	205
A.5	Curvas de contorno do pacote instável para quatro instantes de tempo	206
A.6	Evolução temporal do parâmetro $F_A$ para o modelo de Bohr-Rand .	206

## CAPÍTULO 1

### INTRODUÇÃO

Nas últimas décadas a teoria do caos tem fornecido ferramentas poderosas para a interpretação da física de sistemas dinâmicos de baixa dimensão, ou seja, sistemas determinísticos representados por mapeamentos discretos com até três variáveis ou sistemas autônomos de três equações diferenciais ordinárias (EDO's) acopladas. Contudo, muitos sistemas de interesse prático são descritos por equações diferenciais parciais (EDP's), e ainda não está totalmente determinado como os mecanismos físicos responsáveis pela geração de comportamento caótico em sistemas de baixa dimensão podem ser estendidos para sistemas descritos por EDP's. Em 1982, Sparrow [1] apresentou um estudo detalhado sobre o modelo de Lorenz, um conjunto de três EDO's acopladas, abordando a ocorrência de bifurcações, atratores e caos para diferentes intervalos de valores de alguns parâmetros de controle. Em seu prefácio, Sparrow comenta a respeito da relevância de seu trabalho para o entendimento de turbulência no mundo real:

“...creio que até termos um melhor conhecimento sobre o comportamento das aproximações de dimensão finita para as equações diferenciais parciais que modelam o mundo, não creio que eu tenha qualquer coisa muito útil para dizer sobre o assunto.” [1], p. vi.

Mais recentemente, diversos autores têm tentado desenvolver uma teoria de sistemas dinâmicos para sistemas de alta dimensão, usualmente descritos por conjuntos de EDO's acopladas obtidas como aproximações para as EDP's originais [2,3,4,5,6,7,8,9]. A abordagem mais simples consiste em primeiramente “importar” as ferramentas desenvolvidas para sistemas dinâmicos de baixa dimensão e aplicá-las a sistemas espaço-temporais que exibam características de caos de baixa dimensão, tais como a ocorrência de caos na variação temporal combinada com a manutenção

de estruturas com alto grau de correlação espacial (coerência espacial). Após isto, é possível testar e desenvolver as ferramentas para que sejam usadas em outras situações que exibam uma dinâmica mais complexa nas escalas espaciais e temporais. A razão para esta forma de abordagem é que, conforme será ilustrado neste trabalho, uma abordagem baseada em sistemas dinâmicos permite um entendimento detalhado do que está acontecendo com o sistema e possibilita identificar quais são os principais “agentes” ou fatores responsáveis pelas mudanças de comportamento que ocorrem ao se variar certos parâmetros. Isto não só abre a possibilidade de se interpretar de maneira mais precisa certos fenômenos observados na natureza, como também abre a possibilidade de aplicação de técnicas inovadoras de controle baseadas na teoria do caos [10,11,12].

Esta Tese se propõe a ser mais um passo para estabelecer uma conexão entre caos em sistemas de baixa dimensão e uma determinada classe de sistemas espaço-temporais de alta dimensão, que exibem caos temporal e coerência espacial. Para isto será abordada a interação entre conjuntos caóticos atrativos e não-atrativos em sistemas de baixa e alta dimensão. A maioria dos estudos sobre sistemas dinâmicos dissipativos baseia-se na análise do seu comportamento assintótico, quando as soluções convergem para um estado globalmente estável, denominado de atrator, após um tempo inicial chamado de transiente. A razão pela concentração em atratores é porque eles são diretamente observáveis, sendo mais fácil a sua análise. Contudo, soluções instáveis desempenham um papel fundamental na dinâmica do sistema e sua análise pode ser crucial para o entendimento e previsão da dinâmica observável. Dentre estas soluções instáveis destacam-se os conjuntos caóticos não-atrativos, também chamados de selas caóticas, que, entre outras coisas, são responsáveis por transientes caóticos. Uma previsão do tempo médio de transiente pode ser feita por meio do estudo das características intrínsecas da sela caótica [13,14,15]. Longos transientes caóticos, observados em simulações numéricas e experimentos com fluidos, têm sido associados com selas caóticas em uma tentativa de se explicar a transição para turbulência. Em simulações numéricas de escoamento Couette plano, onde o es-

coamento do fluido se dá entre duas paredes paralelas, Schmiegel e Eckhardt [16] e Eckhardt e Mersmann [17] estudaram a ocorrência de longos transientes caóticos em função do número de Reynolds e da amplitude de perturbações de um estado inicial laminar. A presença de transientes caóticos arbitrariamente longos torna extremamente difícil a determinação precisa do ponto de transição para um comportamento turbulento permanente, o que está de acordo com experimentos realizados com fluidos em escoamento aberto [18]. Schmiegel e Eckhardt [16] sugerem que o comportamento turbulento transiente de longa duração surge a partir de perturbações iniciadas próximas a uma sela caótica, de forma que, na região de transição, o estado turbulento seria devido a uma sela caótica, e não um atrator.

Além de serem responsáveis por transientes caóticos, as selas caóticas são responsáveis por fenômenos intermitentes [19,20], espalhamento caótico (“chaotic scattering”) [12,21,22] e fronteiras fractais entre bacias de atração [13,23]. No último caso, um sistema possui a coexistência de dois ou mais atratores, cada qual atrai um conjunto de condições iniciais denominado de bacia de atração. Se a fronteira entre as duas bacias possui uma estrutura fractal, pode-se mostrar que existe uma sela caótica na fronteira, o que se constitui em um obstáculo para a previsão do estado final do sistema. Um conhecimento de características intrínsecas da sela caótica pode indicar o grau de melhoria na precisão da especificação de condições iniciais para que se possa melhorar a previsão da evolução do sistema [24,25]. Em Péntek et al. [26], fronteiras fractais foram identificadas como sendo uma assinatura da presença de selas caóticas em simulações numéricas de fluidos em escoamento aberto. Em Ziemniak et al. [22], selas caóticas foram relacionadas com o comportamento caótico apresentado por partículas de fluido em vórtices formados em escoamento hidrodinâmico aberto com a presença de obstáculos. Na área de comunicação usando caos, selas caóticas são importantes na codificação de mensagens robustas a ruído [27].

Neste trabalho é feito um estudo numérico do papel de selas caóticas e também de soluções periódicas instáveis na geração de caos em sistemas de baixa e alta

dimensão. Em específico, são destacadas as transições caóticas conhecidas como crises interiores, onde o tamanho do atrator caótico aumenta abruptamente. No caso de alta dimensão, é apresentada uma nova técnica numérica para demonstrar a ocorrência de um evento conhecido como tangência homoclínica, responsável por uma crise interior. Além disso, outros tipos de transições caóticas são abordados nesta tese, tais como crises de fronteira, cascatas de bifurcações de duplicação de período e bifurcações sela-nó. Como estudo de caso, será feita uma investigação de dois modelos matemáticos ligados à dinâmica de ondas de plasma na conexão Sol-Terra.

### 1.1 Ondas de Alfvén e Caos na Conexão Sol-Terra

O Sol é um corpo gasoso de plasma estruturado em diversas camadas, aproximadamente concêntricas, sendo a coroa a camada mais externa. Um plasma é um gás de partículas neutras e carregadas que exibe comportamento coletivo. À medida que as partículas se deslocam, elas podem gerar concentrações locais de cargas positivas e negativas, criando campos elétricos, correntes e campos magnéticos. Tais campos afetam o movimento de outras cargas que se encontram distantes das perturbações iniciais. As perturbações de campos se propagam na forma de ondas. Um gás ionizado é chamado de plasma se possui suficientes cargas livres para influenciar propriedades relevantes do meio [28,29].

A energia do Sol é proveniente de fusões nucleares de núcleos de hidrogênio, gerando núcleos de hélio. Uma combinação de processos radioativos e convectivos transporta a energia produzida durante o processo de fusão para a superfície visível do Sol, onde a energia é irradiada para o espaço. A maior parte desta energia é irradiada na forma de radiação eletromagnética, mas fluxos de partículas (neutras e ionizadas) também são ejetados para o meio interplanetário, através do *vento solar*. Estas partículas escapam ao longo de linhas de campo magnético a velocidades que variam aproximadamente entre 250 e 1000 km/s. Além do vento solar, outros fenômenos podem gerar a emissão de partículas e energia pelo Sol, tais como as explosões solares, que

se verificam como liberações bruscas de enormes quantidades de energia e matéria. Muitas das partículas lançadas no espaço atingem a Terra horas depois, afetando o campo magnético terrestre e podendo causar bloqueios de telecomunicações, danificar componentes eletrônicos em satélites e afetar sistemas de navegação [29,30,31].

Observações das regiões ativas solares e do vento solar revelam que os plasmas nestas regiões são dominados por ondas e instabilidades [32]. Em específico, flutuações de baixa frequência no campo magnético e na velocidade do plasma medidas no vento solar são, em geral, altamente correlacionadas, o que tem levado à sugestão de que as flutuações são geradas por ondas de Alfvén [33,34,35]. Ondas de Alfvén são modos de baixa frequência cuja relação de dispersão<sup>1</sup> é

$$\omega = kv_A, \tag{1.1}$$

onde o número de onda  $k$  é o módulo do vetor de onda  $\mathbf{k}$  paralelo ao campo magnético ambiental homogêneo  $\mathbf{B}_0$  e  $v_A$  é a velocidade de propagação da onda, chamada de velocidade de Alfvén, e definida por [29]

$$v_A = \frac{B_0}{\sqrt{4\pi\rho_0}}, \tag{1.2}$$

onde  $B_0$  é o módulo do campo magnético homogêneo e  $\rho_0 = n_e m_e + n_i m_i$  é a densidade média do plasma.  $n_e m_e$  e  $n_i m_i$  são as densidades de elétrons e de ions, respectivamente. Como a massa de um elétron é muito menor do que a massa de um ion ( $m_e \ll m_i$ ), a velocidade de Alfvén é basicamente determinada pela densidade de ions e pelo campo magnético ambiental [36]. Pode-se demonstrar que nas ondas de Alfvén verifica-se a relação [35,37]

$$\delta\mathbf{v} = \frac{\mathbf{b}}{\sqrt{4\pi\rho_0}}, \tag{1.3}$$

onde  $\delta\mathbf{v}$  e  $\mathbf{b} = \delta\mathbf{B}_0$  são perturbações da velocidade de propagação e do campo magnético ambiental, respectivamente. Assim,  $\delta\mathbf{v}$  e  $\delta\mathbf{B}_0$  são paralelos e propor-

---

<sup>1</sup>expressão relacionando frequência e número de onda

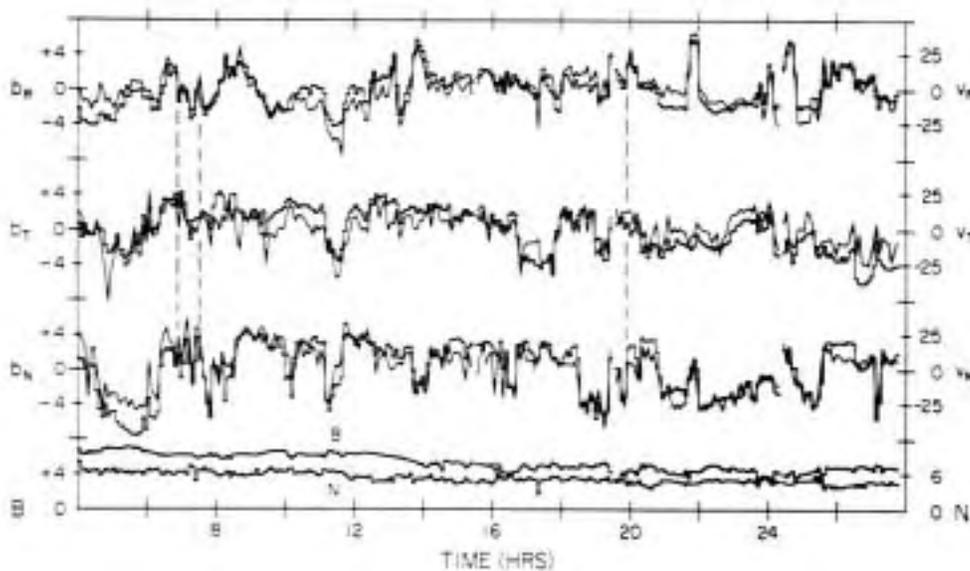


FIGURA 1.1 - Vinte e quatro horas de dados do campo magnético e da velocidade do plasma medidas pela sonda Mariner 5, demonstrando a presença de flutuações Alfvênicas no meio interplanetário. As seis primeiras curvas são médias das variações das componentes da velocidade ( $v_R, v_T, v_N$ ) em km/s (linhas diagonais) e do campo magnético ( $b_R, b_T, b_N$ ) (linhas verticais e horizontais), medidas a cada 5.04 min. As duas curvas inferiores representam a intensidade média do campo magnético ambiental ( $B$ ) e a densidade de prótons ( $N$ ). FONTE: [33] (p. 3537).

cionais, o que implica que o plasma se propaga ao longo das linhas do campo magnético, oscilando junto com as linhas de força. A Figura 1.1, extraída de Belcher e Davis [33], mostra, componente a componente, a alta correlação entre o vetor de flutuações da velocidade média do plasma ( $v_R, v_T, v_N$ ) com o vetor de flutuações do campo magnético homogêneo ( $b_R, b_T, b_N$ ) no vento solar, demonstrando a existência de flutuações Alfvênicas.

A Figura 1.2 mostra um exemplo de dados do vento solar obtidos no dia 12 de maio de 2003 pelo o satélite “Advanced Composition Explorer”(ACE). Os dados

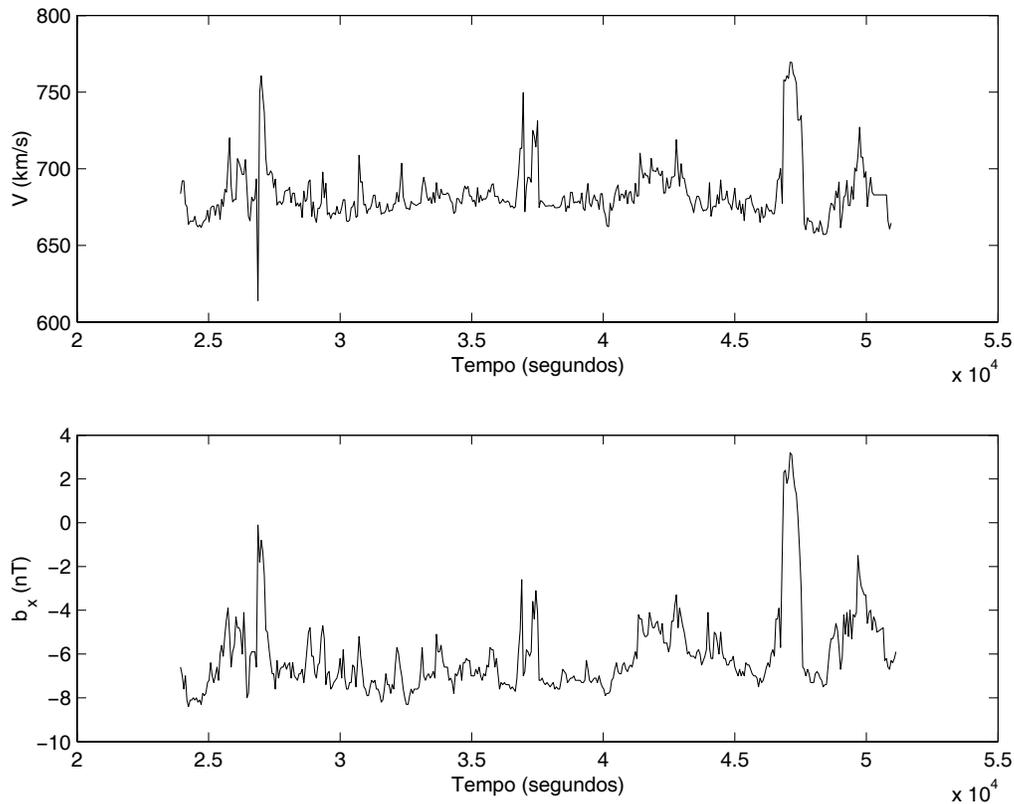


FIGURA 1.2 - (a) Variação temporal intermitente da velocidade média do vento solar; (b) variação temporal intermitente de uma das componentes vetoriais do campo magnético.

consistem de médias do módulo da velocidade do vento solar (Figura 1.2(a)) e de uma das componentes do campo magnético (Figura 1.2(b)), calculadas a cada minuto. Estes dados podem ser acessados no sítio do “Space Environment Center” (SEC) <<http://sec.noaa.gov/ace/>>. Nota-se que as séries são intermitentes, sendo caracterizadas por fases em que as oscilações são de baixa amplitude, intercaladas por fases mais curtas em que ocorre grande variabilidade, com picos maiores. Em geral, os dados medidos no vento solar são altamente intermitentes [38].

Percebe-se pelas Figuras 1.1 e 1.2 que  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{b}$  não refletem necessariamente o comportamento de ondas periódicas, mas são apenas perturbações que se propagam. Em geral estas perturbações se apresentam de maneira fortemente errática, e revelam

espectros de potência contínuos e com leis de potência características de regimes turbulentos. Para uma revisão sobre turbulência Alfvênica no vento solar baseada em dados observacionais pode-se consultar os trabalhos de Marsch e Tu [39] e Goldstein et al. [34].

Os mecanismos responsáveis pela evolução não-linear de ondas de plasma no ambiente espacial ainda não são bem compreendidos. Alguns trabalhos teóricos têm se apoiado na teoria de sistemas caóticos para explicar a evolução dinâmica de ondas de Alfvén, sendo que a maioria deles se baseia em soluções da equação Schrödinger não-linear derivativa (DNLS). Em Ghosh e Papadopoulos [40], estudos conduzidos com soluções espaço-temporais revelaram mecanismos de transição de ordem para caos via seqüências de bifurcações de duplicação de período. Buti [41] reportou como soluções espaço-temporais caóticas dos campos magnéticos obtidas com a equação DNLS apresentam espectros com leis de potência muito semelhantes a dados de observações do vento solar apresentados por Bavassano et al. [42]. Hada et al. [43] e Chian et al. [44,45] utilizaram um modelo de baixa dimensão para mostrar como soluções estacionárias da equação DNLS podem evoluir para comportamento caótico e intermitente. Transições para caos determinístico via crises em plasmas foram também estudadas em outros modelos de alta dimensão [7,46].

Diversos trabalhos baseados na análise de dados observacionais têm procurado confirmar os resultados teóricos, que sugerem a possibilidade de existência de caos determinístico por trás dos processos que ocorrem na conexão Sol-Terra. Medidas de caoticidade e dimensão de atratores obtidas a partir de séries temporais de variações do campo magnético na magnetosfera terrestre e no vento solar, após uma filtragem do ruído, sugerem a existência de atratores caóticos de baixa dimensão [47,48,49]. Athanasiu e Pavlos [50] analisaram dados magnetosféricos, comparando-os com o comportamento do modelo de Lorenz com ruído, concluindo que os dados magnetosféricos apresentam comportamento similar a um sistema caótico com atrator de baixa-dimensão fortemente perturbado por ruído externo. Sorriso-Valvo et al. [51] usaram um modelo caótico com um termo estocástico para o estudo de intermitência

em plasmas, mostrando que, da mesma forma como em dados do vento solar, o comportamento intermitente se manifesta nas funções de distribuição de probabilidade para flutuações de velocidade, na forma de um comportamento não-Gaussiano em escalas pequenas. Embora não seja possível afirmar que as flutuações erráticas observadas no mundo real sejam simplesmente uma manifestação de caos de baixa dimensão, em todos os casos mencionados o comportamento observado na natureza parece ser resultado de um processo determinístico em conjunto com componentes estocásticos, e o estudo de sistemas dinâmicos pode levar a uma melhor compreensão dos mecanismos responsáveis pela transição de ordem para caos.

## 1.2 Estrutura da Tese

Esta Tese está dividida da seguinte maneira: o capítulo 2 contém conceitos teóricos sobre sistemas dinâmicos. Leitores familiarizados com a área podem dispensar a leitura seqüencial deste capítulo, usando-o apenas como referência para consultas. O capítulo 3 descreve alguns dos algoritmos mais utilizados na análise de sistemas caóticos. Sua leitura é de interesse maior para aqueles que desejam implementar as técnicas utilizadas nesta Tese. Recomenda-se em específico a leitura da Seção 3.3, uma vez que os algoritmos para cálculo de selas caóticas serão referenciados com frequência nos capítulos 4 e 5. O capítulo 4 descreve a análise de sistemas dinâmicos de baixa dimensão, onde foi utilizado o modelo para soluções estacionárias da equação DNLS primeiramente apresentado por Hada et al. [43]. O capítulo é dividido em duas partes principais. Na primeira, um estudo de transições para caos Alfvênico introduz as técnicas clássicas de caracterização de crises usando soluções periódicas instáveis. Na segunda parte é fornecida uma explicação detalhada de como obter selas caóticas neste sistema, sendo mostrado como conjuntos caóticos atrativos e não-atrativos interagem entre si. Em particular, é mostrado como um atrator fortemente caótico, gerado após uma crise interior pode ser decomposto em duas selas caóticas dinamicamente conectadas por um conjunto de soluções periódicas instáveis criadas após a crise. É discutida a implicação deste acoplamento entre duas selas caóticas para a dinâmica intermitente observada após

a crise. No capítulo 5 as técnicas de análise introduzidas no capítulo 4 são estendidas para um problema de alta dimensão dado pela equação Kuramoto-Sivashinsky (KS). A equação KS é uma EDP não-linear homogênea de quarta ordem muito utilizada no estudo de sistemas dinâmicos de alta dimensão (ver, por exemplo, Hyman e Nicolaenko [2]). Este capítulo apresenta resultados inéditos sobre a caracterização de uma crise homoclínica em alta dimensão. No capítulo 6 são apresentadas as conclusões, com sugestões para futuros trabalhos, incluindo comentários sobre a possibilidade do uso de técnicas de análise de séries espaço-temporais para problemas mais complexos. Estas técnicas são descritas no Apêndice A, que contém também alguns resultados preliminares.

## CAPÍTULO 2

### CONCEITOS FUNDAMENTAIS

#### 2.1 Sistemas Dinâmicos

*Sistemas dinâmicos* são sistemas que variam deterministicamente com o tempo [52]. Isto implica que os estados do sistema em um determinado instante de tempo são obtidos a partir dos estados anteriores, de acordo com uma regra determinística de evolução.

Um sistema dinâmico é constituído por um conjunto de *variáveis de estado*, uma relação determinística ou *regra dinâmica* e um conjunto de parâmetros de controle. O conjunto de variáveis de estado forma um espaço denominado de *espaço de fase*, com a dimensão do espaço sendo definida pelo número de variáveis de estado. Um estado do sistema é definido pelo valor das variáveis de estado num dado instante de tempo. A regra dinâmica relaciona de forma única o estado atual com o estado no instante anterior. Os parâmetros de controle são responsáveis pela configuração da regra dinâmica. A evolução temporal do sistema representada no espaço de fase é definida como *trajetória* ou *órbita* [9,53,54,55].

Um exemplo de sistema dinâmico é um sistema de equações diferenciais ordinárias,

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \quad (2.1)$$

onde  $\mathbf{x}(t)$  é um vetor  $n$ -dimensional e  $\mathbf{f}$  é uma função vetorial  $n$ -dimensional de  $\mathbf{x}$  e  $t$ . Se  $\mathbf{f}$  não depender explicitamente da variável independente  $t$ , o sistema é chamado de autônomo. Para as definições que se seguem, serão considerados apenas sistemas autônomos, uma vez que qualquer sistema não-autônomo pode ser convertido em um sistema autônomo [56]. Outro exemplo de sistema dinâmico é um mapa. Um

mapa é uma equação do tipo

$$\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_t), \tag{2.2}$$

onde o tempo  $t$  é discreto e inteiro [55].

Em geral, o comportamento de uma órbita pode ser dividido em dois estágios: um *transiente inicial* e um *regime*. O regime consiste de um conjunto no espaço de fase para o qual a órbita de uma condição inicial  $\mathbf{x}_0$  converge assintoticamente, após a fase transiente. As características deste conjunto dependem de propriedades intrínsecas ao sistema. Em *sistemas Hamiltonianos* (conservativos), volumes no espaço de fase são preservados pela evolução no tempo. Se forem calculadas as trajetórias de todos os pontos em um subvolume  $\delta V$  do espaço de fase,  $\delta V$  pode ser distorcido com o tempo, mas seu volume permanece constante. Em *sistemas dissipativos*, subvolumes diminuem com o tempo. Os subvolumes  $\delta V$  tendem a zero quando  $t \rightarrow \infty$ . Isto significa que os pontos convergem para conjuntos *atratores* com volume zero no espaço de fase [4,55]. Nem todas as condições iniciais convergem, necessariamente, para o mesmo atrator. Se o sistema possui mais de um atrator, cada um deles possui uma *bacia de atração* própria. Uma bacia de atração de um atrator  $A$  é o conjunto de todas as condições iniciais cujas órbitas convergem para  $A$  [4,55].

## 2.2 Mapas

Muitas vezes sistemas dinâmicos são estudados por meio de mapas. A seguir são dadas definições que serão usadas em seções posteriores.

### 2.2.1 Mapas Inversíveis

Um mapa  $\mathbf{f} : X \rightarrow Y$  é um-para-um se não existirem dois pontos em  $X$  que são mapeados para o mesmo ponto em  $Y$ .

Um mapa um-para-um é também chamado de inversível. O mapa inverso, quando existir, é caracterizado pelo fato de que  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$  se e somente se  $\mathbf{x} = \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y})$ , onde

$\mathbf{f}^{-1}$  denota o mapa inverso [54].

### 2.2.2 Difeomorfismo

Seja  $\mathbf{f} : X \rightarrow Y$  um mapa contínuo e com derivadas de todas as ordens. O mapa  $\mathbf{f}$  é um difeomorfismo se for inversível e se o mapa inverso  $\mathbf{f}^{-1} : Y \rightarrow X$  também for contínuo e possuir derivadas de todas as ordens [54].

### 2.2.3 Mapas de Poincaré

Um sistema dinâmico descrito por equações diferenciais pode ser relacionado a um mapa através da construção de um mapa de Poincaré. Considere-se o seguinte sistema dinâmico

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}), \\ \mathbf{x}(t = 0) &= \mathbf{x}_0,\end{aligned}\tag{2.3}$$

onde  $\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n$  e o ponto denota derivada com relação à variável temporal  $t$ . O fluxo  $\phi$  da equação (2.3) é definido como sendo uma função de  $t$  e  $\mathbf{x}_0$  que representa a solução do sistema. Assim,  $\phi_t(\mathbf{x}_0)$  é a solução de (2.3) para uma condição inicial  $\mathbf{x}_0$  após um tempo  $t$ .

Considere um conjunto de hipersuperfícies  $\Sigma = \{\Sigma_k, k \in Z\}$ , cada uma com dimensão  $n - 1$  e transversal ao fluxo  $\phi_t$  da equação (2.3). Seja  $\gamma$  uma trajetória do fluxo  $\phi_t(\mathbf{x}_0)$  que cruza sucessivamente o conjunto de hipersuperfícies, gerando o conjunto de pontos  $S_\gamma = \{\dots, \mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1}, \dots\}$ . O mapa  $P : \Sigma \rightarrow \Sigma$  tal que  $P(\mathbf{x}_i) = \mathbf{x}_{i+1}$  é chamado de *mapa de Poincaré* [57].

Um exemplo de mapa de Poincaré é dado na Figura 2.1, onde uma órbita  $C$  cruza uma superfície de Poincaré  $S$  definida pelo plano  $x_3 = \text{constante}$ . Iniciando com um ponto  $\mathbf{x}_0$ , segue-se a solução da órbita de  $\mathbf{x}_0$  até que esta cruze a superfície de Poincaré em um dado sentido. Na Figura 2.1 são marcados os pontos em que a

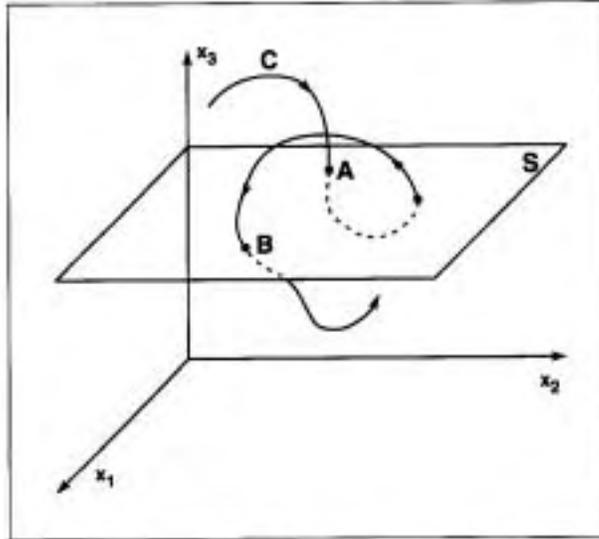


FIGURA 2.1 - Mapa de Poincaré para um sistema tridimensional. São registrados os pontos em que a órbita **C** cruza o plano de Poincaré de cima para baixo.

FONTE: [54] (p. 49).

órbita cruza o plano  $S$  de cima para baixo, como nos pontos  $A$  e  $B$ . Estes pontos são chamados de *pontos de Poincaré*. Neste exemplo,  $P(A) = B$ , onde  $P(A)$  denota a ação do mapa de Poincaré  $P$  sobre o ponto  $A$ . Esta técnica permite a redução de um sistema de equações diferenciais ordinárias de dimensão  $n$  para um mapa de dimensão  $n - 1$ , mantendo grande parte da dinâmica presente no sistema original [54,58].

### 2.3 Conjuntos Limite

Seja  $\mathbf{f} : X \rightarrow Y$  um mapa e seja  $\mathbf{x}_0$  uma condição inicial. O conjunto  $\omega$ -limite da órbita  $\{\mathbf{f}^n(\mathbf{x}_0)\}$  é o conjunto

$$\omega(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x} : \text{para todo } N \text{ e } \epsilon \text{ existe } n > N \text{ tal que } |\mathbf{f}^n(\mathbf{x}_0) - \mathbf{x}| < \epsilon\}.$$

Ou seja, um conjunto  $\omega$ -limite, ou simplesmente conjunto limite, é o conjunto de pontos para os quais a órbita retorna arbitrariamente próxima, infinitas vezes [54].

Para um sistema de tempo contínuo, um ponto  $\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n$  está no conjunto  $\omega$ -limite,  $\omega(\mathbf{x}_0)$ , da solução  $\phi_t(\mathbf{x}_0)$  se existir uma seqüência de pontos ao longo da órbita de  $\mathbf{x}_0$  que converge para  $\mathbf{x}$  quando  $t \rightarrow \infty$  [54]. Pode-se formular uma definição semelhante para um sistema com tempo reverso. Um ponto  $\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n$  está no conjunto  $\alpha$ -limite,  $\alpha(\mathbf{x}_0)$ , da solução  $\phi_t(\mathbf{x}_0)$  se existir uma seqüência de pontos ao longo da órbita de  $\mathbf{x}_0$  que converge para  $\mathbf{x}$  quando  $t \rightarrow -\infty$ .

Um conjunto limite  $L$  é chamado invariante se a evolução temporal de todos os pontos de  $L$  permanece em  $L$  quando  $t \rightarrow \infty$  e quando  $t \rightarrow -\infty$  [25].

### 2.3.1 Atratores

Um atrator é um conjunto  $\omega$ -limite que atrai um conjunto de condições iniciais com medida diferente de zero (medida não-nula para comprimento, área ou volume, dependendo se a dimensão do espaço de fase for um, dois ou maior). Este conjunto de condições iniciais é a bacia de atração [54].

**Conjuntos de medida zero:** Um conjunto tem medida zero se para qualquer  $\epsilon > 0$  o conjunto pode ser coberto por uma união contável de intervalos de tal forma que a soma do comprimento dos intervalos é menor do que  $\epsilon$ . Para conjuntos em um espaço Cartesiano  $n$ -dimensional, usa-se a definição análoga de um conjunto de medida zero: para qualquer  $\epsilon > 0$  o conjunto pode ser coberto por uma união contável de cubos  $n$ -dimensionais cujo volume total é menor do que  $\epsilon$  [21]. Um conjunto é contável se seus elementos podem ser colocados em uma relação de um-para-um com o conjunto de números naturais [54].

### 2.3.2 Pontos Fixos

Os conjuntos limite podem apresentar diferentes tipos de comportamento dinâmico. O comportamento mais simples que pode ocorrer é verificado sobre um *ponto fixo* ou *ponto de equilíbrio*. Um ponto fixo é uma solução constante para as equações do sistema. Para um sistema contínuo no tempo, o ponto de equilíbrio é verificado quando a taxa de variação no tempo da variável dependente é nula. Seja  $\phi_t(\mathbf{x})$  o

fluxo do sistema. Se  $\bar{\mathbf{x}}$  é um ponto fixo,  $\phi_t(\bar{\mathbf{x}}) = \bar{\mathbf{x}}$  para todo  $t$ .

Para um mapa, um ponto fixo é um ponto no espaço de fase que é idêntico à sua própria imagem [52]. Em termos da equação (2.2), isto equivale a dizer que, se  $\bar{\mathbf{x}}$  é um ponto fixo para um mapa  $\mathbf{f}$ , então  $\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}) = \bar{\mathbf{x}}$ .

### 2.3.3 Órbitas Periódicas

Uma órbita é chamada periódica se ela repete, de maneira exata, seu comportamento após a passagem de um intervalo fixo de tempo [52]. Uma solução  $\phi_t(\mathbf{x})$  de um sistema contínuo autônomo é periódica se  $\phi_t(\mathbf{x}) = \phi_{t+T}(\mathbf{x})$  para todo  $t$  e para um  $T > 0$  mínimo, chamado de período. No espaço de fase, órbitas periódicas se apresentam na forma de curvas fechadas. Se uma órbita periódica possui uma vizinhança que não contém nenhuma outra solução periódica, ela é chamada de *ciclo limite* [56].

Para um mapa  $\mathbf{f}$ , uma órbita periódica é formada por pontos periódicos  $\mathbf{x}$ , que satisfazem a relação

$$\mathbf{f}^{[n]}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}, \quad (2.4)$$

onde  $n > 0$ , e  $\mathbf{f}^{[n]}(\mathbf{x})$  representa a  $n$ -ésima iteração da condição inicial  $\mathbf{x}$  sob o mapa definido por  $\mathbf{f}$ , por exemplo,  $\mathbf{f}^{[3]}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{f}(\mathbf{f}(\mathbf{x})))$ . O menor  $n$  tal que  $\mathbf{f}^{[n]}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$  é chamado de período mínimo.

### 2.3.4 Órbitas Quasiperiódicas

Órbitas quasiperiódicas podem ser representadas como uma combinação de órbitas periódicas com frequências *incomensuráveis*. Considere-se a transformada de Fourier de uma órbita periódica  $\phi_t(\mathbf{x}) = \phi_{t+T}(\mathbf{x})$ ,

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_t(\mathbf{x}) \exp(i\omega t) dt.$$

$\hat{f}(\omega)$  consiste de picos localizados em frequências múltiplas de uma frequência fundamental  $\Omega = 2\pi/T$ . Um movimento quasiperiódico pode ser expresso como uma

combinação de movimentos periódicos de diferentes frequências fundamentais e incommensuráveis entre si. O fato destas frequências serem incommensuráveis significa que nenhuma das frequências  $\Omega_i$  pode ser expressa como uma combinação linear das demais usando coeficientes que são números racionais. Em outras palavras, uma relação do tipo

$$m_1\Omega_1 + m_2\Omega_2 + \dots + m_N\Omega_N = 0 \quad (2.5)$$

não pode ser escrita usando somente coeficientes  $m_i$  inteiros, com exceção da solução trivial  $m_1 = m_2 = \dots = m_N = 0$  [21].

Órbitas quasiperiódicas situam-se sobre toros com dimensão definida pelo número de frequências fundamentais. Uma órbita quasiperiódica com duas frequências fundamentais situa-se em um toro-2  $S^2 := S^1 \times S^1$ , onde cada  $S^1$  representa uma das frequências fundamentais, como mostrado na Figura 2.2. A trajetória é periódica na direção  $\omega_1$  com período  $S_1$  e na direção  $\omega_2$  com período  $S_2$ . Se  $S_1$  e  $S_2$  forem commensuráveis, existe um par de inteiros  $p$  e  $q$  tais que  $pS_1 = qS_2$ . Após um tempo  $pS_1$  a trajetória se fecha, uma vez que completa exatos  $p$  ciclos na primeira direção e  $q$  ciclos na segunda. Neste caso, a órbita forma um ciclo limite com período  $pS_1$ . Entretanto, quando  $S_1$  e  $S_2$  são incommensuráveis, não existem tais  $p$  e  $q$ , e a órbita nunca se fecha, eventualmente se aproximando de cada ponto sobre a superfície toroidal. O *número de rotação* (“*rotation number*”) é definido como o número médio de rotações executadas pela órbita na menor direção para cada rotação executada na direção maior,

$$R = \Omega_1/\Omega_2.$$

Quando  $R$  é irracional, o movimento é quasiperiódico; caso contrário, o movimento é periódico [56,21]. A Figura 2.3(a) mostra uma órbita quasiperiódica de duas frequências sobre um toro em um espaço de fase tridimensional. A Figura 2.3(b) mostra uma órbita periódica com um número de rotação  $R = 3$ .

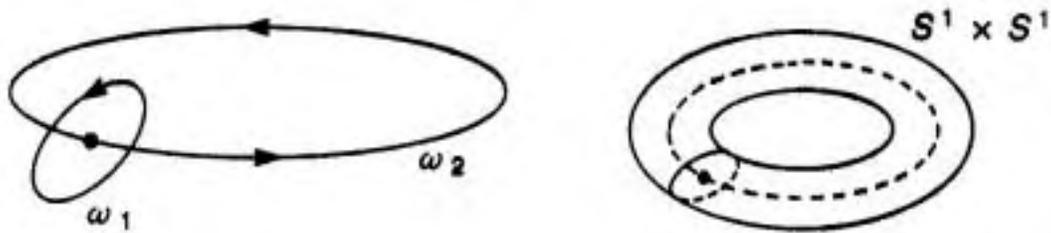


FIGURA 2.2 - Comportamentos quasiperiódicos ocorrem sobre um toro  $S^1 \times S^1$ .

Cada  $S^1$  representa um componente periódico.

FONTE: [56] (p. 18).

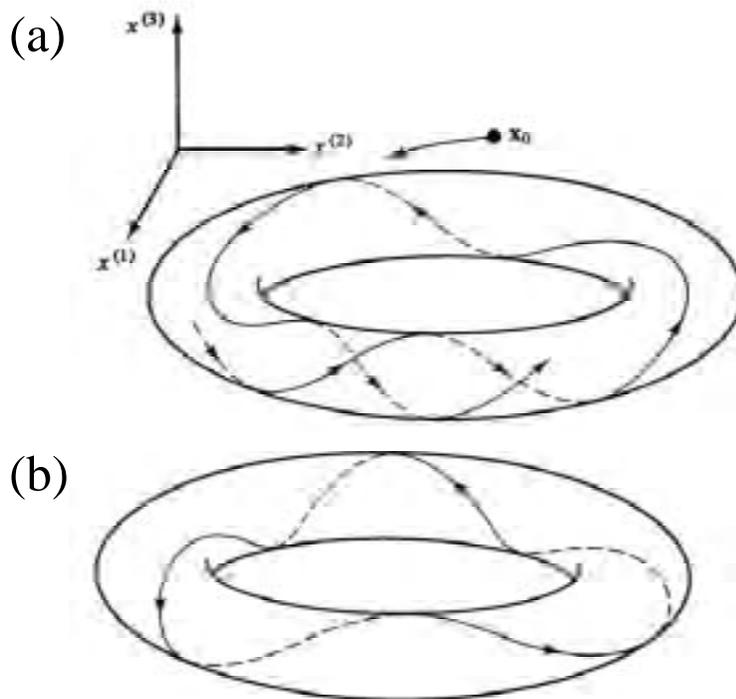


FIGURA 2.3 - (a) Representação de trecho de uma órbita quasiperiódica sobre um

toro em um espaço de fase tridimensional. A órbita percorre toda

a superfície do toro e jamais se fecha. (b) Uma órbita periódica

com número de rotação  $R = 3$ .

FONTE: [21] (p. 189).

### 2.3.5 Órbitas Caóticas

Além de pontos fixos, órbitas periódicas e quasiperiódicas, sistemas dinâmicos podem apresentar órbitas confinadas irregulares que não se encaixam em nenhuma destas categorias. Tais órbitas receberam o nome de caóticas. Uma definição formal de sistemas caóticos é fornecida por Devaney [58]. As definições a seguir foram formuladas para mapas representados por uma função  $\mathbf{f}$ .

Seja  $X$  um conjunto e  $Y$  um subconjunto de  $X$ . O conjunto  $Y$  é denso em  $X$  se, para cada ponto  $x \in X$ , existe um ponto  $y$  no subconjunto  $Y$  arbitrariamente próximo de  $x$ .

$\mathbf{f} : J \rightarrow J$  é transitivo se para qualquer par de conjuntos abertos  $U, V \in J$  existe  $k > 0$  tal que  $\mathbf{f}^{[k]}(U) \cap V \neq \emptyset$ .

$\mathbf{f} : J \rightarrow J$  possui sensibilidade a condições iniciais se existe  $\delta > 0$  tal que, para qualquer  $\mathbf{x} \in J$  e qualquer vizinhança  $N$  de  $\mathbf{x}$ , existe  $\mathbf{y} \in N$  e  $n \geq 0$  tal que  $|\mathbf{f}^{[n]}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}^{[n]}(\mathbf{y})| > \delta$ .

Seja  $V$  um conjunto.  $\mathbf{f} : V \rightarrow V$  é caótico em  $V$  se

- Pontos periódicos formam um conjunto denso em  $\mathbf{f}$ ;
- $\mathbf{f}$  é transitivo;
- $\mathbf{f}$  apresenta sensibilidade a condições iniciais.

#### 2.3.5.1 Atratores Caóticos

Considere um ponto  $x$  pertencente a uma órbita caótica. Se  $x$  pertence ao seu próprio conjunto  $\omega$ -limite,  $\omega(x)$ , então  $\omega(x)$  é chamado de conjunto caótico. Se o conjunto caótico for também um atrator ele denomina-se *atrator caótico* [54].

## 2.4 Estabilidade

Um ponto fixo  $\bar{\mathbf{x}}$  é *estável* se para toda vizinhança  $N$  de  $\bar{\mathbf{x}}$  existe uma vizinhança  $N_1$  de  $\bar{\mathbf{x}}$ , contida em  $N$ , tal que para toda condição inicial  $\mathbf{x}_0$  em  $N_1$ , a trajetória de  $\mathbf{x}_0$

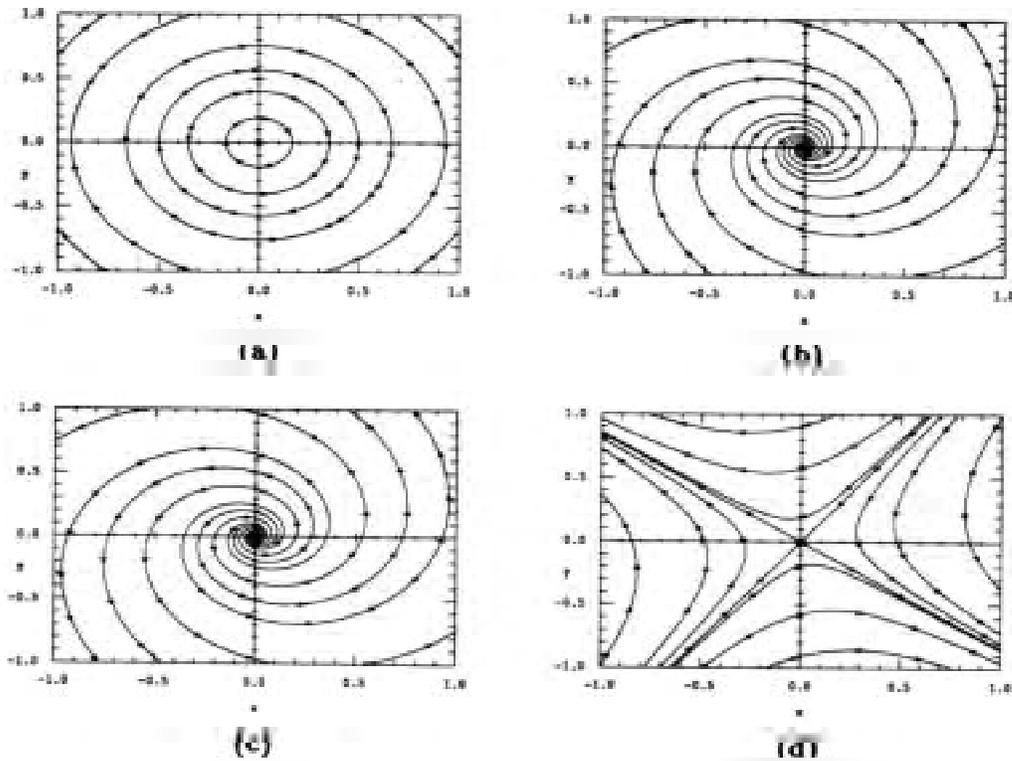


FIGURA 2.4 - Pontos de equilíbrio mostrando quatro diferentes tipos de estabilidade. (a) Estável mas não assintoticamente estável; (b) assintoticamente estável; (c) repulsor; (d) ponto de sela.

FONTE: [56] (p. 57).

permanece em  $N$  para todo  $t > 0$ . Caso contrário,  $\bar{x}$  é *instável*.  $\bar{x}$  é *assintoticamente estável* se for estável e atrator. Um ponto fixo instável  $\bar{x}$  é *repulsor* se existir uma vizinhança  $N$  de  $\bar{x}$  tal que a trajetória de todo  $\mathbf{x}_0$  em  $N$ , excetuando-se  $\bar{x}$ , eventualmente abandona  $N$ . Se houver pelo menos um ponto  $\mathbf{x}_0$  em  $N$  cujo conjunto  $\omega$ -limite,  $\omega(\mathbf{x}_0)$ , é  $\bar{x}$  e pelo menos um ponto  $\mathbf{y}_0$  em  $N$  cujo conjunto  $\alpha$ -limite,  $\alpha(\mathbf{y}_0)$ , é  $\bar{x}$ , o ponto fixo  $\bar{x}$  é chamado de ponto de *sela* [54]. Estes quatro tipos de estabilidade são ilustrados na Figura 2.4, onde a origem é um ponto fixo e as setas indicam o comportamento de órbitas em sua vizinhança.

### 2.4.1 Estabilidade de Pontos de Equilíbrio

Seja um sistema de equações diferenciais ordinárias e lineares representado em notação matricial por

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (2.6)$$

onde  $\mathbf{x}$  é um vetor de variáveis e  $\mathbf{A}$  é uma matriz quadrada. Uma vez que o lado direito da equação 2.6 é um vetor nulo quando  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , a origem é um ponto fixo ou de equilíbrio para 2.6. Se os autovalores da matriz  $\mathbf{A}$  forem distintos, a solução geral do sistema definido pela equação 2.6 é dada por [59]

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1 + \cdots + c_n e^{\lambda_n t} \mathbf{v}_n, \quad (2.7)$$

onde  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  são os autovalores distintos e não-degenerados da matriz  $\mathbf{A}$ ;  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$  são os autovetores correspondentes, e  $c_1, \dots, c_n$  são constantes escolhidas de acordo com as condições iniciais. Para um sistema linear, a estabilidade do ponto de equilíbrio é determinada pelos autovalores da matriz  $\mathbf{A}$ . O ponto de equilíbrio é assintoticamente estável se a parte real de todos os autovalores de  $\mathbf{A}$  for negativa, caso em que a equação (2.7) tende a zero quando  $t \rightarrow \infty$ . Se pelo menos um dos autovalores de  $\mathbf{A}$  possuir a parte real positiva, o ponto de equilíbrio é instável [54,60].

Para determinar a estabilidade de um ponto de equilíbrio  $\bar{\mathbf{x}}$  de um sistema não-linear, utiliza-se uma linearização em torno de  $\bar{\mathbf{x}}$ . Seja o sistema de equações diferenciais não-lineares dado pela equação

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad (2.8)$$

onde  $\mathbf{x}(t)$  é um vetor  $n$ -dimensional e  $\mathbf{f}$  é uma função vetorial  $n$ -dimensional de  $\mathbf{x}$ . A aproximação linear para  $\mathbf{f}$  no ponto  $\bar{\mathbf{x}}$  é dada pela matriz Jacobiana de  $\mathbf{f}$

$$\mathbf{Df}_{i,j} = \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|_{\bar{\mathbf{x}}}. \quad (2.9)$$

Seja  $\epsilon$  uma pequena perturbação aplicada sobre a solução  $\bar{\mathbf{x}}$ , de maneira que  $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}} + \epsilon$ . O valor de  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  pode ser aproximado por

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}} + \epsilon) \approx \mathbf{Df}(\bar{\mathbf{x}})\epsilon. \quad (2.10)$$

Sendo assim, a evolução temporal de uma pequena perturbação inicial  $\delta\mathbf{x}(\mathbf{t} = \mathbf{0}) = \epsilon$  na vizinhança de  $\bar{\mathbf{x}}$  é governada pela equação

$$\delta\dot{\mathbf{x}} \approx \mathbf{Df}(\bar{\mathbf{x}})\delta\mathbf{x}(\mathbf{t}), \quad (2.11)$$

que é a mesma situação do caso de sistemas de equações lineares (equação 2.6).

Logo, o comportamento de órbitas iniciadas dentro de uma vizinhança infinitésima em torno do ponto  $\bar{\mathbf{x}}$  depende dos autovalores de  $\mathbf{Df}(\bar{\mathbf{x}})$ . Se todos os autovalores  $\lambda_i$  de  $\mathbf{Df}(\bar{\mathbf{x}})$  possuírem parte real negativa, então  $\bar{\mathbf{x}}$  é assintoticamente estável. Se a parte real de pelo menos um dos autovalores for positiva, então  $\bar{\mathbf{x}}$  é instável [4,54,60]. Se existem  $i$  e  $j$  tais que  $\text{Re}(\lambda_i) < 0$  e  $\text{Re}(\lambda_j) > 0$ , então existe pelo menos uma direção de atração e uma direção de repulsão e  $\bar{\mathbf{x}}$  é chamado de *ponto de sela*. Esta classificação é válida para pontos fixos *hiperbólicos* ou não. Um ponto fixo  $\bar{\mathbf{x}}$  é hiperbólico se nenhum dos autovalores de  $\mathbf{Df}(\bar{\mathbf{x}})$  possui parte real igual a zero. Quando todos os autovalores de  $\mathbf{Df}(\bar{\mathbf{x}})$  possuem parte real não-positiva e existe pelo menos um autovalor com parte real igual a zero, não é suficiente conhecer  $\mathbf{Df}(\bar{\mathbf{x}})$ , e termos de ordem mais alta precisam ser levados em conta para determinar a estabilidade de  $(\bar{\mathbf{x}})$  [54].

Quando os autovalores de  $\mathbf{Df}(\bar{\mathbf{x}})$  são reais, os autovalores negativos indicam a taxa de contração próximo ao ponto fixo na direção do autovetor associado. Autovalores positivos indicam a taxa de expansão. Para o caso de autovalores complexos, a parte real de  $\lambda_i$  fornece a taxa de contração ou expansão de uma espiral sobre um plano  $\text{Re}(\mathbf{v}_i) \times \text{Im}(\mathbf{v}_i)$  e  $\text{Im}(\lambda_i)$  fornece a frequência de rotação [56].

### 2.4.2 Estabilidade de Órbitas Periódicas

Uma órbita periódica corresponde a pontos periódicos do mapa de Poincaré  $P$ . Para uma órbita de período  $K$  em  $P$ , qualquer ponto da órbita é um ponto fixo da  $K$ -ésima iteração do mapa  $P$ . Dessa forma, a mesma nomenclatura da seção anterior pode ser usada para a discussão de estabilidade em órbitas periódicas.

Seja  $\epsilon$  uma pequena perturbação aplicada sobre um ponto fixo  $\bar{\mathbf{x}}$  para um mapa de Poincaré  $P$ , de maneira que  $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}} + \epsilon$ . O valor de  $P(\bar{\mathbf{x}})$  pode ser aproximado pela linearização de  $P$  em  $\bar{\mathbf{x}}$ , e a evolução de uma perturbação inicial  $\delta\mathbf{x}(\mathbf{0}) = \bar{\mathbf{x}} + \epsilon$  é dada pelo mapa linear

$$\delta\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{D}P(\bar{\mathbf{x}})\delta\mathbf{x}_k \quad (2.12)$$

Os autovalores  $m_i$  de  $\mathbf{D}P$  são chamados de multiplicadores característicos, ou multiplicadores Floquet (“Floquet multipliers”) da solução periódica. Se  $m_i$  for real, o autovetor  $\mathbf{v}_i$  também é real e o multiplicador característico indica a taxa de contração (se  $|m_i| < 1$ ) ou expansão (se  $|m_i| > 1$ ) próximo a  $\bar{\mathbf{x}}$  na direção de  $\mathbf{v}_i$  para uma iteração do mapa. Para o caso de autovalores complexos, a magnitude de  $m_i$  fornece a taxa de contração (se  $|m_i| < 1$ ) ou expansão (se  $|m_i| > 1$ ) de uma espiral sobre um plano  $\text{Re}(\mathbf{v}_i) \times \text{Im}(\mathbf{v}_i)$  para uma iteração do mapa. De maneira geral, se  $|m_i| < 1$  para todo  $m_i$ ,  $\bar{\mathbf{x}}$  é assintoticamente estável; se  $|m_i| > 1$  para todo  $m_i$ ,  $\bar{\mathbf{x}}$  é um repulsor; se existem  $i$  e  $j$  tais que  $|m_i| < 1$  e  $|m_j| > 1$ , então  $\bar{\mathbf{x}}$  é um *ponto de sela*. Um ponto fixo  $\bar{\mathbf{x}}$  de um mapa  $P$  é chamado de hiperbólico se nenhum dos multiplicadores Floquet possui magnitude igual a 1. Vale notar que os valores dos multiplicadores característicos não dependem da posição da seção de Poincaré escolhida. Os autovetores, no entanto, dependem da posição da seção de Poincaré [56,61].

#### 2.4.2.1 Equação Variacional

É possível provar [56] que os autovalores do mapa linear  $\mathbf{D}P$  são um subconjunto dos autovalores da matriz Jacobiana do fluxo do sistema. Seja  $\bar{\mathbf{x}}$  um ponto fixo do mapa

de Poincaré  $P$  de um sistema de ordem  $n$  ( $n$  equações diferenciais ordinárias). Seja  $\phi_T(\bar{\mathbf{x}})$  o fluxo do sistema no instante  $T$ , onde  $T$  é o tempo que a trajetória iniciada em  $\bar{\mathbf{x}}$  leva para completar um ciclo até retornar a  $\bar{\mathbf{x}}$ . Seja  $\Phi_T(\bar{\mathbf{x}})$  a Jacobiana do fluxo no ponto  $\bar{\mathbf{x}}$ . Sejam  $\{m_1, \dots, m_{n-1}, 1\}$  os autovalores de  $\Phi_T(\bar{\mathbf{x}})$ . Então os autovalores de  $DP$  são  $\{m_1, \dots, m_{n-1}\}$ .  $\Phi_T(\bar{\mathbf{x}})$  sempre possui um autovalor igual a 1 correspondente ao autovetor tangente ao fluxo em  $\bar{\mathbf{x}}$ .

A Jacobiana do fluxo pode ser obtida integrando-se a equação variacional. Considere-se o sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(t=0) = \mathbf{x}_0 \quad (2.13)$$

com solução  $\phi_t(\mathbf{x}_0)$ , ou seja,

$$\dot{\phi}_t(\mathbf{x}_0) = \mathbf{f}(\phi_t(\mathbf{x}_0)), \quad \phi_0(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0. \quad (2.14)$$

Diferenciando 2.14 com relação a  $\mathbf{x}_0$  obtém-se

$$\mathbf{D}_{\mathbf{x}_0} \dot{\phi}_t(\mathbf{x}_0) = \mathbf{D}_{\mathbf{x}} \mathbf{f}(\phi_t(\mathbf{x}_0)) \mathbf{D}_{\mathbf{x}_0} \phi_t(\mathbf{x}_0), \quad \mathbf{D}_{\mathbf{x}_0} \phi_0(\mathbf{x}_0) = \mathbf{I}. \quad (2.15)$$

onde  $\mathbf{I}$  é a matriz identidade de ordem  $n$ . Definindo  $\Phi_t(\bar{\mathbf{x}}) := \mathbf{D}_{\mathbf{x}_0} \phi_t(\mathbf{x}_0)$ , pode-se reescrever 2.15 como

$$\dot{\Phi}_t(\mathbf{x}_0) = \mathbf{D}_{\mathbf{x}} \mathbf{f}(\phi_t(\mathbf{x}_0)) \Phi_t(\mathbf{x}_0), \quad \Phi_0(\mathbf{x}_0) = \mathbf{I} \quad (2.16)$$

que é a *equação variacional*. A equação variacional é a linearização do campo vetorial ao longo da trajetória  $\phi_t(\mathbf{x}_0)$ . Uma vez que a equação variacional depende de  $\phi$  e de  $\Phi$ , ela pode ser resolvida integrando-a juntamente com as equações originais do sistema

$$\begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\Phi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{D}_{\mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \Phi \end{Bmatrix} \quad (2.17)$$

com as condições iniciais

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{x}(t=0) \\ \Phi(t=0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{I} \end{Bmatrix}. \quad (2.18)$$

### 2.4.3 Expoentes de Lyapunov

Os expoentes de Lyapunov quantificam a taxa de separação ou aproximação entre órbitas vizinhas. Esta quantificação pode ser obtida monitorando-se a evolução de um hiper-volume esférico de condições iniciais  $\mathbf{y}_0$  distribuídas a uma distância  $\varepsilon_0$  em torno de uma condição inicial  $\mathbf{x}_0$ , de forma que  $|\mathbf{y}_0 - \mathbf{x}_0| \leq \varepsilon_0$ . Com o passar do tempo o fluxo deforma a hiper-esfera, transformando-a em um objeto hiper-elipsoidal com eixos principais  $\varepsilon_i(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , onde  $m$  é a dimensão do espaço de fase (Figura 2.5). Os expoentes de Lyapunov medem o crescimento exponencial dos eixos principais  $\varepsilon_i(t)$  e são definidos por [61,62]

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon_0 \rightarrow 0} \frac{1}{t} \ln \frac{\varepsilon_i(t)}{\varepsilon_0}, \quad i = 1, \dots, m. \quad (2.19)$$

Da equação 2.19 obtém-se

$$\varepsilon_i(t) \sim \varepsilon_0 e^{\lambda_i t}. \quad (2.20)$$

O volume da hiper-elipse num instante  $t$  é dado por

$$\delta V(t) = \prod_{i=1}^m \varepsilon_i(t) \quad (2.21)$$

Substituindo 2.20 em 2.21,

$$\delta V(t) = \delta V(0) \exp \left( \sum_{i=1}^m \lambda_i t \right). \quad (2.22)$$

Quando  $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 0$ , o volume não se altera com o tempo, e o sistema é conservativo.

Quando  $\sum_{i=1}^m \lambda_i < 0$ , o volume diminui com o tempo e o sistema é dissipativo.

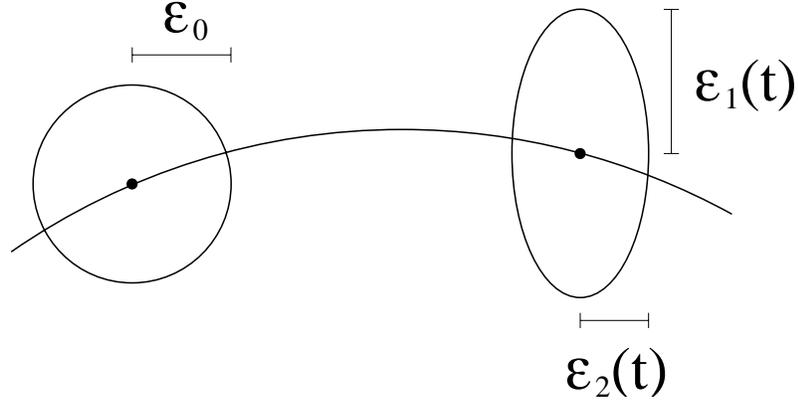


FIGURA 2.5 - Evolução de uma hiper-esfera com eixo  $\varepsilon_0$  em uma hiper-elipse com eixos  $\varepsilon_1(t)$  e  $\varepsilon_2(t)$ .

FONTE: Adaptada de [61] (p. 140).

Na prática, geralmente se obtém numericamente as taxas de contração e expansão  $\varepsilon_i(t)/\varepsilon_0$  dos eixos das hiper-elipses encontrando-se os autovalores das matrizes que representam a linearização do fluxo na vizinhança da órbita de  $\mathbf{x}_0$ , o que leva às seguintes definições para o caso de sistemas contínuos e discretos no tempo [56]:

### Sistemas contínuos no tempo

Sejam  $m_1(t), \dots, m_n(t)$  os autovalores de  $\Phi_t(\mathbf{x}_0)$  para uma condição inicial  $\mathbf{x}_0$  qualquer. Os *expoentes de Lyapunov* da órbita de  $\mathbf{x}_0$  são

$$\lambda_i := \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln |m_i(t)|, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.23)$$

quando o limite existir.

### Sistemas discretos no tempo

Seja  $\{\mathbf{x}_k\}$ ,  $k = 0, 1, \dots, \infty$  a órbita de uma condição inicial  $\mathbf{x}_0$  em um sistema  $p$ -dimensional  $P$  de tempo discreto. Sejam  $m_1(k), \dots, m_p(k)$  os autovalores de  $\mathbf{D}P^k(\mathbf{x}_0)$ . Os *números de Lyapunov* de  $x_0$  são

$$m_i := \lim_{k \rightarrow \infty} |m_i(k)|^{1/k}, \quad i = 1, \dots, p \quad (2.24)$$

quando o limite existir. Os expoentes de Lyapunov correspondentes são dados pelo logaritmo dos números de Lyapunov

$$\lambda_i = \ln(m_i) \tag{2.25}$$

Em suma, a caracterização de atratores por meio de expoentes de Lyapunov é feita conforme a relação a seguir:

- Ponto fixo assintoticamente estável:  $\lambda_i < 0$  para  $i = 1, \dots, p$ ;
- Ciclo limite assintoticamente estável:  $\lambda_1 = 0$ , e  $\lambda_i < 0$  para  $i = 2, \dots, p$ ;
- Toro- $k$ :  $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$ , e  $\lambda_i < 0$  para  $i = k + 1, \dots, p$ ;
- Caótico:  $\lambda_1 > 0$  e  $\sum \lambda_i < 0$ .

Note que para sistemas contínuos um dos expoentes de Lyapunov é sempre nulo, representando a taxa de variação na direção do fluxo. Sendo assim, a presença de um atrator caótico só é possível em sistemas com, pelo menos, três variáveis de estado. Isto porque como um dos expoentes deve ser necessariamente positivo, e o expoente associado à direção do fluxo é sempre nulo, é necessário que haja pelo menos mais um  $\lambda_i < 0$  para garantir a condição de dissipação  $\sum \lambda_i < 0$  [61].

## 2.5 Dimensões

Há muitas definições de dimensão. A mais simples é chamada de *contagem de caixas* (“*box counting dimension*”), sendo definida como

$$d = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\epsilon)}{\ln(1/\epsilon)}, \tag{2.26}$$

onde imagina-se que o conjunto atrator no espaço de fase é coberto por pequenos cubos  $n$ -dimensionais com arestas de tamanho  $\epsilon$ , sendo  $n$  a dimensão do espaço de fase.  $N(\epsilon)$  é o número mínimo de tais cubos necessários para cobrir o conjunto. Se a dimensão do conjunto não for um inteiro, o conjunto é chamado de *fractal* [55].

Outra definição de dimensão é fornecida pela *dimensão de correlação*. Esta dimensão é definida para uma órbita de um sistema dinâmico, não para um conjunto geral [54]. Seja  $S = \{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots\}$  uma órbita do mapa  $\mathbf{f}$  sobre  $R^n$ . Para cada  $r > 0$ , a *função de correlação* (ou “*correlation sum*” segundo Kantz e Schreiber [63])  $C(r)$  é definida como sendo a proporção de pares de pontos de órbita dentro de uma distância  $r$  um do outro

$$C(r) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\#\{\text{pares } \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\} : \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in S_N, |\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2| < r\}}{\#\{\text{pares } \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\} : \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in S_N\}} \quad (2.27)$$

onde  $S_N$  denota os primeiros  $N$  pontos da órbita  $S$ . A dimensão de correlação da órbita  $S$  é

$$d = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log C(r)}{\log(r)},$$

se o limite existir.

Uma outra forma bastante usada para medir a dimensão de um conjunto caótico é a dimensão de Lyapunov. Seja  $K$  o maior inteiro tal que

$$\sum_{i=1}^K h_i \geq 0, \quad (2.28)$$

onde  $h_1 \geq h_2 \geq \dots \geq h_n$  são os expoentes de Lyapunov de uma órbita  $S$  em  $R^n$ . A dimensão de Lyapunov  $D_L$  da órbita é definida como [54]

$$D_L = \begin{cases} 0 & \text{se não existir tal } K \\ K + \frac{1}{|h_{K+1}|} \sum_{i=1}^K h_i & \text{se } K < n \\ n & \text{se } K = n \end{cases} \quad (2.29)$$

## 2.6 Variedades Invariantes

Variedades são um conceito extremamente importante na caracterização da dinâmica de sistemas de dimensão superior a 1. Entre outras coisas, elas desempenham papel importante no aparecimento ou destruição de atratores caóticos, ou na delimitação

de fronteiras entre bacias de atração. A seguir são apresentadas as definições formais de variedades invariantes para sistemas contínuos e para mapas.

### 2.6.1 Variedades em Sistemas Contínuos no Tempo

Considere um sistema autônomo de ordem  $n$  com fluxo  $\phi_t$  e seja  $\bar{\mathbf{x}}$  um ponto fixo hiperbólico do tipo sela. As variedades estável e instável locais de  $\bar{\mathbf{x}}$ , denotadas respectivamente por  $W_{loc}^s(\bar{\mathbf{x}})$  e  $W_{loc}^u(\bar{\mathbf{x}})$ , são definidas por [64]

$$\begin{aligned} W_{loc}^s(\bar{\mathbf{x}}) &= \{\mathbf{x} \in U \mid \phi_t(\mathbf{x}) \rightarrow \bar{\mathbf{x}} \text{ quando } t \rightarrow \infty, \text{ e } \phi_t(\mathbf{x}) \in U, \forall t \geq 0\}, \\ W_{loc}^u(\bar{\mathbf{x}}) &= \{\mathbf{x} \in U \mid \phi_t(\mathbf{x}) \rightarrow \bar{\mathbf{x}} \text{ quando } t \rightarrow -\infty, \text{ e } \phi_t(\mathbf{x}) \in U, \forall t \leq 0\}, \end{aligned} \quad (2.30)$$

onde  $U \subset \mathbb{R}^n$  é uma vizinhança do ponto fixo  $\bar{\mathbf{x}}$ . As variedades estáveis e instáveis de  $\bar{\mathbf{x}}$  são obtidas por [64]

$$\begin{aligned} W^s(\bar{\mathbf{x}}) &= \bigcup_{t \leq 0} \phi_t(W_{loc}^s(\bar{\mathbf{x}})), \\ W^u(\bar{\mathbf{x}}) &= \bigcup_{t \geq 0} \phi_t(W_{loc}^u(\bar{\mathbf{x}})). \end{aligned} \quad (2.31)$$

O subespaço definido pelos  $\mathbf{v}_s$  autovetores de  $\mathbf{Df}(\bar{\mathbf{x}})$  cujos autovalores possuem parte real negativa é chamado de *subespaço estável*, sendo denotado por  $E^s$ . O subespaço definido pelos  $\mathbf{v}_u$  autovetores de  $\mathbf{Df}(\bar{\mathbf{x}})$  cujos autovalores possuem parte real positiva é chamado de *subespaço instável*, e é denotado por  $E^u$ . Em uma vizinhança suficientemente pequena de  $\bar{\mathbf{x}}$ , a variedade estável (instável) de  $\bar{\mathbf{x}}$  é tangente ao subespaço  $E^s$  ( $E^u$ ) de  $\mathbf{Df}(\bar{\mathbf{x}})$  em  $\bar{\mathbf{x}}$  (Teorema da variedade estável, [64])

A Figura 2.6 ilustra as variedades estável e instável de um ponto fixo  $\mathbf{p}$  em um espaço de fase bidimensional. As linhas tracejadas representam os autovetores estável ( $\mathbf{v}^s$ ) e instável ( $\mathbf{v}^u$ ) de  $\mathbf{Df}(\mathbf{p})$ . No ponto  $\mathbf{p}$  as variedades são tangentes aos autovetores.

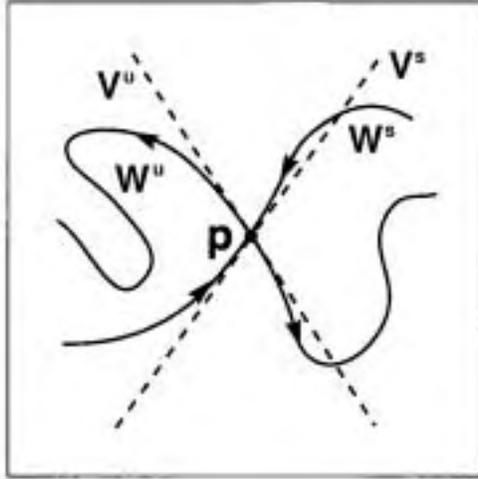


FIGURA 2.6 - Ilustração do teorema da variedade estável. No ponto fixo  $\mathbf{p}$  a variedade estável  $W^s$  é tangente ao autovetor  $\mathbf{v}^s$  e a variedade instável  $W^u$  é tangente ao autovetor  $\mathbf{v}^u$  de  $\mathbf{Df}(\mathbf{p})$ .

FONTE: Adaptada de [54] (p. 402).

Note-se que partindo-se do ponto  $\mathbf{p}$  pode-se considerar que cada variedade possui dois ramos, um na direção  $\mathbf{v}^{s,u}$  e outro na direção  $-\mathbf{v}^{s,u}$ .

Analogamente ao que ocorre com pontos fixos, órbitas periódicas também podem possuir variedades. Seja  $\gamma$  uma órbita periódica e seja  $U$  alguma vizinhança de  $\gamma$ ; define-se [64]

$$W_{loc}^s(\gamma) = \{\mathbf{x} \in U \mid |\phi_t(\mathbf{x}) - \gamma| \rightarrow 0 \text{ quando } t \rightarrow \infty, \text{ e } \phi_t(\mathbf{x}) \in U, \forall t \geq 0\},$$

$$W_{loc}^u(\gamma) = \{\mathbf{x} \in U \mid |\phi_t(\mathbf{x}) - \gamma| \rightarrow 0 \text{ quando } t \rightarrow -\infty, \text{ e } \phi_t(\mathbf{x}) \in U, \forall t \leq 0\}.$$

### 2.6.2 Variedades em Sistemas Discretos no Tempo

Seja  $\mathbf{f} : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$  um difeomorfismo. Seja  $\bar{\mathbf{x}}$  um ponto fixo hiperbólico de  $\mathbf{f}$ . As variedades de  $\bar{\mathbf{x}}$  são definidas de maneira similar ao caso contínuo, tomando uniões

de iterações das variedades locais [64]

$$\begin{aligned} W_{loc}^s(\bar{\mathbf{x}}) &= \{\mathbf{x} \in U \mid \mathbf{f}^{[n]}(\mathbf{x}) \rightarrow \bar{\mathbf{x}} \text{ quando } n \rightarrow \infty, \text{ e } \mathbf{f}^{[n]}(\mathbf{x}) \in U, \forall n \geq 0\} \\ W_{loc}^u(\bar{\mathbf{x}}) &= \{\mathbf{x} \in U \mid \mathbf{f}^{[-n]}(\mathbf{x}) \rightarrow \bar{\mathbf{x}} \text{ quando } n \rightarrow \infty, \text{ e } \mathbf{f}^{[-n]}(\mathbf{x}) \in U, \forall n \geq 0\}, \end{aligned} \quad (2.32)$$

onde  $U \subset \mathfrak{R}^n$  é uma vizinhança do ponto fixo  $\bar{\mathbf{x}}$ , e

$$\begin{aligned} W^s(\bar{\mathbf{x}}) &= \bigcup_{n \geq 0} \mathbf{f}^{[-n]}(W_{loc}^s(\bar{\mathbf{x}})), \\ W^u(\bar{\mathbf{x}}) &= \bigcup_{n \geq 0} \mathbf{f}^{[n]}(W_{loc}^u(\bar{\mathbf{x}})). \end{aligned} \quad (2.33)$$

Semelhantemente ao caso contínuo, em sistemas discretos, as variedades estáveis e instáveis são invariantes sob  $\mathbf{f}$ .

No caso discreto, o subespaço estável  $E^s$  é definido pelos  $\mathbf{v}_s$  autovetores de  $\mathbf{Df}(\bar{\mathbf{x}})$  cujos autovalores possuem módulo  $< 1$ . O subespaço instável  $E^u$  é definido pelos  $\mathbf{v}_u$  autovetores de  $\mathbf{Df}(\bar{\mathbf{x}})$  cujos autovalores possuem módulo  $> 1$  [57,64]. Em uma vizinhança suficientemente pequena de  $\bar{\mathbf{x}}$ , a variedade estável (instável) de  $\bar{\mathbf{x}}$  é tangente ao subespaço  $E^s$  ( $E^u$ ) de  $\mathbf{Df}(\bar{\mathbf{x}})$  em  $\bar{\mathbf{x}}$  (Teorema da variedade estável).

No caso de uma órbita periódica de período  $k$ , as variedades estáveis e instáveis são definidas para cada ponto da órbita. As variedades são tangentes aos subespaços do ponto fixo correspondente do mapa  $\mathbf{f}^{[k]}$  [57].

A definição de variedades estáveis e instáveis para sistemas discretos pode ser aplicada a um mapa de Poincaré  $P$  de um sistema contínuo. Seja  $\gamma$  uma órbita periódica de um fluxo  $\phi_t$ . A órbita  $\gamma$  é representada por um ponto fixo  $\bar{\mathbf{x}}$  no mapa de Poincaré  $P$ , e a estabilidade de  $\bar{\mathbf{x}}$  para  $P$  reflete a estabilidade de  $\gamma$  para  $\phi_t$ . Neste caso, a variedade estável de  $\bar{\mathbf{x}}$  é tangente ao subespaço definido pelos  $\mathbf{v}_s$  autovetores estáveis, e a variedade instável é tangente ao subespaço definido pelo  $\mathbf{v}_u$  autovetores instáveis,

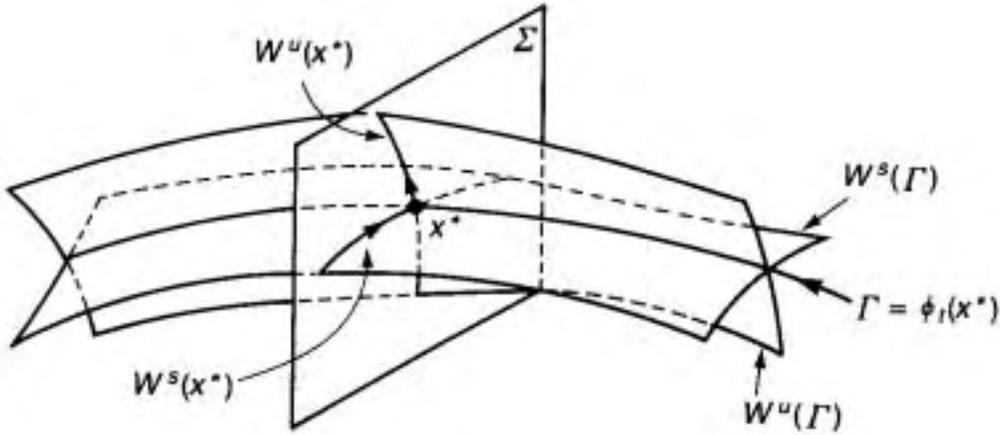


FIGURA 2.7 - Variedades estável e instável de um ponto fixo de um mapa de Poincaré correspondem a seções das variedades estável e instável da solução periódica  $\Gamma$ .

FONTE: [56] (p. 147).

sendo que  $\mathbf{v}_s + \mathbf{v}_u = n - 1$ , onde  $n$  é a dimensão do espaço de fase. As órbitas de  $P$  que encontram-se sobre  $W^s$  e  $W^u$  são formadas por intersecções de órbitas do fluxo  $\phi_t$  com a seção de Poincaré [56,64]. A situação é ilustrada na Figura 2.7, onde  $\Gamma$  representa o ciclo limite,  $\mathbf{x}^*$  é o ponto de Poincaré definido pela intersecção de  $\Gamma$  com a seção de Poincaré  $\Sigma$ , e  $W^u(\mathbf{x}^*)$  e  $W^s(\mathbf{x}^*)$  são, respectivamente, as projeções das variedades instável ( $W^u(\Gamma)$ ) e estável ( $W^s(\Gamma)$ ) do ciclo limite sobre a seção de Poincaré.

### 2.6.3 Dimensão de uma Variedade

A dimensão de uma variedade estável (instável) de um ponto fixo  $\bar{\mathbf{x}}$  corresponde à dimensão do subespaço estável (instável) de  $\mathbf{Df}(\bar{\mathbf{x}})$  em  $\bar{\mathbf{x}}$  [54]. Por exemplo, a Figura 2.6 mostra um ponto fixo em um plano, com apenas uma direção estável e uma direção instável. Desta forma, as variedades tangentes aos subespaços estável e instável são unidimensionais (linhas).

## 2.6.4 Cruzamentos Homoclínicos e Heteroclínicos

Uma variedade instável pode cruzar uma variedade estável. Se ambas as variedades pertencem ao mesmo ponto fixo  $\bar{\mathbf{x}}$ , a intersecção é chamada de homoclínica. O ponto de intersecção é denominado ponto homoclínico. Pode ocorrer de a variedade estável de um ponto fixo  $\bar{\mathbf{x}}_1$  cruzar a variedade instável de outro ponto fixo  $\bar{\mathbf{x}}_2$ . Neste caso, o cruzamento das duas variedades é chamado de intersecção heteroclínica, e o ponto de intersecção é chamado de ponto heteroclínico. O que nunca pode ocorrer é o cruzamento entre duas variedades estáveis ou entre duas variedades instáveis [21].

A Figura 2.8(a) ilustra uma órbita homoclínica, onde são mostradas três iterações posteriores e três anteriores de um ponto homoclínico  $O$ . Nota-se que, por pertencer à intersecção de ambas as variedades, o ponto de intersecção (homoclínico ou heteroclínico) pertence tanto à variedade estável  $W^s(\gamma)$  quanto à variedade instável  $W^u(\gamma)$  do ponto fixo  $\gamma$ . Recordando a definição de variedades estáveis e instáveis, a órbita  $\mathbf{f}^{[k]}(O)$  de um ponto homoclínico  $O$  tende a  $\gamma$  quando  $k \rightarrow \infty$  (pois  $O$  encontra-se sobre  $W^s(\gamma)$ ) e quando  $k \rightarrow -\infty$  (pois  $O$  encontra-se sobre  $W^u(\gamma)$ ). Isto implica que um ponto homoclínico é sempre mapeado para outro ponto homoclínico, e sua órbita é chamada de órbita homoclínica. Na Figura 2.8(b) tem-se uma ilustração de órbitas heteroclínicas localizadas sobre os cruzamentos entre variedades pertencentes a pontos de sela diferentes. Pontos de intersecção entre  $W^s(\gamma_1)$  e  $W^u(\gamma_2)$  convergem para  $\gamma_1$  quando  $t \rightarrow \infty$  e para  $\gamma_2$  quando  $t \rightarrow -\infty$ . Pontos de intersecção entre  $W^s(\gamma_2)$  e  $W^u(\gamma_1)$  convergem para  $\gamma_2$  quando  $t \rightarrow \infty$  e para  $\gamma_1$  quando  $t \rightarrow -\infty$ .  $W^s(\gamma_1)$  nunca cruza  $W^s(\gamma_2)$  e  $W^u(\gamma_1)$  nunca cruza  $W^u(\gamma_2)$ .

Sempre que ocorre um cruzamento entre variedades, elas se cruzam *infinitas vezes*. É possível demonstrar que em tais casos existem órbitas caóticas presentes no sistema [21,54].

## 2.7 Selas Caóticas

Um conjunto invariante pode ser caótico e não-atrativo. Um conjunto caótico invariante que não é atrator nem repulsor é chamado de sela caótica. O fato de ser

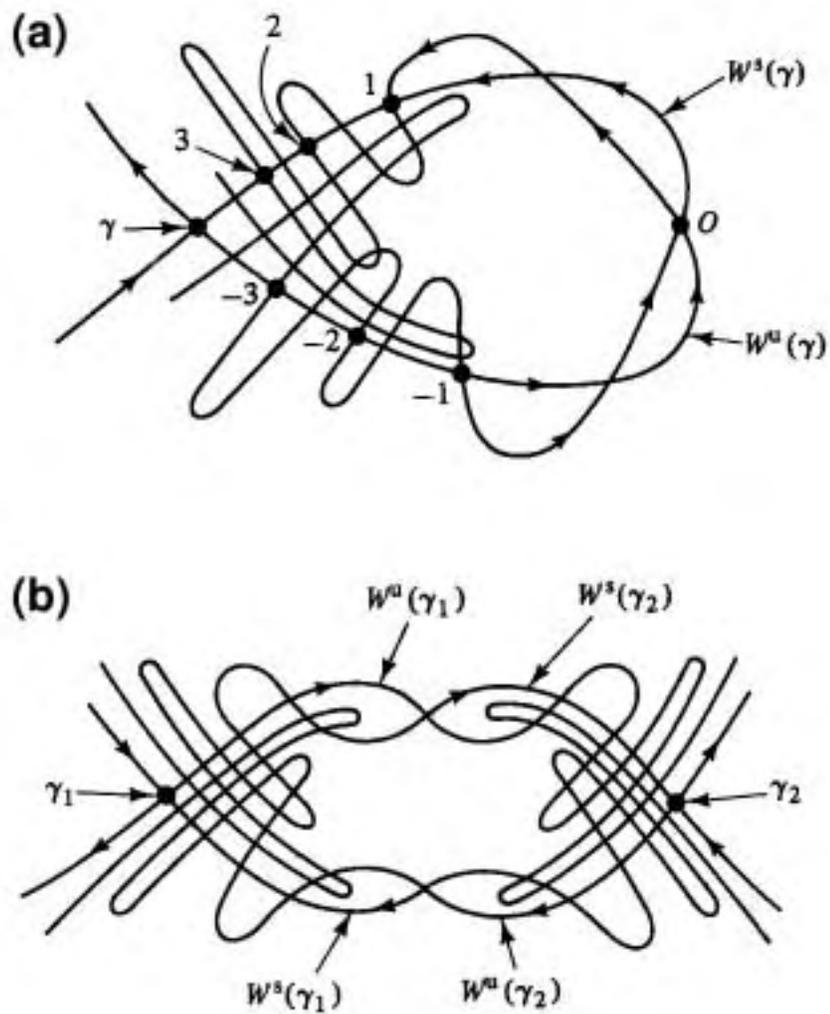


FIGURA 2.8 - (a) Órbita homoclínica sobre os cruzamentos entre as variedades estável  $W^s(\gamma)$  e instável  $W^u(\gamma)$  de um ponto fixo  $\gamma$ ; (b) Cruzamentos heteroclínicos entre variedades estável e instável de dois pontos de sela diferentes ( $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ ).

FONTE: [21] (p. 123).

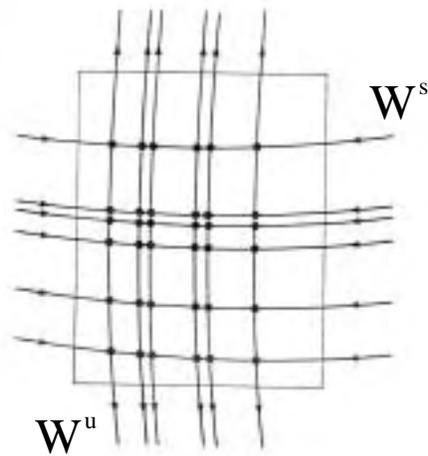


FIGURA 2.9 - Representação de uma sela caótica como a intersecção de suas variedades estável  $W^s$  e instável  $W^u$ .

FONTE: [13] (p. 200).

não-atrativo implica que quase todas as trajetórias que encontram-se na vizinhança próxima da sela caótica eventualmente se afastam da sela caótica [65,66]. Não obstante, uma sela caótica possui uma bacia de atração de medida zero. Esta bacia de atração é chamada de variedade estável da sela caótica. A variedade estável de uma sela caótica  $A$  é o conjunto de pontos que convergem para  $A$  quando o tempo  $T \rightarrow \infty$ . A variedade instável de  $A$  é o conjunto de pontos que convergem para  $A$  em tempo reverso ( $t \rightarrow -\infty$ ). A sela caótica é formada pelas intersecções de suas variedades estável e instável [25,65], como ilustrado na Figura 2.9, onde os círculos pretos representam pontos da sela caótica.

### 2.7.1 Diferença entre Atrator Caótico e Sela Caótica

Um conjunto caótico contém um número infinito de órbitas periódicas instáveis [21,67], com suas respectivas variedades instáveis e estáveis. Um atrator caótico pode ser considerado como sendo o fechamento das variedades instáveis destas órbitas periódicas instáveis [21]. As variedades instáveis nunca se cruzam, e a direção em

que elas se estendem determina a direção de expansão do atrator. Analogamente, as variedades estáveis determinam a direção de contração.

Da mesma forma como ocorre com um atrator caótico, as variedades de uma sela caótica indicam as suas direções de expansão (direção instável) e contração (direção estável). Para o caso de difeomorfismos em duas dimensões, é possível provar que as selas caóticas possuem estrutura fractal ao longo de suas direções instáveis e estáveis (suas variedades estável e instável estão localizadas em conjuntos de Cantor [68]). Os atratores caóticos, no entanto, possuem estrutura fractal ao longo das direções estáveis, mas são “suaves” ao longo das direções instáveis. Esta “suavidade” ao longo das direções instáveis é a diferença básica entre um atrator caótico e uma sela caótica em um espaço de fase de 2 dimensões [69,70]. A Figura 2.10 ilustra a diferença entre os dois tipos de conjuntos caóticos, onde a direção vertical é a direção de expansão e a direção horizontal é a de contração. Na Figura 2.10(a), as linhas horizontais e verticais representam, respectivamente, as variedades estável e instável de uma sela caótica, que se encontra na intersecção entre as linhas. Ambas as variedades possuem uma estrutura fractal semelhante a um conjunto de Cantor [21,54]. Esta estrutura fractal dá origem a um conjunto de “intervalos”, ou espaços vazios, entre os pontos de intersecção que constituem a sela caótica. A Figura 2.10(b) representa um atrator formado por um conjunto fractal (no caso, um conjunto de Cantor) de linhas verticais. Toda a região na Figura 2.10(b) (uma região com área não-nula) é preenchida pelas foliações estáveis de pontos sobre o atrator, ou seja, por pontos que convergem para o atrator à medida em que o mapa é iterado. Assim, existe uma probabilidade não-nula de que uma condição inicial aleatória convirja para o atrator na Figura 2.10(b). No caso da sela caótica na Figura 2.10(a), essa probabilidade é zero, uma vez que a variedade estável, ou equivalentemente, a bacia de atração da sela caótica possui medida zero e uma condição inicial precisaria estar *exatamente* sobre uma das linhas horizontais para que pudesse convergir para a sela caótica. Por essa razão, a sela caótica é não-atrativa. Este mesmo argumento se estende para mapas de dimensão arbitrária, desde que as variedades instáveis sejam

unidimensionais [69,70].

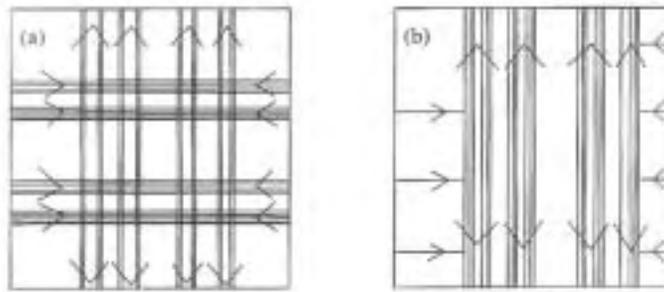


FIGURA 2.10 - Representação esquemática de uma região contendo uma sela caótica (a) e de um atrator caótico (b) para um mapa de duas dimensões. Em ambas as figuras a direção horizontal é a de contração e a vertical é a direção de expansão. A sela caótica em (a) é a intersecção entre um conjunto fractal de linhas horizontais (variedade estável) com um conjunto fractal de linhas verticais (variedade instável), algumas das quais são mostradas na figura. O atrator em (b) é um conjunto fractal de linhas verticais. As linhas horizontais que contêm pontos que convergem para pontos sobre o atrator cobrem toda a região mostrada em (b).

FONTE: [70] (p. 5351).

## 2.8 Bifurcações

Bifurcações são mudanças qualitativas que ocorrem no comportamento dinâmico de um sistema ao se variar um ou mais parâmetros de controle. Tais mudanças estão ligadas a uma mudança do comportamento topológico do sistema do sistema [56,61,64,71]. De forma simplificada, um sistema é dito estruturalmente estável quando perturbações infinitésimas não alteram o comportamento qualitativo das suas soluções. Suponha que para um determinado valor do parâmetro de controle  $a$ , o sistema apresente um atrator periódico de período 2. Se após pequenas variações em  $a$  as soluções ainda são atraídas para o atrator de período 2, o sistema é estruturalmente estável. Exemplos de perda de estabilidade estrutural incluem mudanças

na estabilidade de um conjunto limite ou a criação ou desaparecimento de um conjunto limite. A seguir são comentados alguns dos tipos mais comuns de bifurcações. As definições são exemplificadas considerando-se que  $a_c$  é o ponto de bifurcação e que  $a$  é variado da esquerda para a direita ( $a_{inicial} < a_c < a_{final}$ ). Na prática, para um dado sistema, é possível que os comentários se apliquem quando o parâmetro é variado da direita para a esquerda, ou seja, a bifurcação ocorre para  $a < a_c$  em vez de  $a > a_c$ .

### 2.8.1 Bifurcação Sela-Nó

Na bifurcação sela-nó um par de pontos fixos ou periódicos, um estável e outro instável, coalescem e depois desaparecem. Para  $a < a_c$  existe um ponto estável e outro instável. Em  $a = a_c$  os dois pontos coalescem em um ponto não-hiperbólico. Para  $a > a_c$  os pontos fixos não existem mais. O nome bifurcação sela-nó se refere ao fato de que para sistemas de duas ou mais dimensões no espaço de fase, o ponto instável criado próximo de  $a_c$  é chamado de ponto de *sela* e o ponto estável é chamado de *nó*.

### 2.8.2 Bifurcação Hopf

A *bifurcação Hopf* ocorre quando um ponto de equilíbrio do sistema muda de estável para instável e um ciclo limite é criado. As bifurcações Hopf podem ser *supercríticas* ou *subcríticas*. No caso de bifurcações supercríticas, para  $a < a_c$  o sistema possui um ponto de equilíbrio estável. A matriz Jacobiana do sistema calculada sobre o ponto de equilíbrio possui um par de autovalores que são complexos conjugados. Em  $a = a_c$  os autovalores são puramente imaginários e o equilíbrio torna-se não-hiperbólico. Para  $a > a_c$  o ponto de equilíbrio é instável e um ciclo limite estável é criado. Nas bifurcações subcríticas, um ponto de equilíbrio instável torna-se estável e um ciclo limite instável é criado [9,56].

### 2.8.3 Bifurcação de Duplicação de Período

Em uma bifurcação de duplicação de período uma órbita periódica estável de período  $k$  existe em  $a < a_c$ . Para  $a > a_c$  esta órbita perde estabilidade e uma órbita estável de período  $2k$  é criada.

## 2.9 Crises

As bifurcações mencionadas na seção anterior envolvem a criação e mudança de estabilidade de pontos fixos e órbitas periódicas, sendo por isso chamadas de bifurcações locais. Outros tipos de mudanças, conhecidas como bifurcações globais, podem ocorrer à medida em que um parâmetro do sistema é variado, envolvendo alterações descontínuas de grande escala na configuração topológica do sistema. Em Grebogi et al. [24,72], algumas destas mudanças foram estudadas extensivamente para mapas em uma e duas dimensões, sendo chamadas de crises. Crises são ocasionadas pela colisão entre um atrator caótico e um ponto fixo ou órbita periódica instável coexistente, ou equivalentemente, com sua variedade estável. As mudanças ocorridas após uma crise podem ser de três tipos [21,73]:

*Destruição do atrator (crise de fronteira).* Seja  $a$  um parâmetro de controle do sistema, e  $a_c$  o valor crítico de  $a$  no momento da crise. Suponha que para  $a < a_c$  o sistema possua um atrator caótico. Quando  $a$  é aumentado de forma que  $a > a_c$ , o atrator e sua bacia de atração são subitamente destruídos. Este tipo de crise ocorre quando o atrator caótico colide com uma órbita periódica instável que encontra-se sobre a fronteira entre a bacia de atração do atrator caótico e a bacia de outro conjunto atrator.

*Expansão do atrator (crise interior).* Para  $a < a_c$ , existe um atrator caótico no espaço de fase. Quando  $a$  ultrapassa o valor crítico  $a_c$ , o atrator colide com uma órbita periódica instável e subitamente se expande, ocupando uma região maior no espaço de fase. Neste tipo de crise, a órbita periódica com a qual o atrator colide encontra-se no interior da bacia de atração do atrator caótico e pertence a uma sela caótica que coexiste com o atrator caótico para  $a \leq a_c$ . Logo, uma crise interior é

marcada pela colisão de um atrator caótico com uma sela caótica no interior de sua bacia de atração [20,67,74,75,76].

*União de atratores.* Para  $a < a_c$  existem dois atratores caóticos, cada um com uma bacia de atração própria. À medida em que  $a$  aumenta, os dois atratores aumentam de tamanho e no ponto da crise ( $a = a_c$ ) eles simultaneamente tocam a fronteira que separa as duas bacias (em  $a = a_c$  os atratores colidem também com órbitas periódicas instáveis que se encontram sobre a fronteira entre as bacias).

Na Figura 2.11 são mostrados dois *diagramas de bifurcação* que ilustram várias das mudanças que podem ocorrer em um sistema dinâmico ao se variar um parâmetro de controle. As Figuras referem-se ao mapa quadrático  $x_{n+1} = C - x_n^2$ , onde  $C$  é o parâmetro de controle. Um diagrama de bifurcação pode ser construído variando-se  $C$  e exibindo os valores de  $x$  para cada valor de  $C$  após descartar um transiente inicial. Na Figura 2.11(a), uma bifurcação sela-nó ocorre em  $C = -1/4$ , onde um ponto fixo estável e um instável são criados. A evolução do ponto estável à medida em que  $C$  é variado é representada por uma linha contínua, e a do ponto instável, pela linha tracejada. O ponto fixo estável sofre uma série de bifurcações de duplicação de período que conduz a um atrator caótico. Em  $C = 2$ , a órbita periódica instável colide com o atrator caótico e o atrator é destruído em uma crise de fronteira. Após a crise, todas as condições iniciais levam a órbitas que conduzem a  $x = -\infty$ . A Figura 2.11(b) é uma ampliação da Figura 2.11(a) para  $C$  entre 1.72 e 1.82. Nesta região, uma bifurcação sela-nó dá origem a um par (estável/instável) de órbitas periódicas de período três. Para  $C < 1.79$ , existe um atrator caótico localizado em três bandas. Quando  $C \sim 1.79$ , este atrator colide com a órbita instável de período três e após isso o atrator subitamente expande-se, formando apenas uma banda.

Para sistemas com espaço de fase com mais de uma dimensão, além de colisões com uma órbita periódica instável, crises podem ser estudadas do ponto de vista de tangências entre variedades. Pelo menos para mapas em duas dimensões estritamente dissipativos (i.e., o módulo da determinante da Jacobiana do mapa é menor do que 1 em qualquer ponto), crises podem ocorrer somente de duas maneiras [21,73,77]:

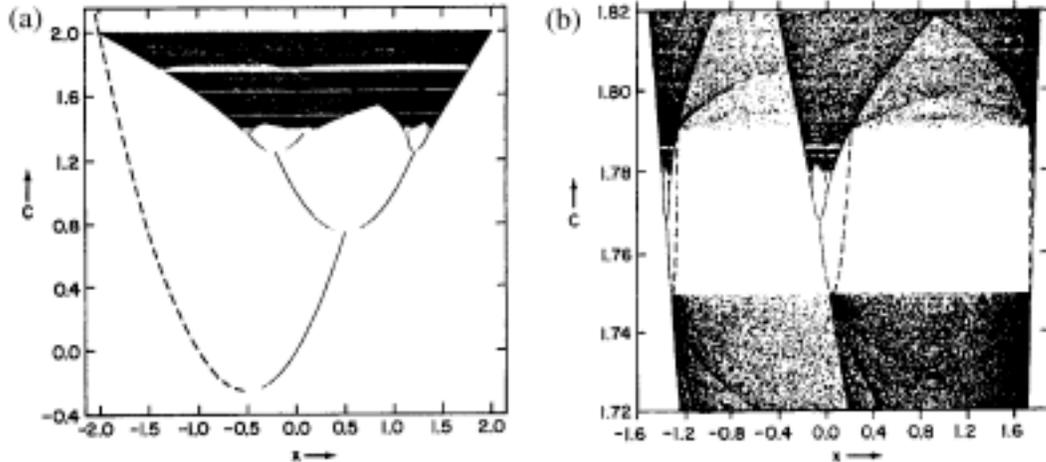


FIGURA 2.11 - Diagramas de bifurcação do mapa quadrático mostrando (a) uma crise interior e (b) uma crise de fronteira. As linhas tracejadas representam órbitas periódicas instáveis que colidem com o atrator caótico no momento da crise.

FONTE: Adaptada de [72] (p. 1508-1509).

*Tangência heteroclínica.* Neste caso, a variedade estável de uma órbita periódica instável (B) é tangente à variedade instável de uma órbita periódica instável (A) que encontra-se sobre o atrator, como mostrado na Figura 2.12a

*Tangência homoclínica.* Neste caso, as variedades estável e instável de uma órbita periódica instável (B) são tangentes, como mostrado na Figura 2.12b.

Em ambos os casos, quando  $a = a_c$  o atrator caótico é o fechamento<sup>1</sup> de um dos ramos da variedade instável de B. No caso de crise interior, quando  $a > a_c$  o outro ramo da variedade instável de B é incorporado ao atrator, resultando em um aumento abrupto do seu tamanho. No caso heteroclínico, para  $a = a_c$  e também para  $a < a_c$ , o atrator é também o fechamento da variedade instável de A. Em ambos os casos B está sobre o atrator para  $a = a_c$  mas não para  $a < a_c$  [21,73,77].

<sup>1</sup>O fechamento de um conjunto  $B$  é definido como o conjunto de todos os pontos  $x$  tais que toda vizinhança aberta de  $x$  contém pelo menos um ponto de  $B$ . Segue-se que  $B$  está contido no fechamento de  $B$ .

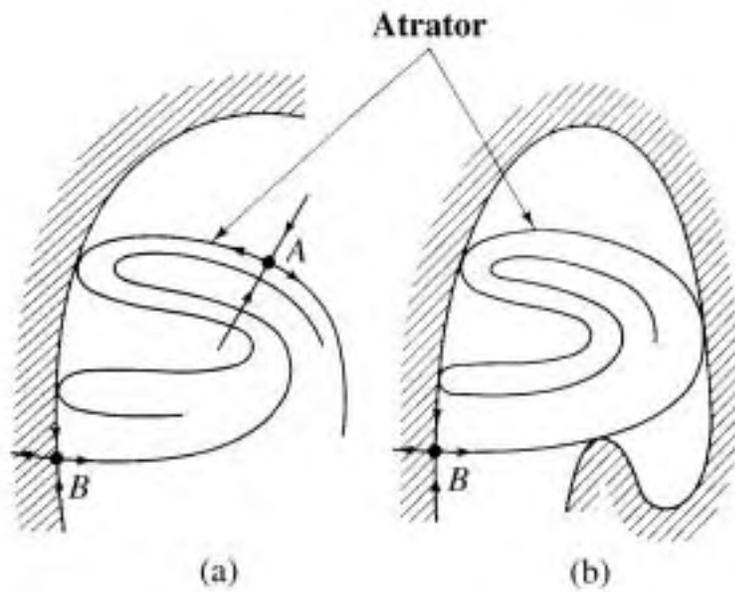


FIGURA 2.12 - Ilustração de tangências heteroclínica (a) e homoclínica (b).  $A$  e  $B$  representam pontos fixos instáveis.

FONTE: [21] (p. 281).

## CAPÍTULO 3

### ALGORITMOS

#### 3.1 Encontrando Pontos Fixos

Seja um sistema dinâmico definido por um mapa  $\mathbf{f} \in \mathfrak{R}^d$ . Seja  $\bar{\mathbf{x}}$  um ponto fixo de  $\mathbf{f}$ . Sendo assim,  $\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}) = \bar{\mathbf{x}}$ , e o problema de se encontrar os pontos fixos em  $\mathbf{f}$  resume-se a encontrar os zeros da função  $F(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \mathbf{f}(\mathbf{x})$ .

##### 3.1.1 O Método de Newton para Mapas Unidimensionais

O método de Newton para encontrar a solução de  $F(x) = 0$  é obtido linearizando-se  $F$  em torno de um valor inicial  $x_0$ , através de uma série de Taylor escrita até a primeira ordem:

$$F(x) \approx F(x_0) + F'(x_0)(x - x_0),$$

onde  $F'(x) = dF/dx$ . Uma solução aproximada  $x_1$  para  $F(x) = 0$  é

$$\begin{aligned} 0 &\approx F(x_0) + F'(x_0)(x_1 - x_0) \\ x_1 &\approx x_0 - \frac{F(x_0)}{F'(x_0)}. \end{aligned}$$

A solução aproximada  $x_1$  pode ser usada como nova condição inicial em um processo iterativo definido por

$$\begin{aligned} x_n &= x_{n-1} - F(x_{n-1})/F'(x_{n-1}) \\ &= x_{n-1} - (x_{n-1} - f(x_{n-1}))/(1 - f'(x_{n-1})). \end{aligned}$$

O processo termina quando  $x_n \approx x_{n-1}$ . Note-se que o método não converge se  $f'(\bar{x}) = 1$ . Para achar órbitas periódicas de período  $n > 1$ , basta achar os zeros da função  $F(x) = x - f^{[n]}(x)$ , onde  $f^{[n]}$  é a  $n$ -ésima iteração do mapa  $f$ .

### 3.1.2 O Método de Newton para Equações Diferenciais

A seguir é descrito o procedimento para encontrar pontos fixos de um mapa de Poincaré.

Seja o seguinte sistema autônomo

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad (3.1)$$

onde  $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_d\}$  é um vetor  $d$ -dimensional e  $\mathbf{f} = \{f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_d(\mathbf{x})\}$  é uma função vetorial. Seja  $\phi_t(\mathbf{x}_0)$  o fluxo da equação 3.1 dada uma condição inicial  $\mathbf{x}_0$ . Seja  $t = \bar{\tau}$  o tempo que a trajetória iniciada em  $\mathbf{x}_0$  leva para completar uma iteração de um dado mapa de Poincaré, isto é,  $\mathbf{x}_1 = \phi_{\bar{\tau}}(\mathbf{x}_0)$  é o próximo ponto da iteração do mapa.

Para encontrar um ponto fixo da equação 3.1 é preciso encontrar uma solução para a equação  $\phi_{\bar{\tau}}(\bar{\mathbf{x}}) = \bar{\mathbf{x}}$ .

O método de Newton requer uma condição inicial  $\mathbf{x}_0$  próxima do ponto fixo  $\bar{\mathbf{x}}$

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_0 + \Delta \mathbf{x}$$

e uma aproximação inicial  $\tau_0$  para a duração do tempo de retorno (período) de  $\bar{\mathbf{x}}$

$$\bar{\tau} = \tau_0 + \Delta \tau.$$

Expandindo  $\phi$  em uma série de Taylor até a primeira ordem em  $\mathbf{x}_0$  e  $\tau_0$  tem-se

$$\phi_{\bar{\tau}}(\bar{\mathbf{x}}) = \phi_{\tau_0}(\mathbf{x}_0) + \frac{\partial \phi_{\tau_0}(\mathbf{x}_0)}{\partial t} \Delta \tau + \mathbf{D}_{\mathbf{x}} \phi_{\tau_0}(\mathbf{x}_0) \Delta \mathbf{x}. \quad (3.2)$$

Sabe-se que (ver Seção 2.4.2.1)

$$\frac{\partial \phi_{\tau_0}(\mathbf{x}_0)}{\partial t} = \mathbf{f}(\phi_{\tau_0}(\mathbf{x}_0)) \quad (3.3)$$

Substituindo a equação 3.3 na equação 3.2, e usando  $\phi_{\bar{\tau}}(\bar{\mathbf{x}}) = \bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_0 + \Delta \mathbf{x}$  e  $\mathbf{x}_1 = \phi_{\tau_0}(\mathbf{x}_0)$ , obtém-se

$$\mathbf{x}_0 + \Delta \mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{f}(\mathbf{x}_1)\Delta\tau + \mathbf{D}_x\phi_{\tau_0}(\mathbf{x}_0)\Delta\mathbf{x}$$

Rearranjando,

$$\Delta \mathbf{x} - \mathbf{D}_x\phi_{\tau_0}(\mathbf{x}_0)\Delta\mathbf{x} - \mathbf{f}(\mathbf{x}_1)\Delta\tau = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0, \quad (3.4)$$

ou

$$(\mathbf{I} - \mathbf{J}|_{\mathbf{x}_0})\Delta\mathbf{x} - \mathbf{f}(\mathbf{x}_1)\Delta\tau = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0, \quad (3.5)$$

onde  $\mathbf{I}$  é a matriz identidade e  $\mathbf{J}|_{\mathbf{x}_0} = \mathbf{D}_x\phi_{\tau_0}(\mathbf{x}_0)$ . Os valores de  $\mathbf{x}_0$ ,  $\mathbf{x}_1$  e  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_1)$  são conhecidos. Para encontrar o ponto fixo é necessário resolver o sistema linear dado pela equação 3.5 para determinar os valores de  $\Delta\tau$  e  $\Delta\mathbf{x}$  a cada iteração. A matriz Jacobiana do fluxo é obtida integrando-se a equação variacional

$$\dot{\mathbf{J}} = \mathbf{D}_x\mathbf{f}(\mathbf{x})\mathbf{J}. \quad (3.6)$$

com  $\mathbf{J} = \mathbf{I}$  como condição inicial.

Um problema com a equação 3.5 reside no fato de que a solução  $\mathbf{x}_1$  em cada passo não encontra-se necessariamente sobre a seção de Poincaré, a não ser que a seção seja estroboscópica. Christiansen [78] sugere uma solução para este problema adicionando uma restrição ao sistema dado pela equação 3.5. Seja a seção de Poincaré definida por um hiperplano dado pela equação linear

$$(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{a} = 0, \quad (3.7)$$

onde  $\mathbf{a}$  é um vetor normal ao plano e  $\mathbf{x}_0$  encontra-se sobre o plano. Adicionando a equação 3.7 ao sistema 3.5 impõe-se a restrição de que  $\mathbf{x}_1$  esteja sobre a seção de Poincaré em todas as iterações, enquanto o método ajusta o valor correto de  $\Delta\mathbf{x}$  e  $\Delta\tau$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I} - \mathbf{J} & -\mathbf{f}(\mathbf{x}_1) \\ \mathbf{a} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\mathbf{x} \\ \Delta\tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

Escrevendo os termos do sistema 3.8 explicitamente tem-se:

$$\begin{bmatrix} 1 - J_{11} & -J_{12} & \cdots & -J_{1d} & -f_1(\mathbf{x}_1) \\ -J_{21} & 1 - J_{22} & \cdots & -J_{2d} & -f_2(\mathbf{x}_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -J_{d1} & -J_{d2} & \cdots & 1 - J_{dd} & -f_d(\mathbf{x}_1) \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_d & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \vdots \\ \Delta x_d \\ \Delta\tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} - x_{01} \\ x_{12} - x_{02} \\ \vdots \\ x_{1d} - x_{0d} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.9)$$

onde o primeiro subíndice dos vetores  $\mathbf{x}$  à direita da igualdade em 3.9 identifica o vetor ( $\mathbf{x}_1$  e  $\mathbf{x}_0$ ) e o segundo número é o índice do elemento do vetor.

Em geral o método de Newton depende de valores iniciais de posição e período razoavelmente próximos do ponto fixo desejado. Os “chutes” iniciais para a posição da órbita podem ser obtidos observando uma trajetória caótica até que ela apresente um comportamento aproximadamente periódico próximo à região de interesse. O “chute” inicial para o período é dado pela duração que a órbita leva para completar o ciclo aproximadamente periódico. Se o método não convergir é necessário especificar uma outra condição inicial próxima. O método funciona tanto para encontrar órbitas estáveis quanto instáveis. Mais detalhes podem ser encontrados em Sparrow [1], Christiansen [78] e Curry [79].

### 3.2 Variedades de Pontos de Sela

Considere um mapa  $T$  de  $\mathfrak{R}^n$  ( $T$  pode ser um mapa de Poincaré) e um ponto fixo de sela  $\bar{\mathbf{x}}$  de  $T$ , ou seja, a matriz Jacobiana  $\mathbf{DT}(\bar{\mathbf{x}})$  possui pelo menos um autovalor com módulo maior do que 1 ( $|\lambda_u| > 1$ ) e pelo menos um autovalor com módulo menor do

que 1 ( $|\lambda_s| < 1$ ). Conforme a Seção 2.6.2, no ponto  $\bar{\mathbf{x}}$  a variedade estável  $W^s$  de  $\bar{\mathbf{x}}$  é tangente ao autovetor  $\mathbf{v}_s$  associado ao autovalor estável  $\lambda_s$ . Semelhantemente, a variedade instável  $W^u$  é tangente ao autovetor  $\mathbf{v}_u$  associado ao autovalor estável  $\lambda_u$ . Sejam  $W_{loc}^s$  e  $W_{loc}^u$  segmentos das variedades estável e instável, respectivamente, em uma pequena vizinhança de  $\bar{\mathbf{x}}$ , conforme a definição 2.32. As variedades estáveis e instáveis de  $\bar{\mathbf{x}}$  podem ser definidas em termos de seus segmentos locais  $W_{loc}^s$  e  $W_{loc}^u$ , conforme a definição 2.33:

$$W^s(\bar{\mathbf{x}}) = \bigcup_{k \geq 0} T^{[-k]}(W_{loc}^s(\bar{\mathbf{x}})) \quad (3.10)$$

$$W^u(\bar{\mathbf{x}}) = \bigcup_{k \geq 0} T^{[k]}(W_{loc}^u(\bar{\mathbf{x}})) \quad (3.11)$$

A equações 3.10 e 3.11 levam ao seguinte algoritmo, proposto por You et al. [80], para encontrar  $W^u$  baseado em iterações sucessivas de pontos sobre uma linha inicial  $\gamma$ : Fixe um valor de tolerância  $\varepsilon$  (tipicamente  $10^{-3}$ ). Encontre o autovalor instável  $\lambda_u$  e o autovetor associado  $\mathbf{v}_u$  para a matriz Jacobiana  $\mathbf{DT}(\bar{\mathbf{x}})$ . Escolha um ponto  $\mathbf{a}$  a uma distância bem pequena de  $\bar{\mathbf{x}}$  na direção  $\mathbf{v}_u$  tal que  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b} = T(\mathbf{a})$  estão a uma distância menor do que  $\varepsilon$  de  $\bar{\mathbf{x}}$ . Seja  $L$  o segmento de reta conectando  $\mathbf{a}$  a  $\mathbf{b}$ . Aplique  $T$  sobre o segmento  $L$ . Para isto escolha uma grade de pontos  $\mathbf{a} = a_0, a_1, \dots, a_n = \mathbf{b}$  ao longo de  $L$ . Seja  $\mathbf{b}_1 = T(\mathbf{a}_1)$ ,  $\mathbf{b}_2 = T(\mathbf{a}_2)$ , e assim por diante. Para garantir a precisão do algoritmo, a distância entre dois pontos consecutivos precisa ser menor do que  $\varepsilon$ . Por exemplo,  $|\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}| \leq \varepsilon$ . Caso contrário, mova  $\mathbf{a}_1$  para mais próximo de  $\mathbf{a}$ . Repita este processo para a escolha de cada ponto da grade, de forma que  $|\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2| \leq \varepsilon$ ,  $|\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_3| \leq \varepsilon$ , etc. Este procedimento gera a primeira iteração de  $L$ , assumindo-se que  $\lambda_u > 0$ . Se  $\lambda_u < 0$ , substitua  $T(\mathbf{a}_i)$  por  $T^{[2]}(\mathbf{a}_i)$  para  $i = 0, 1, \dots, n$ . Para obter um segmento maior da variedade instável, calcule  $T^{[i]}(L)$  para diversos valores de  $i$ . Faça  $i = 2$ , calcule e mostre  $T^{[2]}(L)$ , depois faça  $i = 3$  e mostre  $T^{[3]}(L)$ , etc. O valor de  $n$  precisa ser escolhido por experimentação, de acordo com o problema. O mesmo procedimento pode ser usado para obter a variedade estável

de  $\bar{x}$ , bastando substituir  $T^{[i]}$  por  $T^{[-i]}$  (ver equação (3.10)). Este algoritmo será referenciado nos próximos capítulos como algoritmo YKY (You-Kostelich-Yorke).

### 3.3 Selas Caóticas

Nesta seção são descritos dois algoritmos para a detecção de selas caóticas: o método “sprinkler” e o método “PIM triple”. Os algoritmos são descritos para mapas de tempo discreto, logo, para sistemas de equações diferenciais as trajetórias mencionadas se referem a iterações de um mapa de Poincaré.

#### 3.3.1 O Método “Sprinkler”

Em 1985, Kantz e Grassberger [81] apresentaram um procedimento numérico para encontrar trajetórias próximas de selas caóticas baseado na geração de longos transientes caóticos. Trajetórias iniciadas próximas de uma sela caótica são inicialmente atraídas para ela e depois repelidas, em direções transversas às direções de atração. Para entender porque isto ocorre, é válido lembrar que a sela caótica é a intersecção de suas variedades estável e instável. Considere-se uma região  $R$  no espaço de fase contendo uma sela caótica  $\Lambda$  e nenhum atrator, uma *região de restrição*, segundo Nusse e Yorke [65]. A maioria das trajetórias iniciadas em  $R$  afastam-se de  $\Lambda$  após poucas iterações, com exceção dos pontos próximos à variedade estável de  $\Lambda$ . As órbitas destas condições iniciais próximas da variedade estável inicialmente aproximam-se da sela caótica, sendo depois repelidas pela variedade instável. Após algumas iterações, estas órbitas estão distribuídas ao longo da variedade instável de  $\Lambda$ . Quanto mais próximas da variedade estável estão as condições iniciais, mais tempo leva para que suas órbitas se afastem de  $\Lambda$ . E suas iterações logo antes de abandonarem a região de restrição encontram-se mais próximas de sua variedade instável.

Defina-se uma grade com  $N_0$  pontos uniformemente distribuídos em  $R$ . Se cada um destes pontos for iterado por um tempo  $t$  grande o suficiente, a maioria dos pontos irá abandonar a região  $R$ , com apenas uns poucos  $N_t$  pontos permanecendo

em  $R$ . Para  $N_0$  e  $t$  grandes, as trajetórias que permanecem em  $R$  encontram-se próximas da sela caótica  $\Lambda$  durante a maior parte do tempo  $t$  transcorrido, exceto, talvez, por suas primeiras iterações, quando elas estão se aproximando de  $\Lambda$  ao longo da variedade estável, e suas últimas iterações, quando elas estão se afastando pela variedade instável [13].

A dinâmica descrita no parágrafo anterior leva intuitivamente ao seguinte algoritmo, primeiramente apresentado por Kantz e Grassberger [81]. Inicia-se com uma distribuição uniforme de condições iniciais na região  $R$  e itera-se cada condição inicial até que o maior expoente de Lyapunov da órbita, ou sua média nas últimas 15 iterações, seja negativo. As primeiras 10 e as últimas 30 iterações são descartadas (valores usados para o mapa de Hénon). Os pontos remanescentes formam uma aproximação para a sela caótica. Note-se que o algoritmo foi elaborado para os casos em que a sela caótica coexiste com um atrator periódico, pois a mudança do expoente de Lyapunov de positivo para negativo indica que a órbita “escapou” para um atrator periódico.

Hsu et al. [13] apresentaram uma variação do método de Kantz e Grassberger [81], que eles chamaram de algoritmo “sprinkler”. Uma grade fina de pontos é definida em  $R$ , sendo gerada uma trajetória para cada ponto da grade. As órbitas que permanecem em  $R$  após um certo tempo  $t_c$  fornecem as aproximações desejadas. Suas condições iniciais são uma aproximação para a variedade estável de  $\Lambda$ , e suas últimas iterações são uma aproximação para a variedade instável. Os pontos em um tempo  $\bar{t} = \xi t_c$  são a aproximação para  $\Lambda$ . Os valores de  $t_c$  e  $\bar{t}$  precisam ser escolhidos após um pouco de tentativa e erro, mas usualmente  $t$  precisa ser grande comparado com o tempo de escape médio  $\tau$ , ou seja, o tempo médio que uma trajetória leva para abandonar a região  $R$ . Para os valores de  $\xi$ , Hsu et al. [13] sugerem que  $\xi = 1/2$  parece funcionar bem para a maioria dos sistemas. Eles argumentam ainda que a escolha dos valores de  $t_c$  e  $\xi$  tem pouca influência no resultado final, desde que sejam escolhidos dentro de um intervalo de valores razoavelmente coerente.

O tempo médio de escape ou transiente  $\tau$  pode ser obtido com o mesmo programa.

Seja  $N_t$  o número de trajetórias ainda em  $R$  no tempo  $t$ . Tipicamente,  $N_t$  decai exponencialmente com o tempo  $t$  a uma taxa  $1/\tau$  [13,14]

$$N_t = N_0 \exp(-t/\tau), \quad (3.12)$$

e os valores de  $-1/\tau$  podem ser obtidos como a inclinação do gráfico de  $\log N_t$  vs.  $t$ .

### 3.3.2 O Método “PIM Triple”

No algoritmo sprinkler, descrito na seção anterior, a sela caótica  $\Lambda$  é aproximada por uma série de fragmentos de diferentes trajetórias. O método “PIM triple”, apresentado por Nusse e Yorke [65], encontra uma única trajetória que permanece próxima da sela caótica por um tempo arbitrariamente longo.

Primeiramente, a rotina PIM triple precisa receber como entrada um par de pontos  $a$  e  $b$  tais que o segmento de reta  $[a, b]$  de  $a$  a  $b$  cruza a variedade estável de  $\Lambda$ . Neste caso, deve haver, necessariamente, um ponto  $c$  entre  $a$  e  $b$  que está mais perto de  $\Lambda$  do que  $a$  e  $b$ . É importante observar que o tempo de escape  $\tau$  é infinito para um ponto que encontra-se exatamente sobre a sela caótica, ou em sua variedade estável, e o tempo de escape tende a infinito para pontos arbitrariamente próximos de  $\Lambda$ . Desta forma, o tempo de escape de  $c$ ,  $\tau(c)$ , é estritamente maior do que  $\tau(a)$  e  $\tau(b)$ . Tal tripla  $(a, c, b)$  é chamada de tripla PIM (do inglês “Proper Interior Maximum”).

Uma tripla PIM pode ser encontrada selecionando-se um intervalo  $[a, b]$  inicial grande na região de restrição  $R$ . Uma vez fornecidos os pontos  $a$  e  $b$ , o algoritmo tenta encontrar o ponto  $c$  da tripla. Na rotina PIM triple o intervalo  $[a, b]$  é dividido em  $N$  subintervalos de mesmo tamanho, delimitados por uma grade de pontos ao longo de  $[a, b]$ . Após isso, obtém-se o tempo de escape para cada um dos pontos da grade. Para uma escolha apropriada de  $N$ , devem haver uma ou mais triplas PIM em  $[a, b]$ . São selecionados 3 pontos *quaisquer* em  $[a, b]$ , não necessariamente consecutivos, formando uma tripla PIM  $(a_1, c_1, b_1)$ . A tripla PIM escolhida *não precisa* conter o ponto da grade com o tempo de escape máximo. Em seguida, é criado um *refinamento*  $-\epsilon$  da tripla  $(a_1, c_1, b_1)$ . Um *refinamento*  $-\epsilon$  de uma tripla  $(a, c, b)$  é um conjunto finito

de pontos  $g_i$  em  $[a, b]$  tal que  $a = g_0 < g_1 < \dots < g_N = b$ ,  $|g_k - g_{k+1}| \leq \epsilon \cdot |a - b|$ ,  $c = g_k$  para algum  $k$ ,  $1 \leq k \leq N$ . Aqui,  $|a - b|$  denota a distância entre  $a$  e  $b$ . O próximo passo é encontrar uma nova tripla  $(a_2, c_2, b_2)$  no *refinamento*  $-\epsilon$  da tripla  $(a_1, c_1, b_1)$ . Depois, gera-se um *refinamento*  $-\epsilon$  desta tripla e seleciona-se uma nova tripla  $(a_3, c_3, b_3)$ . Esse procedimento é repetido, obtendo-se triplas PIM sucessivamente menores até que se encontre uma tripla  $(a_n, c_n, b_n)$  cujo tamanho  $|a_n, b_n|$  é menor do que um valor  $\delta$  especificado, que define a precisão da aproximação. Seja  $I_0$  o intervalo  $[a_n, b_n]$ . O intervalo  $I_0$  é iterado uma vez, ou seja, itera-se  $a_n$  e  $b_n$ , obtendo-se um novo intervalo  $I_1$ . Se o tamanho do intervalo  $I_1$  for menor do que  $\delta$ ,  $I_1$  é iterado, obtendo-se  $I_2$ . Continua-se iterando  $I_n$  até que seu tamanho seja maior do que  $\delta$ . Neste caso, o intervalo  $I_n$  é refinado usando a rotina PIM triple, obtendo-se um novo intervalo  $I \leq \delta$ . O programa segue iterando  $I$  e acionando a rotina PIM triple sempre que seu tamanho exceder  $\delta$ . Após cada iteração é exibido um ponto de  $I$ , gerando uma única órbita que permanece a uma distância da ordem de  $\delta$  da sela caótica real.

### 3.3.3 Comentários sobre os Algoritmos

O algoritmo Sprinkler é bastante simples e pode ser facilmente paralelizado, uma vez que depende basicamente da integração de um grande número de condições iniciais. Em uma implementação paralela pode-se atribuir um conjunto diferente de condições iniciais a cada processador, executar a integração de cada conjunto simultaneamente e ao final, concatenar as saídas de cada processo. Desta forma, a sela caótica é composta por um conjunto de fragmentos de órbitas com longo transiente. Esta característica do método sprinkler tem implicações diretas na precisão das saídas obtidas. Normalmente deseja-se gerar o maior número de pontos próximos da sela caótica  $\Lambda$  quanto possível, e os pontos devem estar tão próximos de  $\Lambda$  quanto possível. Para aumentar a precisão é necessário iterar cada ponto por um tempo  $t_c$  maior, e assim, um número menor de pontos permanecerá em  $R$  após  $t_c$ . No caso do algoritmo de Hsu et al. [13], somente um ponto de cada condição inicial com transiente maior do que  $t_c$  é incluído na sela caótica. Em geral, a maioria

das órbitas vai escapar antes de  $t_c$ , sendo necessário o uso de uma grade com um número muito grande de condições iniciais para melhorar a precisão e ainda obter uma boa quantidade de pontos próximos da sela caótica. Apesar dessas dificuldades, o algoritmo sprinkler tem a vantagem de obter as variedades da sela caótica, e por isso tem sido amplamente utilizado [14,22,82,83,84].

A eficácia do algoritmo PIM triple para se obter selas caóticas unidimensionalmente instáveis com alta precisão tem sido confirmada por diversos trabalhos [26,85,86,87,88]. Sua utilização é indicada no caso de sistemas com transientes não muito longos. Para longos transientes sua execução torna-se muito demorada, e o método proposto por Kantz e Grassberger [81] é o mais indicado.

Durante a execução do algoritmo PIM tripple é possível que sejam encontrados segmentos  $I_n$  que não contêm nenhuma tripla PIM, e a rotina pode falhar. Se o programa funcionar por algum tempo e depois ficar “preso” em um ponto, Nusse e Ott [65] sugerem as seguintes ações:

- 1) Garantir que a região de restrição  $R$  não contém nenhum atrator;
- 2) Aumentar o tamanho da região  $R$ ;
- 3) Tentar outro intervalo inicial  $[a, b]$ ; ele deve ser escolhido de maneira que cruze a variedade estável da sela caótica;
- 4) Selecionar um número maior  $N$  de subdivisões de cada intervalo  $I_n$ ;
- 5) Quando uma falha ocorrer, reiniciar com uma tripla PIM  $(a, c, b)$  anteriormente armazenada e escolher um  $N$  um pouco diferente, para escolher uma nova tripla diferente da usada anteriormente.

No último item da lista, a nova tripla pode ser encontrada alternativamente através da aplicação de uma pequena perturbação na tripla  $(a, c, b)$  armazenada. Isto pode ser feito adicionando um valor aleatório  $\Delta$  aos pontos  $a$  e  $b$ . Contanto que o valor de  $\Delta$  seja da ordem de  $\delta$ , a saída gerada é satisfatória.

Nos próximos capítulos, o método PIM triple é utilizado para gerar as selas caóticas, que por sua vez são usadas para validar as saídas obtidas com o método sprinkler para cálculo das variedades instáveis e estáveis. Diversos testes foram realizados para validar nossa implementação do método PIM triple. As saídas obtidas foram comparadas com saídas obtidas com o programa “Dynamics” [66] e com resultados apresentados por outros autores. A Figura 3.1 ilustra a precisão do método implementado em comparação com resultados de outros trabalhos. A Figura 3.1(a) exibe uma sela caótica obtida por Nusse e Yorke [65] para o mapa de Hénon  $\mathbf{f}(x, y) = (A - x^2 + My, x)$ , com os parâmetros  $A = 1.45$  e  $M = 0.2$ . Para este caso, o sistema apresenta um atrator de período 5. A região de restrição  $R$  foi definida como sendo o retângulo  $B = \{(x, y) : -2 \leq x \leq 2, -2 \leq y \leq 2\}$  menos um disco de raio 0.005 ao redor de um dos 5 pontos periódicos do atrator (não é necessário cobrir os cinco pontos). A Figura 3.1(b) mostra a saída correspondente obtida com o nosso código implementado em FORTRAN. Foi obtida uma única trajetória com  $10^5$  pontos, usando a mesma definição para  $R$  e uma precisão definida por  $\delta = 10^{-8}$ . Na Figura 3.1(c) é mostrada uma sela caótica (pontos pequenos) junto com um atrator caótico com sete bandas (linhas espessas) e uma órbita periódica instável (cruz), obtida por Szabó et al. [74] para o mapa de Hénon com  $M = 0.3$  e  $A = 1.276$ . A região de restrição é um retângulo contendo a sela caótica, menos uma das sete bandas do atrator caótico. A Figura 3.1(d) exibe o atrator caótico, a órbita periódica instável e uma órbita de  $10^5$  pontos obtida com nosso algoritmo PIM triple, usando  $\delta = 10^{-8}$ .

Além do método PIM triple, existem outros métodos capazes de gerar longas trajetórias em selas caóticas, tais como os algoritmos “PIM simplex” [89] e “stagger-and-step” [90]. Devido à sua complexidade, estes algoritmos são indicados somente quando deseja-se obter selas caóticas  $n$ -dimensionalmente instáveis, com  $n > 1$ .

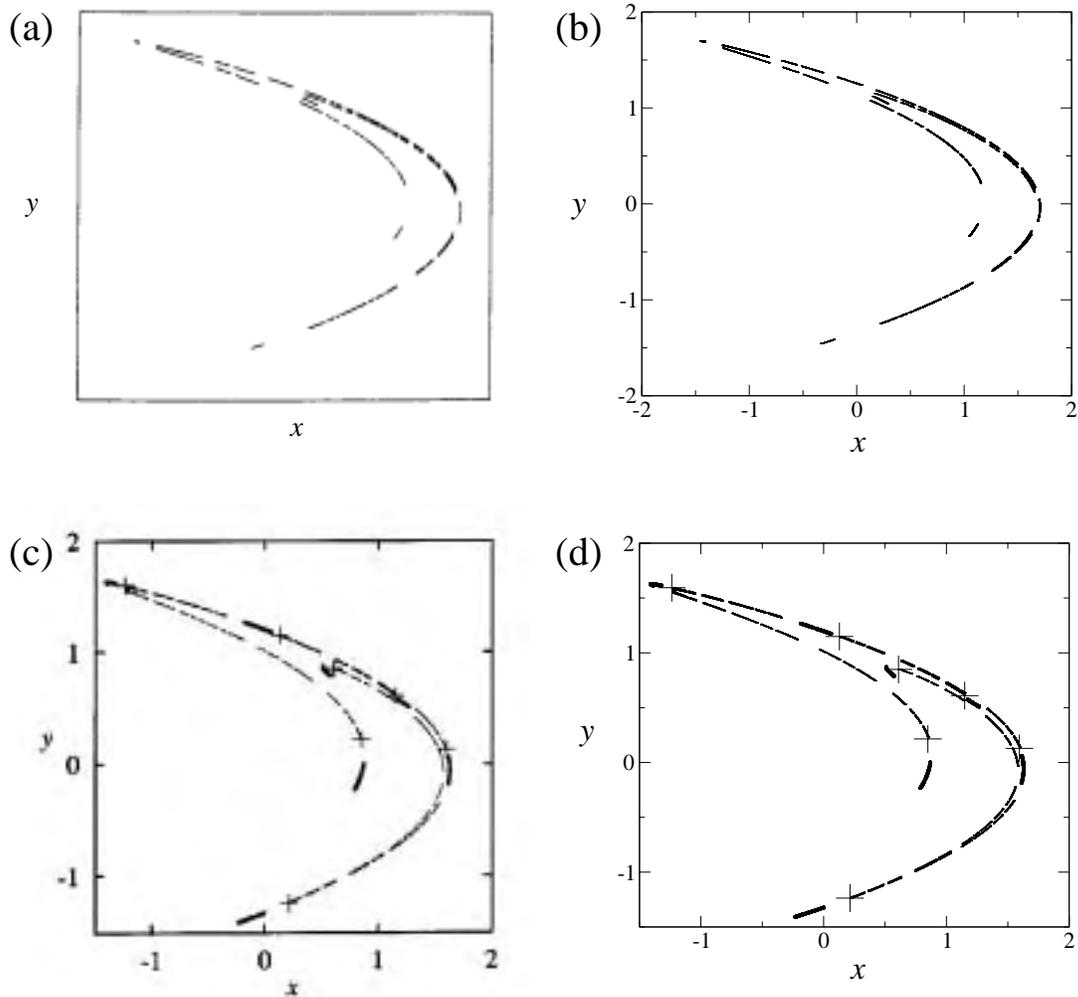


FIGURA 3.1 - (a) Sela caótica obtida por Nusse e Ott ([65], p. 143) para o mapa de Hénon com  $A = 1.45$  e  $M = 0.2$ ; (b) a mesma sela caótica de (a) obtida com a nossa implementação do algoritmo PIM triple; (c) sela caótica apresentada em Szabo et al. ([74], p. 175), as linhas grossas representam um atrator caótico e as cruzes são uma órbita periódica instável de período 7; (d) resultado obtido com a nossa implementação do algoritmo PIM triple para o mesmo caso de (c).

### 3.4 Variedades de Pontos de Sela $\times$ Variedades de Selas Caóticas

Embora os procedimentos numéricos para a obtenção de variedades de pontos de sela sejam bem diferentes dos usados na obtenção de variedades de selas caóticas, existe uma similaridade muito grande entre ambos os tipos de variedades. A Figura 3.2(a) exibe a variedade estável de uma sela caótica obtida com o algoritmo sprinkler para o mapa de Henón com  $M = 0.3$  e  $A = 1.2716$ . Na Figura 3.2(b) é mostrado um segmento de  $10^6$  pontos da variedade estável de um ponto fixo (cruz) pertencente à sela caótica mostrada na Figura 3.2(a). Foi usado o algoritmo descrito na Seção 3.2, com  $n = 10$  e  $\varepsilon = 10^{-3}$ . Pode-se perceber a semelhança entre as duas variedades. As pequenas diferenças se devem ao fato de que apenas uma parte inicial da variedade do ponto fixo foi calculada na Figura 3.2(b). Variedades estáveis de outras órbitas periódicas instáveis presentes neste espaço de fase revelam a mesma semelhança. Na verdade, a variedade estável da sela caótica e a variedade estável de uma dada órbita periódica instável sobre a sela caótica são praticamente indistinguíveis [22,91]. A mesma similaridade pode ser verificada para as variedades instáveis.

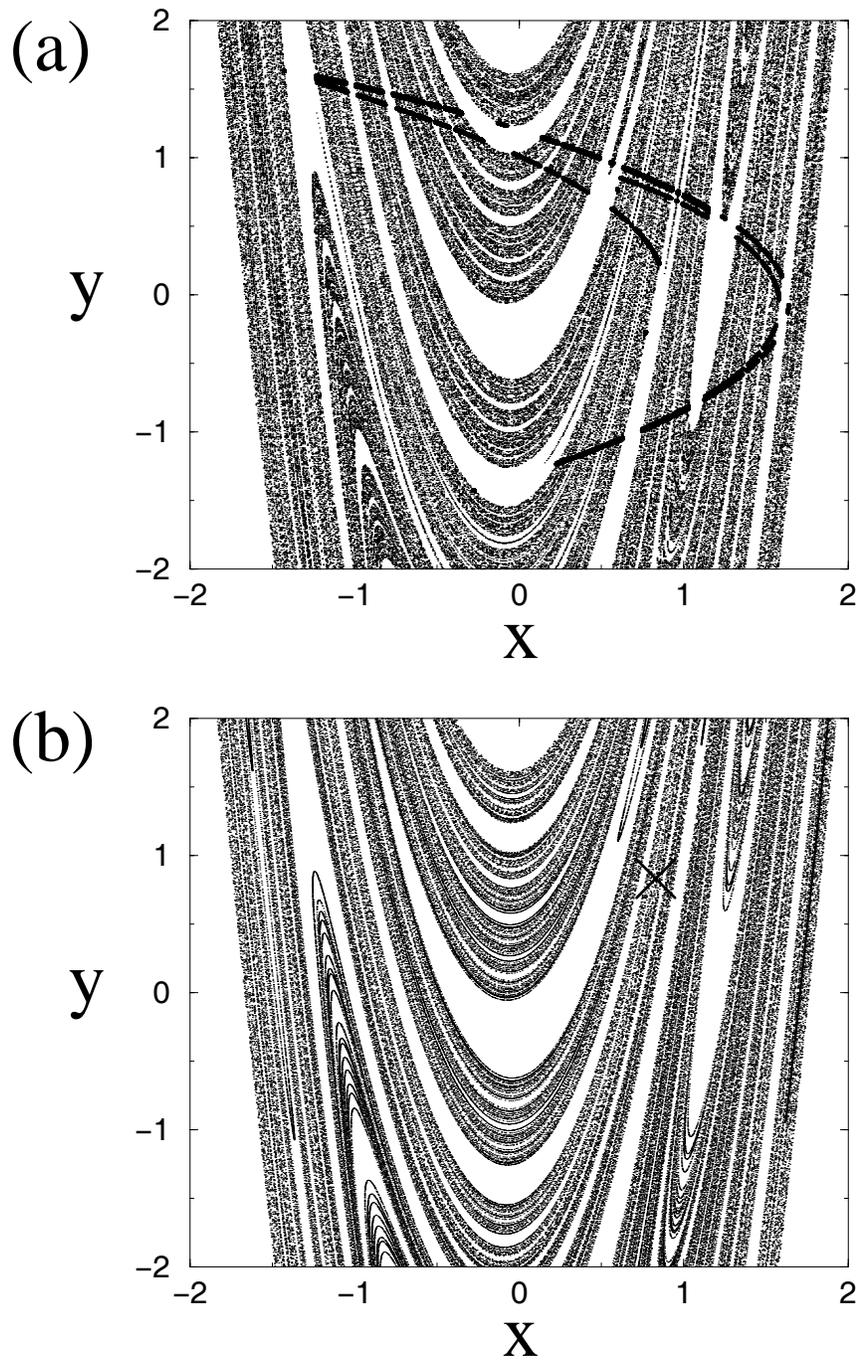


FIGURA 3.2 - (a) Sela caótica e sua variedade estável para o mapa de Henón com  $M = 0.3$  e  $A = 1.2716$ ; (b) segmento da variedade estável de um ponto fixo (cruz) pertencente à sela caótica mostrada em (a).

## CAPÍTULO 4

### CAOS NA EQUAÇÃO SCHRÖDINGER NÃO-LINEAR DERIVATIVA

#### 4.1 Introdução

Neste capítulo é apresentada uma análise numérica de um sistema dinâmico de baixa dimensão para ondas de Alfvén. Seguindo Hada *et al.* [43], Buti [92], e Chian *et al.* [44,45], é adotado um modelo para soluções estacionárias da equação Schrödinger não-linear derivativa (DNLS) em um referencial se movendo na direção de propagação da onda. Este modelo nos permite adquirir um entendimento claro da dinâmica não-linear do sistema, de forma que os resultados obtidos podem ser comparados com a análise de sistemas de alta dimensão, discutidos no próximo capítulo.

#### 4.2 A Equação DNLS

A dinâmica espaço-temporal das ondas de Alfvén não-lineares que se propagam ao longo do campo magnético ambiental na direção  $x$ , com termo fonte e dissipação, é governada pela seguinte forma da equação Schrödinger não-linear derivativa [40,43,44,45,93]

$$\partial_t b + \alpha \partial_x (|b|^2 b) - i(\mu + i\eta) \partial_x^2 b = S(b, x, t), \quad (4.1)$$

onde  $t$  denota o tempo normalizado pelo inverso da frequência íon-ciclotrônica  $w_{ci}^{-1}$ ;  $b = b_y + ib_z$  é o campo magnético complexo transversal da onda, normalizado pelo campo magnético ambiental  $B_0$ ;  $\eta$  é um parâmetro de dissipação;  $\mu = 1/2$ ;  $\alpha = 1/[4(1-\beta)]$  é a constante que caracteriza a força da não-linearidade, com  $\beta = c_S^2/c_A^2$ , sendo  $c_S$  a velocidade acústica e  $c_A$  a velocidade de Alfvén [28]. A fonte externa (onda indutora)  $S(b, x, t) = A \exp(ik\phi)$  é uma onda monocromática com fase  $\phi = x - Vt$ , onde  $V$  é a velocidade da onda (constante). As constantes  $A$  e  $k$  são reais e a fonte

não sofre qualquer tipo de amortecimento ou crescimento.

A equação Schrödinger não-linear derivativa tem sido deduzida por vários autores, usando tanto teoria de fluidos quanto teoria cinética [94,95,96].

É possível reduzir a equação 4.1 a um sistema de equações diferenciais ordinárias representando ondas estacionárias, ao se transformar para um referencial movendo-se com a onda indutora, considerando  $b = b(\phi)$ , onde  $\phi = x - Vt$ , e supondo que no novo referencial  $\partial_t b = 0$ . A primeira integral da equação 4.1 resulta, então, no seguinte sistema [43]

$$\dot{b}_y - \nu \dot{b}_z = \frac{\partial H}{\partial b_z} + a \cos \theta, \quad (4.2)$$

$$\dot{b}_z + \nu \dot{b}_y = -\frac{\partial H}{\partial b_y} + a \sin \theta, \quad (4.3)$$

$$\dot{\theta} = \Omega, \quad (4.4)$$

onde

$$H = \frac{(\mathbf{b}^2 - \mathbf{1})^2}{4} - \frac{\lambda}{2}(\mathbf{b} - \mathbf{e}_y)^2, \quad (4.5)$$

e o ponto representa derivada com relação à fase  $\tau = \alpha b_0^2 \phi / \mu$ ,  $b \rightarrow b/b_0$  (onde  $b_0$  é uma constante de integração),  $\theta = \Omega \phi$ ,  $\Omega = \mu k / (\alpha b_0^2)$ ,  $a = A / (\alpha b_0^2 k)$ ,  $\nu = \eta / \mu$ ,  $\lambda = -1 + V / (\alpha b_0^2)$  e  $\alpha > 0$  (i. e.,  $\beta < 1$ ) foi suposto. Na equação 4.5 foi utilizada a notação vetorial  $\mathbf{b} = (b_y, b_z)$ , e  $\mathbf{e}_y$  representa um vetor unitário na direção do eixo  $y$ .

Será usada a seguinte seção de Poincaré

$$P : [b_y(\tau), b_z(\tau)] \rightarrow [b_y(\tau + T), b_z(\tau + T)], \quad (4.6)$$

onde  $T = 2\pi/\Omega$  é o período da fonte externa  $S$ . Este mapa de Poincaré representa o valor de  $\mathbf{b}$  a cada período  $2\pi/\Omega$ , conforme ilustrado na Figura 4.1. Este

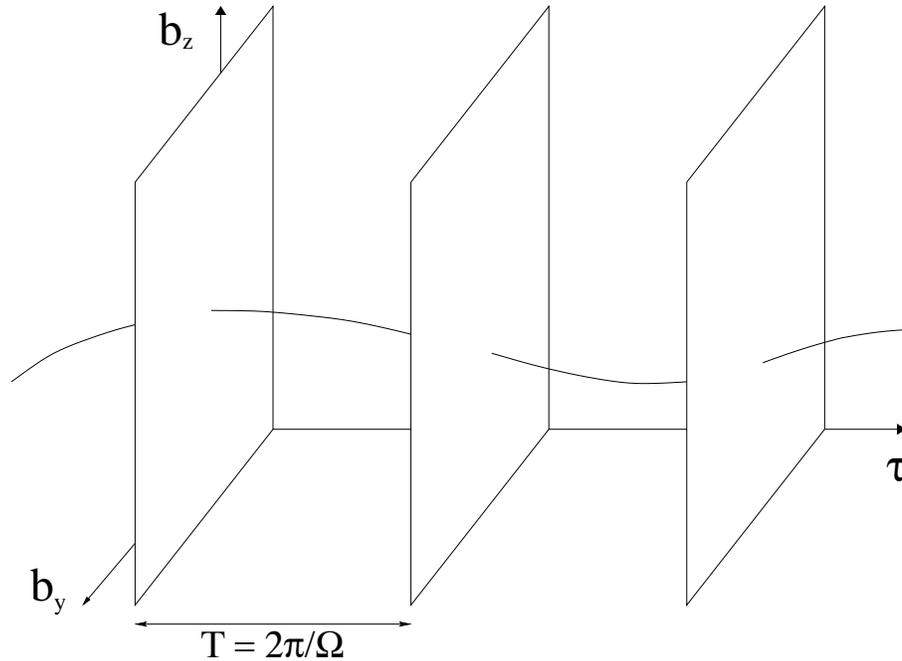


FIGURA 4.1 - Mapa de tempo  $T = 2\pi/\Omega$  gerado pela interseção da órbita com um conjunto de planos transversos ao fluxo.

tipo de projeção definida em intervalos fixos de tempo é conhecida como projeção *estroboscópica* ou mapa de tempo  $T$ . Nos resultados apresentados neste capítulo foi usado o valor  $\tau = 0$  para a fase inicial.

### 4.3 Crises Interior e de Fronteira na Equação DNLS

Crises são fenômenos extremamente comuns em sistemas dinâmicos. Crises têm sido observadas em experimentos com lasers [97], na fita magnetoelástica [98], em pêndulo [99] e em experimentos com gotas [100,101]. Estudos teóricos indicam que crises podem ocorrer em plasmas [7,8,44,45,102]. Nesta seção são caracterizados dois tipos crise na equação DNLS. Uma crise de fronteira, responsável pelo desaparecimento súbito de um atrator caótico, e uma crise interior, responsável pela ampliação descontínua no tamanho de um atrator caótico. Os resultados descritos nesta seção encontram-se também no artigo Borotto et al. [103].

Os resultados a seguir foram obtidos integrando as equações (4.2)-(4.4) fixando os

parâmetros do sistema em  $\Omega = -1$ ,  $\lambda = 1/4$ ,  $\mu = 1/2$  e  $\nu = 0.02$ , e variando somente o parâmetro de controle  $a$ . Para se ter uma visão global da dinâmica do sistema, foi construído um diagrama de bifurcação, mostrado na Figura 4.2(a). Para construir esta figura, inicia-se com  $a = 0.32$  e uma condição inicial aleatória para a variável de estado  $\mathbf{b} = (b_y, b_z)$ . Em seguida são exibidos 300 pontos de Poincaré da trajetória de  $\mathbf{b}$ , após serem descartados os primeiros 300 pontos do transiente inicial. Estes primeiros pontos são descartados para que a órbita tenha tempo de se aproximar do atrator. Após isso,  $a$  é aumentado por um pequeno valor e, usando o valor atual de  $\mathbf{b}$  como condição inicial, são descartados 300 pontos e são exibidos os 300 pontos seguintes de uma nova trajetória. Este processo é repetido até que  $a = 0.3325$ . Fazendo isso pode-se acompanhar a dinâmica sobre um atrator específico à medida em que  $a$  é variado. Se forem usadas condições iniciais aleatórias diferentes para cada valor de  $a$ , é possível que se encontre outros atratores no espaço de fase  $b_y$  vs.  $b_z$ , uma vez que as condições iniciais podem cair em diferentes bacias de atração.

O diagrama de bifurcação da Figura 4.2(a) exhibe uma janela periódica de período três para um atrator chamado de  $A_1$ . A janela periódica inicia com uma bifurcação sela-nó (SNB, do inglês “saddle-node bifurcation”) em  $a \approx 0.321383$ , onde um atrator caótico desaparece e é criado um par de órbitas periódicas de período três. Uma estável e outra instável. A órbita periódica instável é representada pelas linhas tracejadas na Figura 4.2(a). Uma vez que uma órbita periódica de período  $n$  é um ponto fixo da  $n$ -ésima iteração do mapa de Poincaré ( $P^{[n]}$ ), pode-se encontrá-las achando os zeros da função  $F(\mathbf{b}) = P^{[n]}(\mathbf{b}) - \mathbf{b}$ . Foi utilizado o método de Newton (Seção 3.1.2) para encontrar os zeros de  $F$ .

À medida em que se aumenta o valor de  $a$ , a órbita periódica estável sofre uma seqüência de bifurcações de duplicação de período (uma *cascata de duplicação de período*) que continua até a formação de um atrator caótico localizado em três bandas separadas. Em  $a \approx 0.330248$ , o tamanho do atrator caótico aumenta descontinuamente em uma crise interior (IC, do inglês “interior crisis”). Também presente na Figura 4.12(a) está um segundo atrator que coexiste com  $A_1$  para um intervalo bem

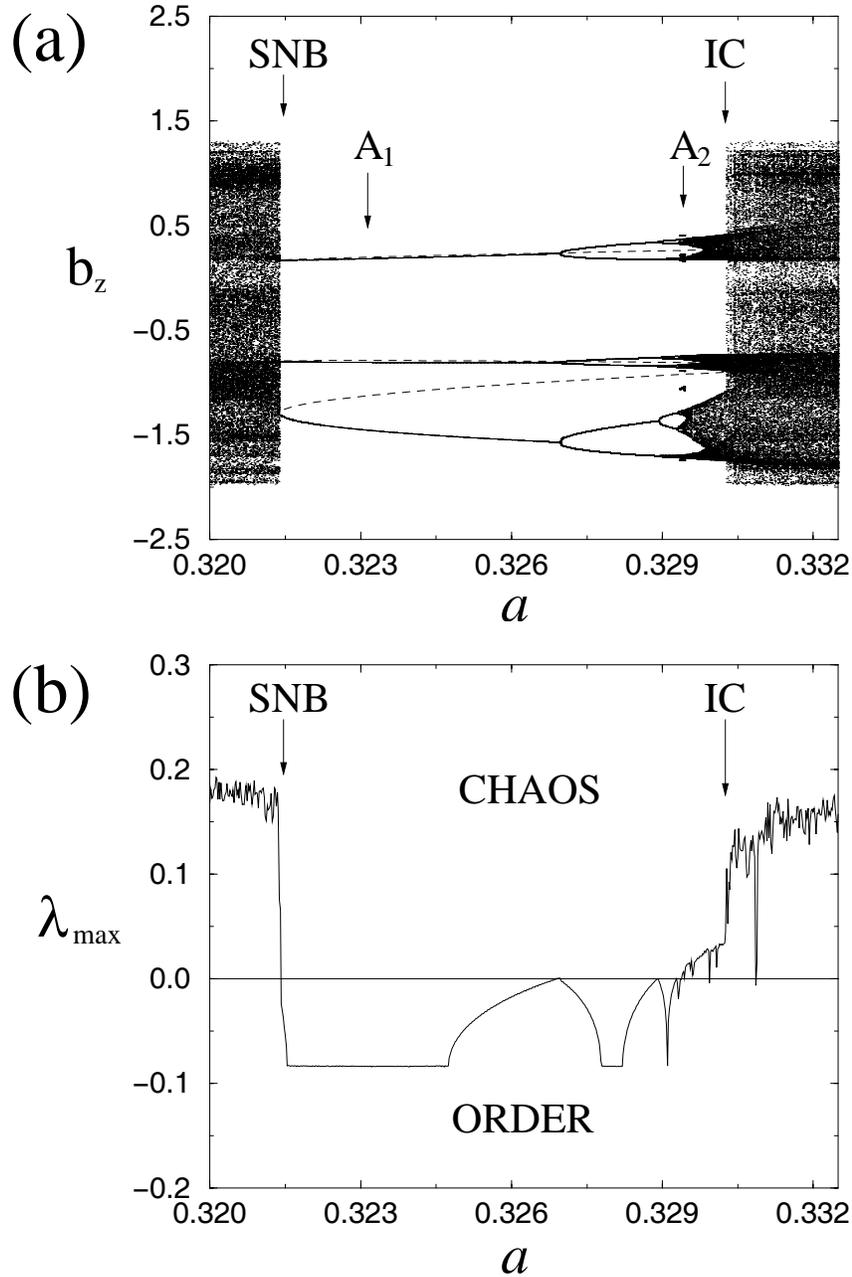


FIGURA 4.2 - (a) Diagrama de bifurcação  $b_z(a)$  para os atratores  $A_1$  (janela periódica p-3) e  $A_2$  (atrator pequeno próximo a IC). SNB denota bifurcação sela-nó, e IC denota crise interior. As linhas tracejadas representam a órbita periódica instável de período três criada em SNB; (b) variação do expoente de Lyapunov máximo  $\lambda_{\max}$  em função de  $a$ .

pequeno de valores de  $a$ . Este atrator é indicado por  $A_2$ , e quase não aparece na Figura 4.2(a), devido à escala utilizada. Nesta seção serão discutidas as alterações sofridas por estes dois atratores. Isto não significa que eles sejam os dois únicos atratores existentes no interior da janela periódica. É possível que haja outros atratores no espaço de fase para alguns intervalos de  $a$ .

Na Figura 4.2(b) é mostrada a variação do expoente de Lyapunov máximo  $\lambda_{\max}$  de  $A_1$  em função de  $a$ , obtido com o algoritmo apresentado em Wolf *et al.* [62]. A linha horizontal é a linha  $\lambda_{\max} = 0$ . Valores positivos de  $\lambda_{\max}$  indicam que o atrator é caótico e valores negativos indicam um atrator periódico (ordem). Nesta figura foi desprezado o expoente de Lyapunov na direção tangente ao fluxo, que é sempre zero. Nas bifurcações de duplicação de período o maior expoente de Lyapunov é zero. Em SNB o sistema subitamente muda de comportamento caótico para ordenado, e em IC, o aumento do tamanho do atrator reflete-se em um aumento descontínuo no valor de  $\lambda_{\max}$ , e o sistema torna-se fortemente caótico.

Próximo de IC, para  $0.329350 \leq a \leq 0.329437$ , ocorre a coexistência dos atratores  $A_1$  e  $A_2$ , e cada um deles atrai um conjunto diferente de condições iniciais no espaço de fase. A Figura 4.3 exhibe as bacias de atração para  $A_1$  e  $A_2$  em  $a = 0.329437$ . Para encontrar as bacias de atração foi definida uma grade de  $720 \times 720$  pontos no espaço de fase, e cada ponto da grade é iterado até que convirja para um dos atratores. As condições iniciais recebem uma cor diferente de acordo com o atrator para o qual elas convergem. Se convergirem para  $A_1$ , recebem a cor branca, se convergirem para  $A_2$  recebem a cor preta. Pode-se notar que a maioria das condições iniciais são atraídas para  $A_1$ .

O atrator  $A_2$  é criado em uma bifurcação sela-nó em  $a \approx 0.329350$ , onde um par de órbitas periódicas estável/instável de período nove são criadas. A órbita periódica instável de período nove será responsável pela crise de fronteira de  $A_2$  e pela crise interior de  $A_1$ . Na Figura 4.4 são mostradas projeções bidimensionais ( $b_y, b_z$ ) das trajetórias para as órbitas periódicas instáveis criadas nas bifurcações sela-nó discutidas nesta seção. As cruces representam os respectivos pontos de sela gera-

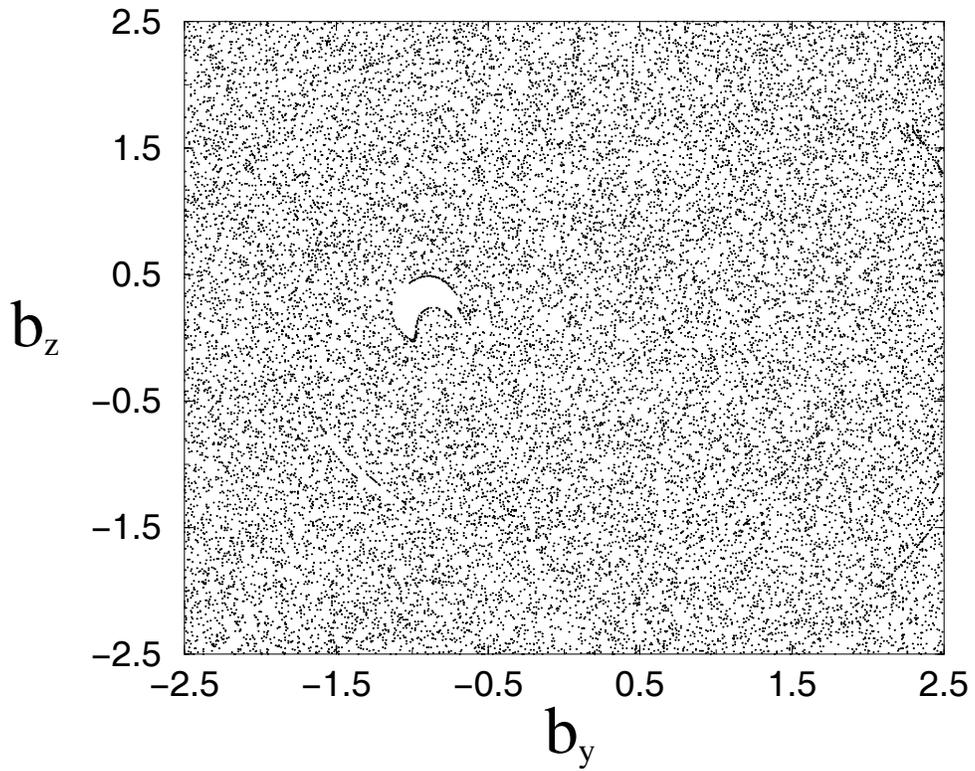


FIGURA 4.3 - Bacias de atração para os atratores  $A_1$  e  $A_2$  em  $a = 0.329437$ . Regiões brancas convergem para  $A_1$  e regiões pretas convergem para  $A_2$ . Os atratores não são mostrados nesta figura.

dos pela projeção das órbitas nas seções de Poincaré. A Figura 4.4(a) mostra a órbita de período três logo após a sua criação em uma bifurcação sela-nó de  $A_1$  em  $a \approx 0.321383$ , e a Figura 4.4(b) mostra a órbita de período nove logo após sua criação em uma bifurcação sela-nó de  $A_2$  em  $a = 0.329350$ .

Para estudar o papel da órbita periódica instável p-9 na dinâmica de  $A_2$ , é construído o diagrama de bifurcação de  $A_2$ . O diagrama de bifurcação mostrado na Figura 4.5(a) mostra a criação de  $A_2$  como um atrator periódico de período nove em SNB. O atrator periódico sofre uma cascata de duplicação de período que leva a um atrator caótico e, em  $a \approx 0.329437$ , o atrator desaparece abruptamente em uma crise de fronteira (BC, do inglês “boundary crisis”). Após BC, trajetórias iniciadas na região antes ocupada pelo atrator caótico  $A_2$  permanecem naquela região durante um tempo transiente, após o qual as órbitas convergem para o atrator  $A_1$ . A Figura 4.5(b) mostra uma ampliação da parte superior de  $A_2$ . Na mesma figura é exibida a evolução de três dos nove pontos da órbita instável p-9 criada em SNB. A destruição de  $A_2$  em BC coincide com sua colisão com a órbita instável p-9. Esta órbita é robusta à crise, e persiste após a destruição de  $A_2$ . A Figura 4.5(c) mostra o maior expoente de Lyapunov para  $A_2$  em função de  $a$ . O diagrama de Lyapunov reflete o diagrama de bifurcação nas Figuras 4.5(a) e 4.5(b).

A Figura 4.5 mostra somente uma projeção unidimensional do espaço de fase. Para caracterizar a colisão entre  $A_2$  e a órbita instável p-9, é necessário examinar a dinâmica em duas dimensões. A Figura 4.6 mostra os pontos de Poincaré do atrator caótico  $A_2$  em  $a = 0.329437$ . Neste ponto, logo antes da crise de fronteira,  $A_2$  é composto de nove pequenas bandas. Na Figura 4.7(a) é mostrada a banda superior do atrator caótico (CA, do inglês “chaotic attractor”) antes da crise de fronteira, em  $a = 0.32942$ , na região do espaço de fase indicada por um retângulo na Figura 4.6. A cruz representa um dos pontos de sela da órbita instável p-9, e as linhas finas são segmentos de sua variedade estável (SM, “stable manifold”). As variedades foram obtidas pelo algoritmo YKY, descrito na Seção 3.2. A Figura 4.7(b) mostra que na crise o atrator caótico colide com o ponto de sela e com sua variedade estável. A

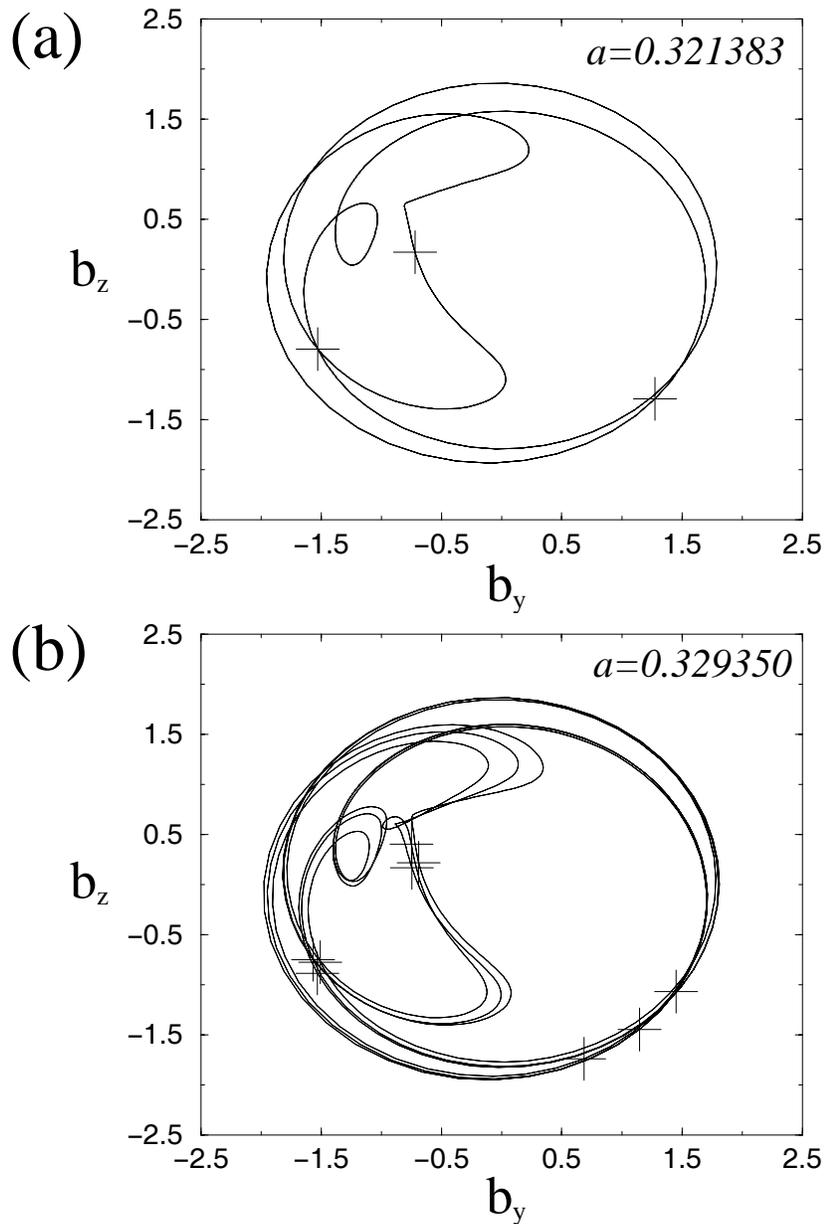


FIGURA 4.4 - Trajetórias no espaço de fase e pontos de Poincaré para (a) a órbita periódica instável de período três em  $a = 0.321383$ , logo após sua criação em uma bifurcação sela-nó de  $A_1$ ; (b) a órbita periódica instável de período nove em  $a = 0.329350$ , logo após sua criação em uma bifurcação sela-nó de  $A_2$ .

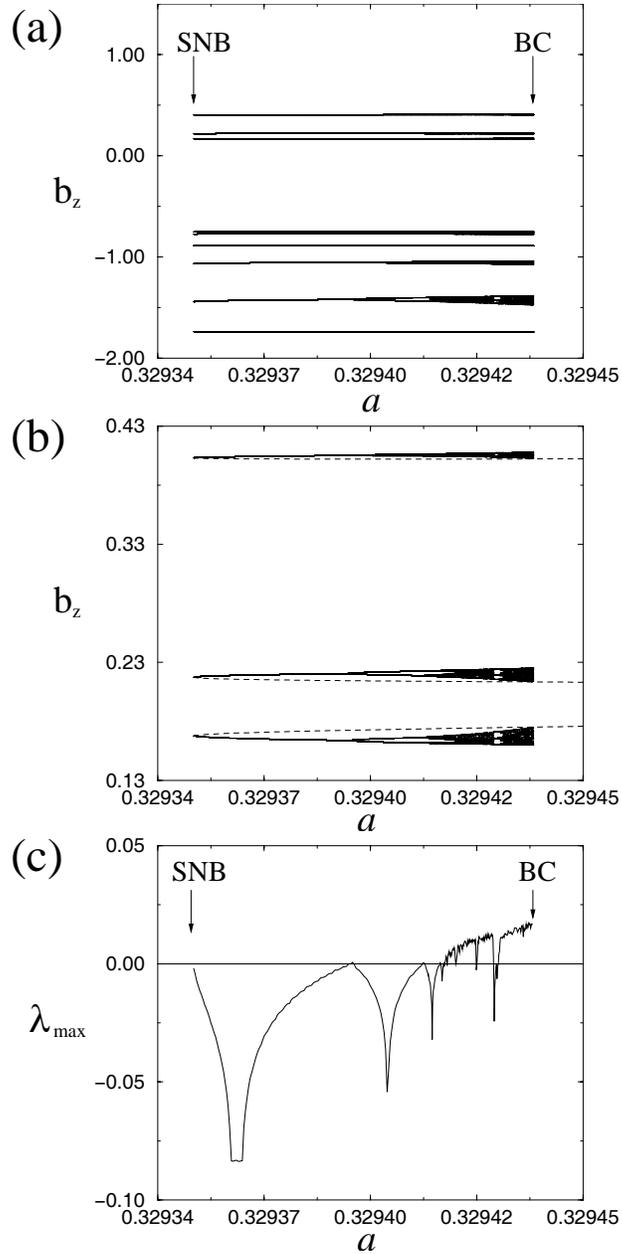


FIGURA 4.5 - (a) Diagrama de bifurcação  $b_z(a)$  para o atrator  $A_2$ . SNB denota bifurcação sela-nó e BC denota crise de fronteira; (b) uma ampliação dos três ramos superiores do diagrama de bifurcação em (a) mostrando a evolução de três dos nove pontos de Poincaré da órbita periódica instável  $p-9$  criada em SNB (linhas tracejadas); (c) variação do expoente de Lyapunov máximo  $\lambda_{\max}(a)$  para o atrator  $A_2$ .

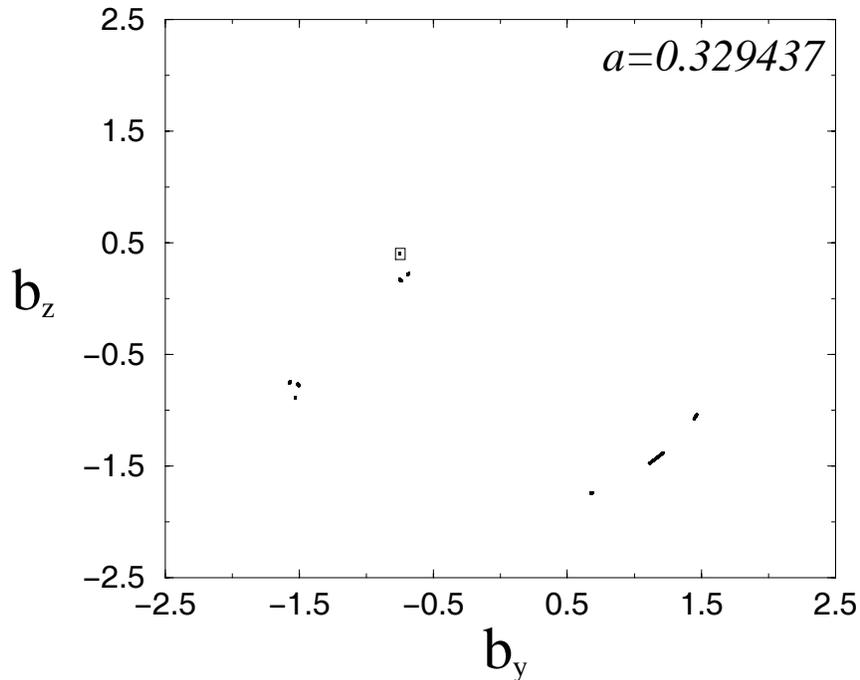


FIGURA 4.6 - Pontos de Poincaré do atrator caótico  $A_2$  em  $a = 0.329437$ , logo antes da crise de fronteira.

variedade estável é a fronteira entre as bacias de atração de  $A_1$  e  $A_2$ . Neste ponto, o atrator caótico é o fechamento de um dos ramos da variedade instável do ponto de sela. Logo, a Figura 4.7(b) mostra a tangência homoclínica entre as variedades estável e instável da órbita instável p-9. Após a crise de fronteira, o atrator  $A_2$  e sua bacia de atração (a área preta na Figura 4.3) são destruídos.

Depois da colisão com  $A_2$ , a órbita instável p-9 participa da crise interior do atrator  $A_1$ . Na Figura 4.8 são exibidos os pontos de Poincaré para  $A_1$  logo antes (Figura 4.8(a), em  $a = 0.330248$ ) e logo depois da crise (Figura 4.8(b), em  $a = 0.330249$ ). Antes da crise,  $A_1$  é um atrator caótico composto de três bandas. A crise interior gera um atrator caótico grande, composto por uma única banda. Esta expansão ocorre após a colisão de  $A_1$  com a órbita instável p-9, mostrada na Figura 4.9. Nesta figura é mostrado uma região do espaço de fase dentro do retângulo ocupado pela banda superior de  $A_1$  na Figura 4.8(a). As cruzes representam os três pontos de Poincaré associados com o ramo superior da órbita instável p-9, e as linhas finas

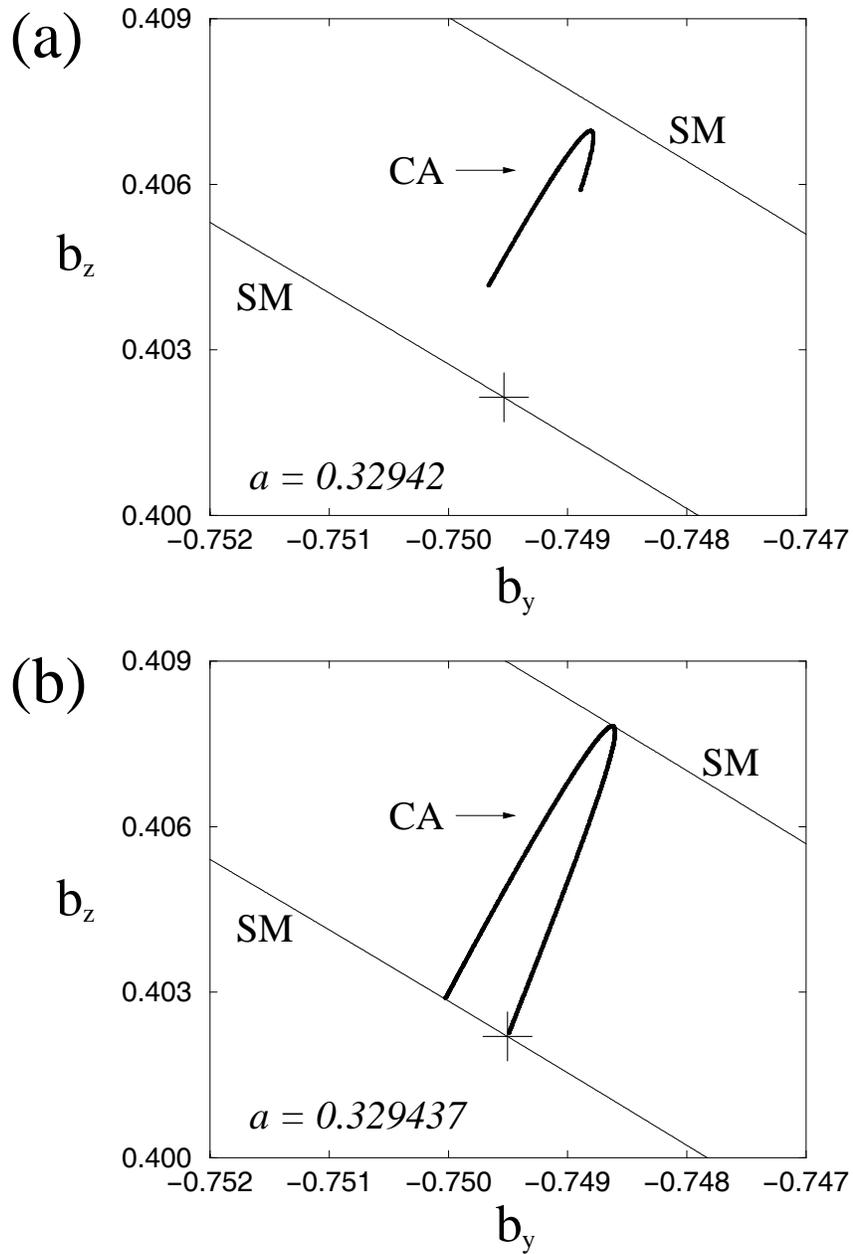


FIGURA 4.7 - Pontos de Poincaré do atrator caótico  $A_2$  (CA) em uma ampliação da região retangular na Figura 4.6 para (a)  $a = 0.32942$ , antes da crise de fronteira. A cruz denota o ponto de Poincaré superior da órbita periódica instável de período nove e as linhas finas representam sua variedade estável (SM); (b) tangência homoclínica de CA com a variedade estável SM em  $a = 0.329437$ , logo antes da crise de fronteira.

denotam sua variedade estável (SM). Na Figura 4.9(a), em  $a = 0.33$ , o atrator caótico (CA) ainda não colidiu com a órbita p-9. Em  $a \approx 0.330248$  (marcado como IC na Figura 4.2), a crise interior ocorre via uma tangência homoclínica, como mostrado na Figura 4.9(b). Depois da tangência, o atrator caótico não está mais restrito à bandas pequenas, e as órbitas podem cruzar a variedade estável da órbita p-9 e têm acesso a uma região maior no espaço de fase, como mostrado na Figura 4.9(c).

Apesar de que as tangências homoclínicas só foram mostradas para as bandas superiores dos atratores  $A_1$  and  $A_2$ , as tangências podem ser vistas nas outras bandas, também. A órbita instável de período nove, responsável por ambas as crises, é chamada de *órbita periódica mediadora* [20,67,74].

A dinâmica para as duas crises pode ser resumida pelo diagrama de crise, mostrado na Figura 4.10. Neste diagrama, o parâmetro  $a$  aumenta verticalmente, um atrator caótico é representado por uma linha sinuosa, uma órbita periódica instável é representada por uma linha tracejada e um atrator periódico por uma linha sólida. Primeiramente, um atrator caótico cede lugar a um atrator periódico  $A_1$  depois de uma bifurcação sela-nó. Ao mesmo tempo, uma órbita periódica instável é criada. Em algum ponto, uma bifurcação sela-nó gera um atrator periódico  $A_2$  junto com uma órbita periódica instável (a órbita periódica mediadora). À medida que  $a$  aumenta, tanto  $A_1$  como  $A_2$  tornam-se caóticos e, em  $BC$ , a órbita periódica mediadora colide com  $A_2$ , após o que o atrator é destruído. A órbita mediadora “sobrevive” à crise de fronteira e colide com o atrator caótico  $A_2$  em IC. Após a colisão,  $A_2$  é subitamente aumentado.

A Figura 4.11 ilustra o que ocorre com órbitas sobre um atrator caótico após uma tangência homoclínica. Seja  $a_c$  o valor de  $a$  para o qual ocorre uma crise interior ou de fronteira, e seja  $B$  a órbita mediadora. Para  $a > a_c$ , após a crise, a variedade instável de  $B$  na Figura 4.11 atravessa para o outro lado da variedade estável de  $B$ . Uma órbita pode ficar um longo tempo sobre a variedade instável de  $B$ , na região do atrator pré-crise, após o qual ela pode ser mapeada para a porção da variedade

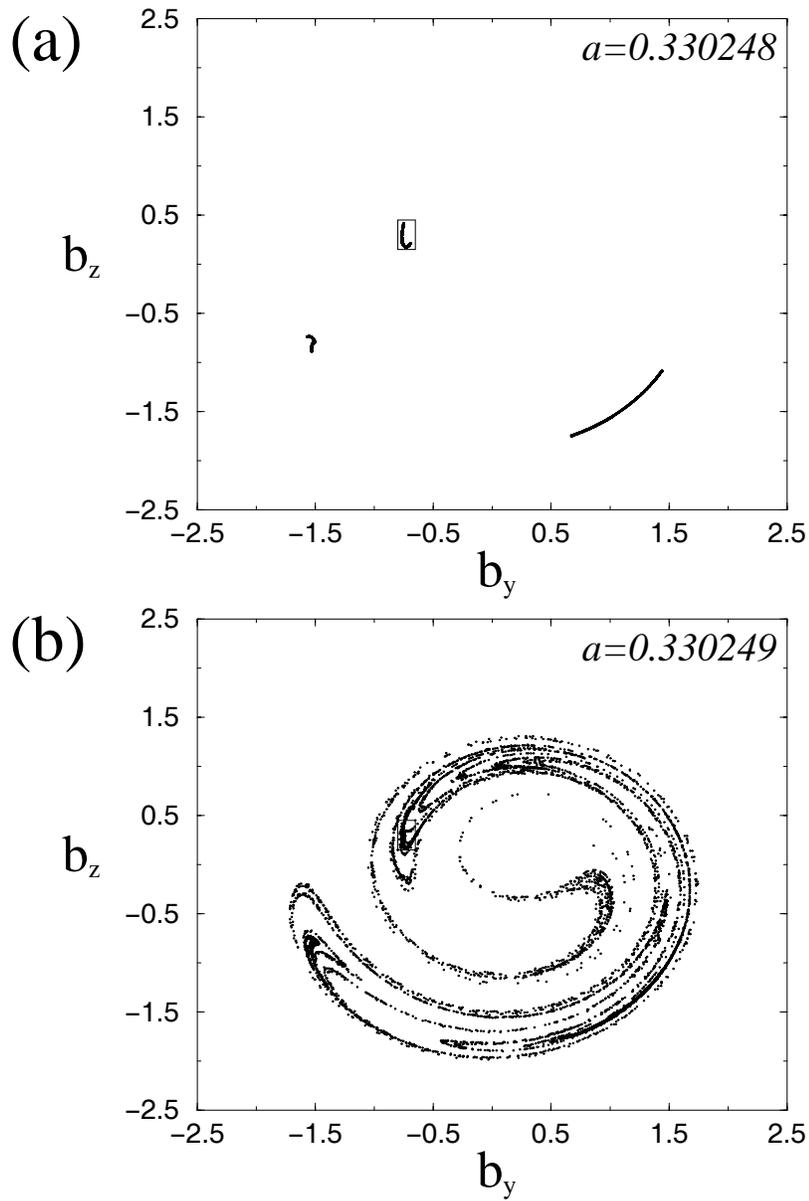


FIGURA 4.8 - Pontos de Poincaré do atrator caótico  $A_1$  em (a)  $a = 0.330248$ , logo antes da crise interior; (b) em  $a = 0.330249$ , logo após a crise interior.

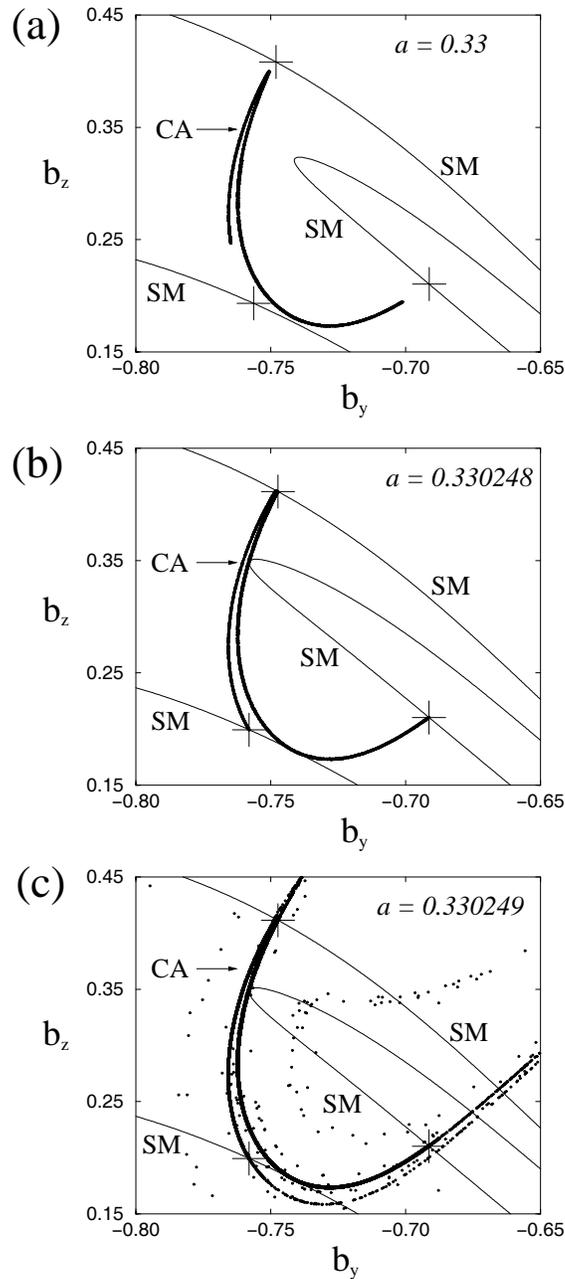


FIGURA 4.9 - Ampliações da região retangular indicada na Figura 4.8, mostrando o atrator caótico (a) em  $a = 0.33$ , antes da crise interior (IC), as cruces representam três dos pontos de Poincaré da órbita periódica instável de período-nove e as linhas finas representam sua variedade estável (SM); (b) tangência homoclínica de CA com a variedade estável em  $a = 0.330248$ , logo antes de IC; (c) situação logo após IC, em  $a = 0.330249$ .

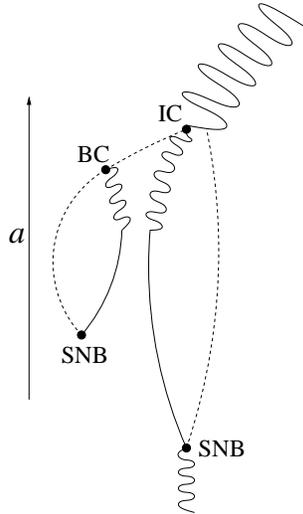


FIGURA 4.10 - Diagrama de crise para os atratores  $A_1$  e  $A_2$ . SNB denota bifurcação sela-nó, BC denota crise de fronteira e IC denota crise interior. Linhas tracejadas representam órbitas periódicas instáveis, curvas contínuas representam atratores periódicos e linhas sinuosas representam atratores caóticos.

instável que atravessou para o outro lado da variedade estável de  $B$  (ponto 1 na Figura 4.11). Logo após a crise ( $r = a - a_c \ll 1$  e  $r > 0$ ), a localização da órbita neste instante está próxima da variedade estável de  $B$ . Em iterações subsequentes, este ponto é atraído para  $B$  ao longo de sua variedade estável ( $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow \dots$  na Figura 4.11) e depois repellido de  $B$  ao longo do segmento de sua variedade instável que aponta para longe da região anteriormente ocupada pelo atrator [73]. No caso de uma crise de fronteira, a variedade estável é a fronteira entre duas bacias de atração, e a órbita converge para o segundo atrator após cruzar a fronteira. Em uma crise interior, após atravessar a variedade estável, a órbita inicia uma “excursão” ao longo do ramo esquerdo da variedade instável de  $B$ . A expansão do atrator ocorre porque este segundo ramo da variedade instável torna-se disponível à órbita caótica após a crise. Depois de um certo tempo, a órbita retorna à região do antigo atrator, permanecendo lá por mais um longo tempo, seguido de mais uma excursão ou “estouro” na nova região. Este processo continua repetindo-se intermitentemente,

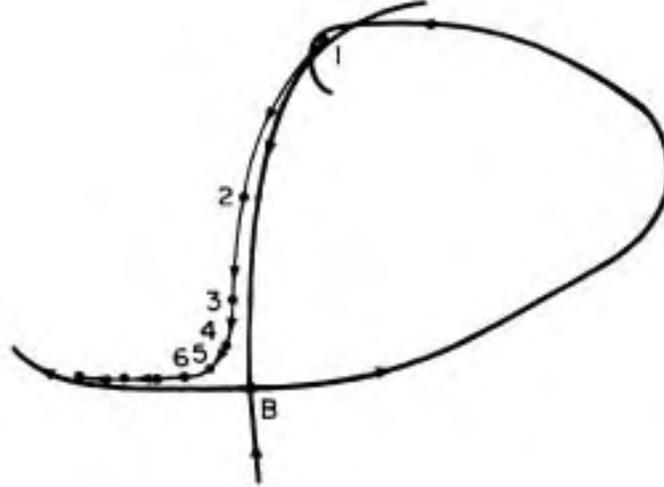


FIGURA 4.11 - Representação esquemática de uma órbita após um cruzamento homoclínico.

FONTE: Adaptada de [73] (p. 5369).

sendo chamado de *intermitência induzida pela crise* [20,21,44,73].

#### 4.4 Selas Caóticas na Equação DNLS

Nesta seção é analisada a participação de selas caóticas no surgimento de caos próximo a uma bifurcação sela-nó e em uma crise interior na equação DNLS. Os resultados, encontrados nas referências [104,105], foram obtidos integrando o sistema 4.2-4.4 variando o parâmetro de dissipação  $\nu$  e mantendo os demais parâmetros constantes, com  $a = 0.3$ ,  $\Omega = -1$ ,  $\lambda = 1/4$  e  $\mu = 1/2$ .

A Figura 4.12(a) mostra a variação de um conjunto atrator (preto) e de uma sela caótica (cinza), à medida em que é variado o parâmetro de controle  $\nu$ . A variação do atrator é representada pelo diagrama de bifurcação contendo uma janela periódica de período 2. SNB indica uma bifurcação sela-nó e IC indica uma crise interior. A bifurcação sela-nó ocorre em  $\nu_{SNB} \approx 0.07738$ , e a crise interior ocorre em  $\nu_{IC} \approx 0.06212$ . A linha tracejada representa a órbita periódica instável criada na bifurcação sela-nó. Dentro da janela periódica, trajetórias iniciadas aleatoriamente geralmente

apresentam comportamento caótico por um tempo finito (transiente) enquanto se encontram na vizinhança da sela caótica, após o qual elas convergem para o atrator. Quanto mais próxima a condição inicial estiver da variedade estável da sela caótica, mais longo o tempo de transiente [13,14]. Para a obtenção das selas caóticas foi utilizado o algoritmo “PIM tripple”, descrito na Seção 3.3.2. Foram calculados, para cada valor do parâmetro de controle, 600 pontos de Poincaré de uma órbita numérica próxima à sela caótica, com  $\delta = 10^{-6}$ .

A bifurcação sela-nó marca o início da janela periódica. Para  $\nu > \nu_{SNB}$ , antes da bifurcação sela-nó, condições iniciais são, em geral, atraídas para um atrator caótico. Após a bifurcação sela-nó, o atrator caótico não existe mais. Uma parte das órbitas periódicas instáveis que pertenciam ao atrator caótico fazem parte da sela caótica [67,20,75]. Logo após a bifurcação sela-nó, em  $\nu < \nu_{SNB}$ , o atrator é uma órbita periódica estável de período 2. A órbita periódica instável de período 2, criada junto com o atrator periódico na bifurcação sela-nó, pertence à sela caótica. À medida em que o parâmetro de controle é diminuído, a órbita estável sofre uma cascata de duplicação de período, que leva à criação de um atrator caótico pequeno, localizado em duas bandas separadas no diagrama de bifurcação. Em  $\nu_{IC}$ , o atrator caótico colide com a órbita periódica instável de período 2, criada na bifurcação sela-nó, em  $\nu_{SNB}$ . Esta é a órbita mediadora da crise. A colisão gera uma crise interior, que marca o fim da janela periódica e o surgimento do atrator caótico forte. O atrator pequeno que existia antes da crise perde sua estabilidade e em seu lugar surge uma nova sela caótica. A Figura 4.12(b) ilustra a estrutura desta sela após a crise, onde é mostrado o atrator (preto) da Figura 4.12(a) antes da crise interior e a nova sela caótica (cinza), surgida após a crise interior. É importante enfatizar que, apesar de que na Figura 4.12(a) a sela caótica é exibida apenas no interior da janela periódica (entre SNB e IC), ela está presente em todo o diagrama de bifurcação. Para  $\nu < \nu_{IC}$  e  $\nu > \nu_{SNB}$  a sela caótica é parte do atrator caótico.

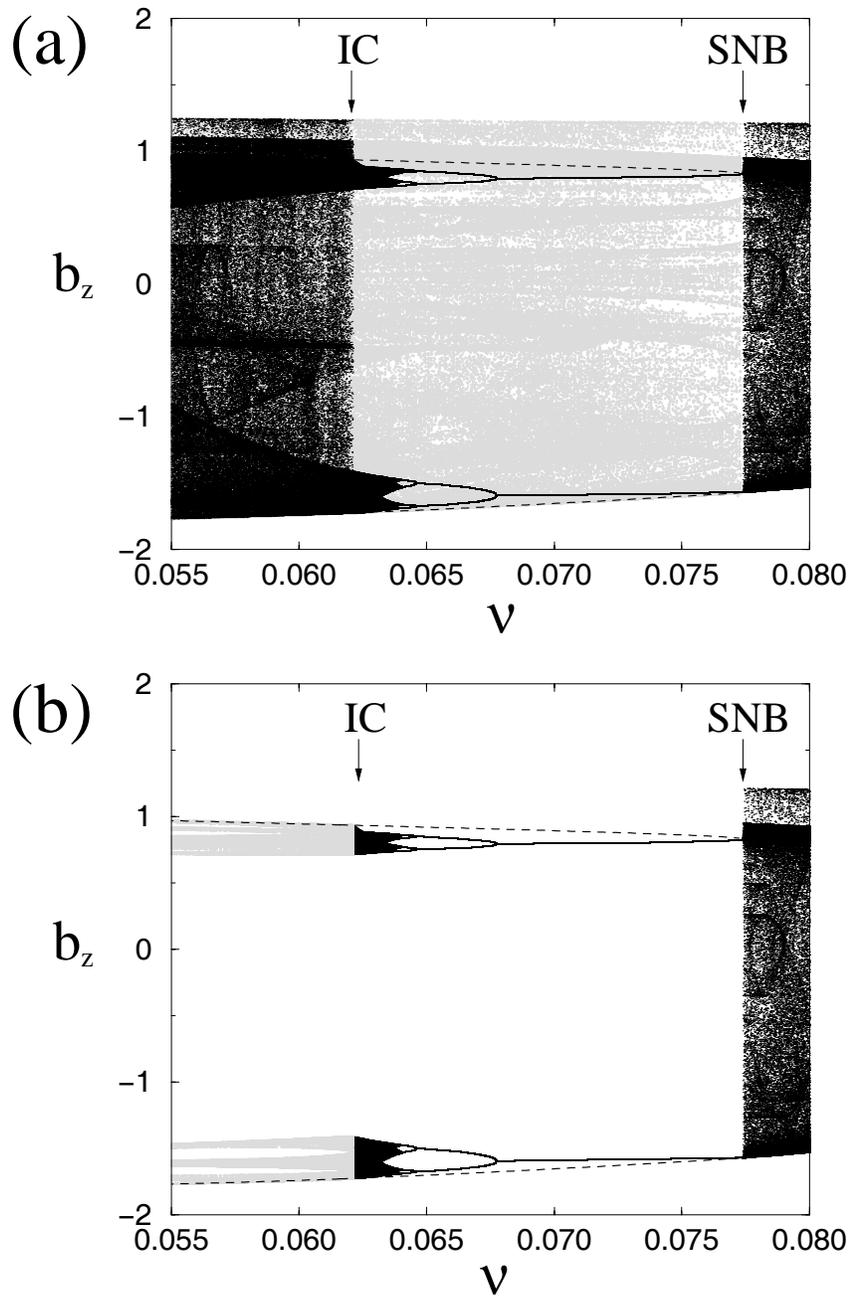


FIGURA 4.12 - (a) Variação da sela caótica (cinza) em função de  $\nu$  superposta pelo diagrama de bifurcação do atrator (preto) em uma janela periódica de período 2. IC denota crise interior e SNB denota bifurcação sela-nó. As linhas tracejadas denotam a órbita periódica instável de período 2. (b) Os mesmos conjunto que em (a), mas mostrando a conversão do atrator caótico em uma sela caótica após IC.

#### 4.4.1 Bifurcação Sela-Nó

Antes de detalhar o que ocorre após a crise interior, será focalizada a dinâmica próxima à bifurcação sela-nó. A Figura 4.13 mostra a estrutura de diferentes conjuntos invariantes presentes no espaço de fase para valores de  $\nu$  próximos à bifurcação sela-nó, indicada como SNB na Figura 4.12. A Figura 4.13(a) mostra a sela caótica (cinza) que coexiste com o atrator periódico de período 2 (cruz) logo após a bifurcação sela-nó, em  $\nu = 0.07738 < \nu_{SNB}$ . Esta sela caótica é rotulada de SCS (“Surrounding Chaotic Saddle”), por encontrar-se na região ao redor do atrator. Para a geração desta figura, foi encontrada uma órbita de 300000 pontos sobre a sela caótica usando o algoritmo PIM tripple, com  $\delta = 10^{-6}$ . A região de restrição  $R$  é dada pelo retângulo definido por  $\{(b_y, b_z) : -2 \leq b_y \leq 2, -2 \leq b_z \leq 2\}$ , com exceção de dois círculos de raio 0.01 centrados nos pontos do atrator de período 2. O algoritmo PIM triple considera que uma órbita escapou da região de restrição se sair do retângulo ou entrar em um dos círculos. A Figura 4.13(b) mostra a variedade instável de SCS em  $\nu = 0.07738$ , encontrada com o algoritmo “sprinkler”. Se o valor do parâmetro  $\nu$  for aumentado além de  $\nu_{SNB}$  o atrator periódico desaparece e um atrator caótico aparece. A Figura 4.13(c) exhibe a sela caótica (CS) pré-SNB em  $\nu = 0.078 > \nu_{SNB}$ , mostrando que a sela caótica S na Figura 4.13(a) é robusta à bifurcação sela-nó. O atrator caótico coexistente (CA) é mostrado na Figura 4.13(d).

Pode-se notar na 4.13(a) que a sela caótica possui um conjunto de espaços “vazios” (“gaps”) ao longo de sua direção instável. Estes espaços vazios são regiões do espaço de fase que não contêm nenhum ponto recorrente<sup>1</sup>, e estão presentes na sela caótica durante toda a janela periódica. A razão pela qual os vazios não aparecem na Figura 4.12(a) é devido à projeção unidimensional ( $b_z$ ) do espaço de fase bidimensional ( $b_y, b_z$ ).

---

<sup>1</sup>Um ponto  $x$  de um mapa  $f$  é um ponto recorrente se para toda vizinhança  $W$  de  $x$ , existe uma iteração  $k > 0$  tal que  $f^{[k]}(x) \in W$ . Ou seja, iterações de  $x$  retornam arbitrariamente próximo a  $x$  [75].

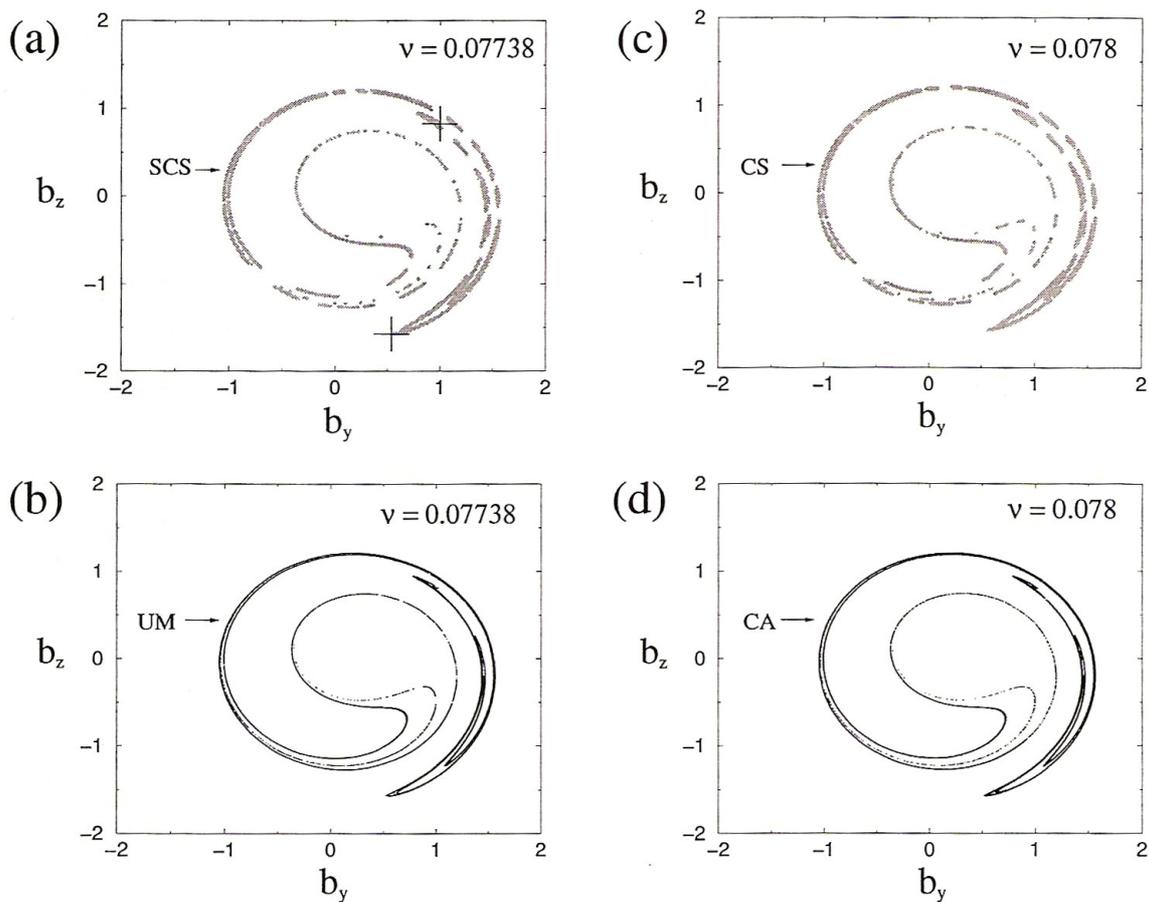


Fig. 4.13 - (a) A atrator p-2 (cruzes) e a sela caótica SCS (cinza) logo após a bifurcação sela-nó, em  $\nu = 0.07738$ ; (b) a variedade instável (UM) de SCS em  $\nu = 0.07738$ ; (d) a sela caótica (CS) antes da bifurcação sela-nó, em  $\nu = 0.078$  e (b) o atrator caótico (CA) em  $\nu = 0.078$ .

Se o parâmetro de controle for aumentado para  $\nu = 0.078 > \nu_{SNB}$ , o atrator periódico desaparece e um atrator caótico é criado (Figura 4.13(d)). Uma comparação de CA na Figura 4.13(d) com CS na Figura 4.13(c) indica que os vazios na sela caótica são completamente preenchidos por pontos recorrentes criados na bifurcação sela-nó. Os espaços vazios da sela caótica são densamente preenchidos por novos pontos recorrentes, criados na bifurcação sela-nó, num evento chamado de *explosão* (“explosion” [75]). Uma explosão significa uma mudança descontínua que ocorre no conjunto de pontos recorrentes à medida em que se varia um parâmetro de controle do sistema. Em um dado valor do parâmetro, ocorre a criação súbita de pontos recorrentes que estão a uma distância não-nula de qualquer conjunto original de pontos recorrentes, o que resulta em preenchimento de vazios (“gap filling”).

A Figura 4.14 mostra uma sobreposição do atrator p-2 (cruzes), a sela caótica S (verde) e suas variedades estável (azul) e instável (vermelho), logo após a bifurcação sela-nó, em  $\nu = 0.07738$ . Como esperado, a sela caótica (verde) encontra-se nos pontos de intersecção entre suas variedades estável (azul) e instável (vermelho). Percebe-se que os vazios na sela-caótica estão relacionados com a estrutura de suas variedades. Estes vazios são os espaços entre os pontos de intersecção entre as duas variedades ao longo da direção instável. A Figura 4.14 pode dar a impressão de que a variedade estável da sela caótica preenche a maior parte do espaço de fase, e que, portanto, a maioria das condições iniciais converge para a sela caótica. Esta é, entretanto, uma falsa impressão causada pelo tamanho finito dos pontos azuis usados para imprimir a variedade estável. Na verdade, por ser um conjunto de medida zero, se tivessem sido usados pontos com tamanho infinitésimo, a variedade estável seria invisível, e apenas a bacia de atração do atrator p-2 (região branca) seria visível.

As variedades estável e instável da sela caótica na Figura 4.14 foram obtidas por meio do algoritmo “sprinkler”, com uma grade de  $1000 \times 1000$  condições iniciais e a mesma definição para a região de restrição usada na Figura 4.13(a). 4.13(a). Para a determinação do tempo médio de transiente,  $\tau_{SNB}$ , necessário para obter as

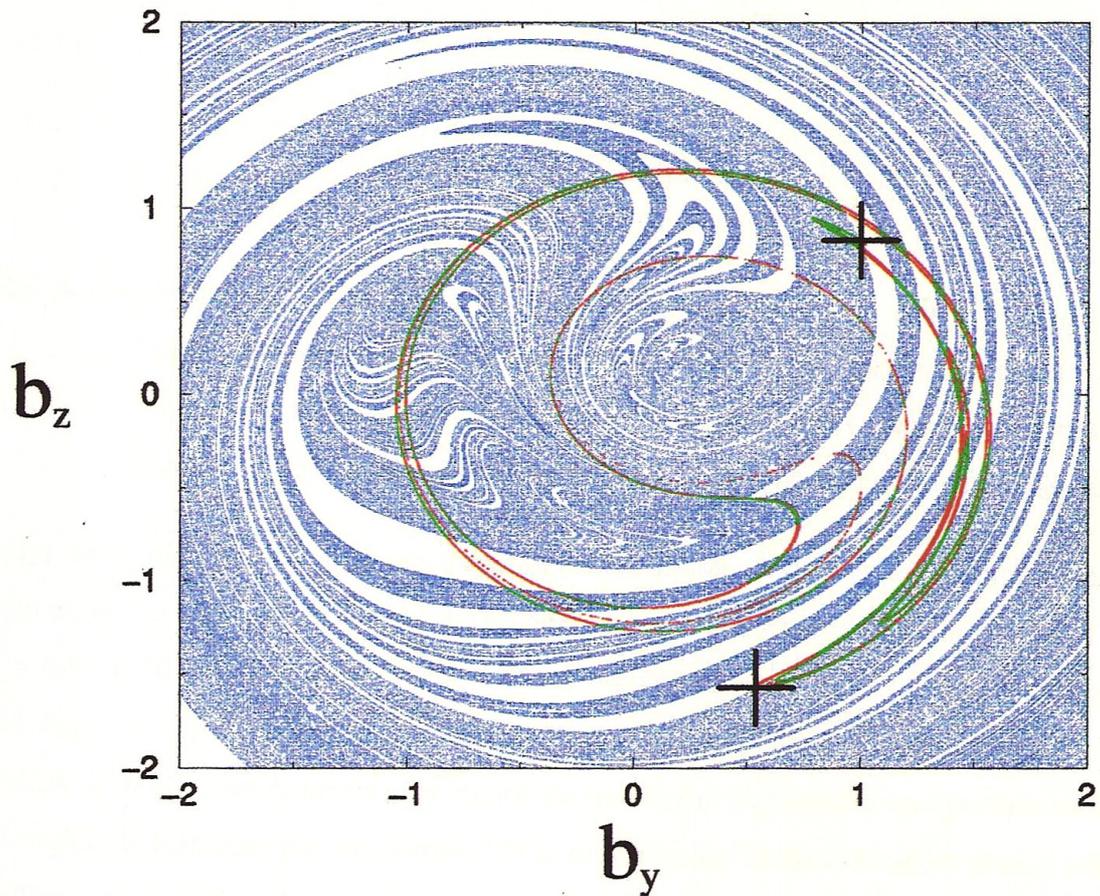


Fig. 4.14 - Sobreposição do atrator p-2 (cruzes), a sela caótica S (verde) e suas variedades estável (azul) e instável (vermelho), logo após a bifurcação sela-nó, em  $\nu = 0.07738$ . Note-se que a região verde (sela caótica) encontra-se na intersecção das regiões azul (variedade estável) e vermelha (variedade instável). A região puramente vermelha corresponde aos vazios da sela caótica.

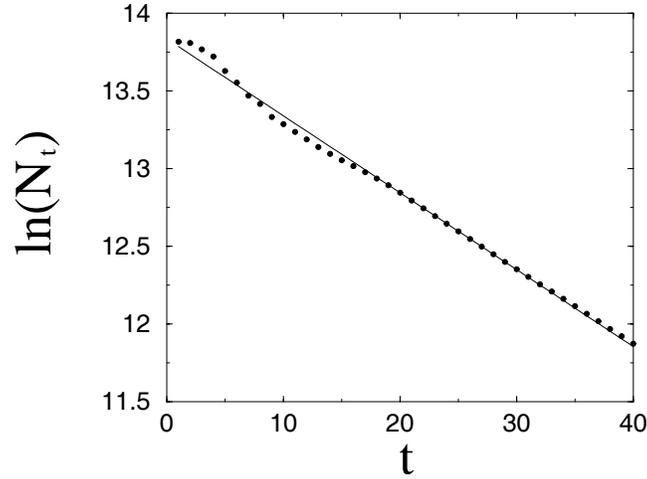


FIGURA 4.15 - Estimação do tempo médio de transiente para  $\nu = 0.07738$ .  $N_0$  é o número de condições iniciais e  $N_t$  é o número de trajetórias dentro da região de restrição no instante  $t$ . A reta foi obtida com uma regressão linear. O tempo médio de transiente é o inverso do coeficiente angular.

variedades da sela caótica, foi utilizado o método descrito em [13,14,82]. É feito um gráfico com os valores de  $\ln N_t$  vs.  $t$ , onde  $N_t$  é o número de pontos que permanecem em  $R$  após um tempo  $t$ , tendo sido usadas  $N_0 = 10^6$  condições iniciais. O gráfico obtido é mostrado na Figura 4.15.

Os pontos na Figura 4.15 representam os valores encontrados numericamente e a linha reta, obtida por meio de uma regressão linear, indica um decaimento exponencial no número de trajetórias caóticas. O coeficiente angular da reta é  $\gamma = -4.95 \times 10^{-2} \pm 4.65 \times 10^{-4}$ . Conforme a equação (3.12), o valor de  $\tau_{SNB}$  é obtido por  $\tau_{SNB} = -1/\gamma \approx 20.2$ . Com base no valor de  $\tau_{SNB}$ , foi arbitrariamente escolhido o valor  $t_c = 30$ , pois  $t_c$  precisa ser maior do que  $\tau_{SNB}$ . As órbitas que permanecem na região de restrição por um tempo  $t \geq t_c$  determinam as aproximações para a sela caótica e suas variedades estável e instável, conforme descrito na Seção 3.3.1. O fato de que a sela caótica da Figura 4.15, obtida com o algoritmo PIM triple, encontra-se sobre a intersecção das variedades, obtidas com o algoritmo

sprinkler, indica que o valor de  $t_c$  no algoritmo sprinkler foi bem escolhido.

#### 4.4.2 Crise Interior

Conforme mostrado anteriormente, no interior de uma janela periódica o atrator coexiste com a sela caótica. Pouco antes da crise interior, o atrator é caótico, e encontra-se localizado em duas bandas (ver Figura 4.12). Seguindo a nomenclatura introduzida por Szabó et al. [74], denominamos de região  $B$  (do inglês “band region”) a região ocupada pelo atrator caótico antes da crise. O espaço ao redor das bandas do atrator é denominado de região  $S$  (de “surrounding region”). Para valores de  $\nu$  maiores do que  $\nu_{IC}$ , antes da crise, todas as órbitas periódicas instáveis do sistema estão confinadas no atrator caótico ou na sela caótica coexistente, ou seja, estão restritas estritamente à região  $B$  ou à região  $S$ , não existindo órbitas periódicas instáveis que possuam pontos em ambas as regiões [67].

Para obter numericamente a sela caótica e suas variedades na vizinhança da crise interior, a região de restrição foi novamente definida dentro do retângulo  $\{(b_y, b_z) : -2 \leq b_y \leq 2, -2 \leq b_z \leq 2\}$ , excluindo a região do retângulo ocupada por uma banda do atrator caótico. A forma como o atrator caótico é excluído da região de restrição será discutida na Seção 4.4.4. A Figura 4.16(a) exhibe o atrator caótico fraco (preto) e a sela caótica (cinza) no momento da crise interior  $\nu_{IC}$ . As Figuras 4.16(b) e 4.16(c) mostram, respectivamente, as variedades estável e instável da sela caótica. Novamente, percebe-se que, devido à estrutura da variedade estável, a sela caótica possui um conjunto de espaços vazios ao longo de sua direção instável.

As variedades da sela caótica, mostradas nas Figuras 4.16(b) e 4.16(c), foram obtidas com o algoritmo sprinkler, usando uma grade com  $1000 \times 1000$  pontos e  $t_c = 16$ . Foi escolhido um  $t_c$  menor do que na Figura 4.14 porque, conforme mostrado na Figura 4.17, o tempo de escape médio para  $\nu_{IC}$ , dado pelo inverso da inclinação da reta ( $\gamma = -1.12 \times 10^{-1} \pm 1.09 \times 10^{-3}$ ), é  $\tau_{IC} \approx 8.9$ , sendo bem inferior a  $\tau_{SNB}$ .

A Figura 4.18 mostra ampliações das regiões indicadas por retângulos na Figura 4.16(a). Nota-se que, no momento da crise, o atrator caótico colide com a sela

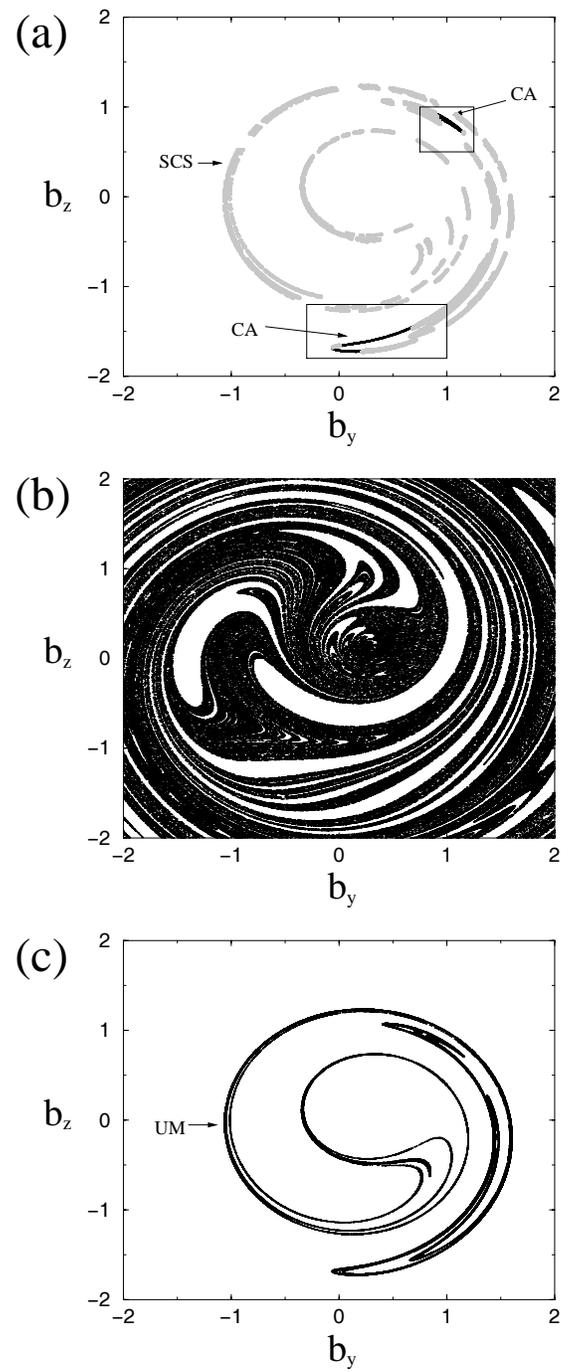


FIGURA 4.16 - (a) Atrator caótico (CA, preto) e sela caótica (SCS, cinza) em  $\nu_{IC}$ , (b) variedade estável da sela caótica SCS em  $\nu_{IC}$ ; (c) variedade instável de SCS em  $\nu_{IC}$ .

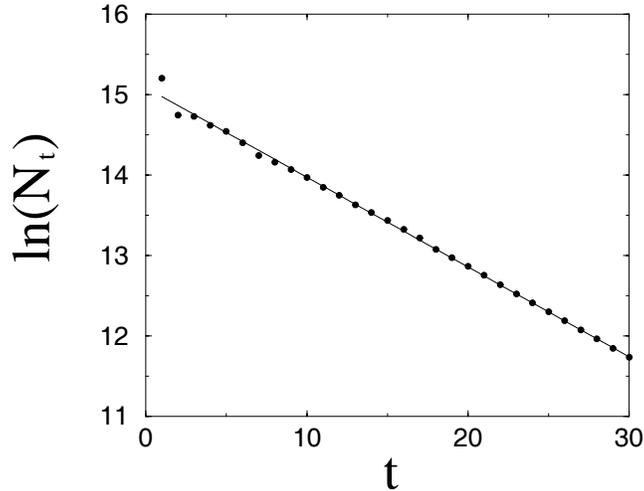


FIGURA 4.17 - Estimação do tempo médio de transiente em  $\nu = 0.06212$ .

caótica. O ponto de colisão entre os dois conjuntos caóticos é a órbita mediadora, que encontra-se na extremidade da sela caótica da região  $S$ .

As cruzes nas Figuras 4.18(a) e 4.18(b) representam os dois pontos da órbita mediadora, e um trecho de sua variedade estável é exibido como linhas finas, indicadas por SM. Percebe-se que a variedade estável da órbita mediadora constitui uma fronteira entre as regiões  $B$  e  $S$  antes da crise. Por essa figura, pode-se observar que as seguintes colisões ou tangências ocorrem no momento da crise:

- Colisão do atrator caótico com a órbita mediadora, pertencente à sela caótica, ou equivalentemente, colisão do atrator caótico com a sela caótica [20,75,106];
- Tangência do atrator caótico com a variedade estável da órbita mediadora [74].

No momento da crise, o atrator caótico coincide com um dos ramos da variedade instável da órbita mediadora. Assim, verifica-se também a tangência homoclínica entre as variedades estável e instável da órbita mediadora, conforme mostrado em Borotto [37]. Além disso, como mostrado na Figura 4.19, no momento da crise o atrator caótico colide com a variedade estável da sela caótica. Na verdade, a

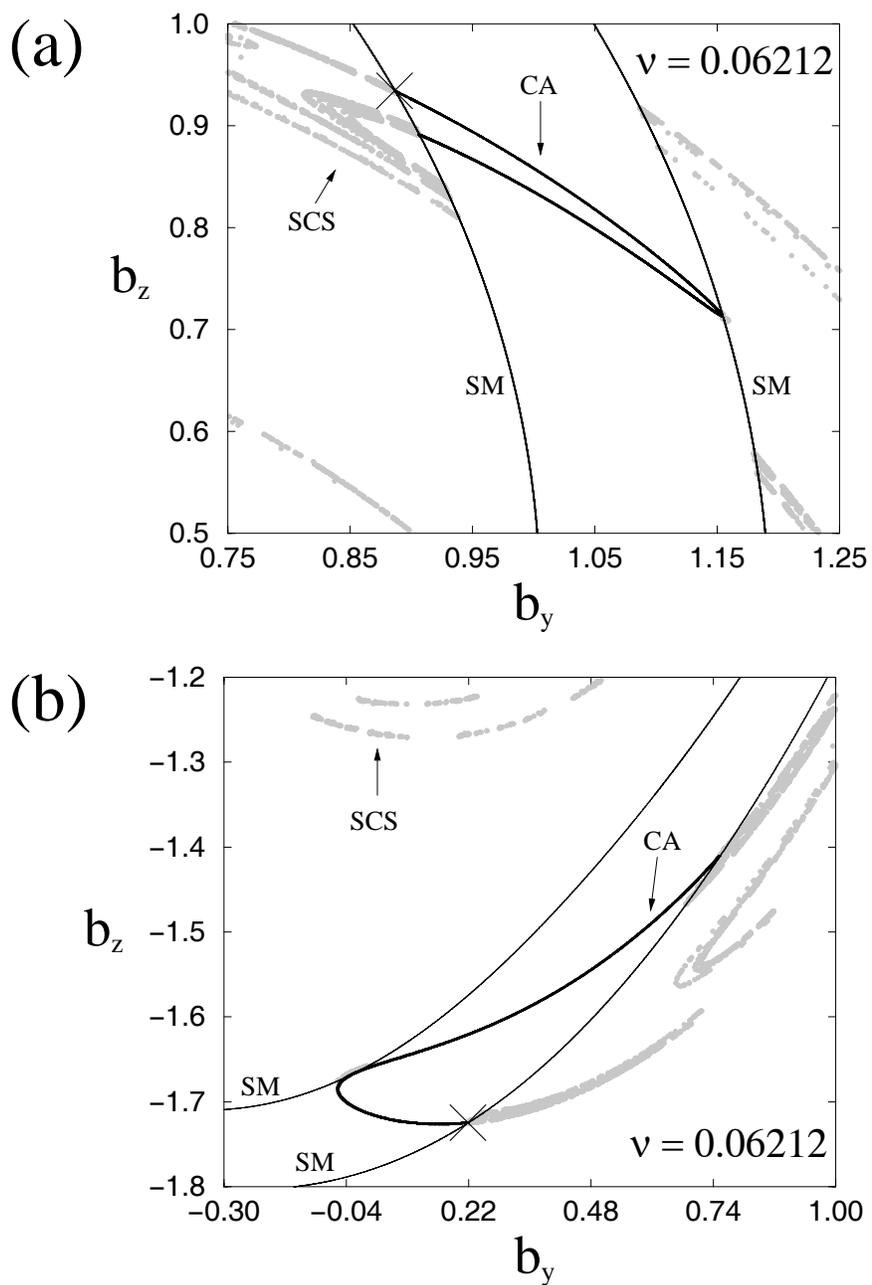


FIGURA 4.18 - Ampliações das regiões retangulares da Figura 4.16(a), mostrando o atrator caótico (CA), a sela caótica SCS (cinza), a órbita periódica instável de período dois (cruz) e sua variedade estável (SM).

variedade estável completa da órbita mediadora na Figura 4.18 “preenche” a região  $S$  da mesma forma como a variedade estável da sela caótica  $S$  na Figura 4.19, conforme ilustrado na Seção 3.4 para variedades estáveis do mapa de Hénon.

Após a crise, o conjunto caótico da região  $B$  perde sua estabilidade e converte-se em uma sela caótica (ver Figura 4.12(b)), passando a ser parte de um atrator maior, que engloba também a sela caótica da região  $S$ . A Figura 4.20(a) mostra o atrator caótico em  $\nu = 0.06205 > \nu_{IC}$ , um pouco após a crise, onde as cruces indicam os pontos da órbita periódica instável de período-2 responsável pela crise. O atrator se estende ao longo da direção instável (note-se a semelhança com a variedade instável da sela caótica na Figura 4.16(c)). Similarmente ao que ocorre na bifurcação sela-nó, todos os espaços vazios da sela caótica são preenchidos após a crise. O atrator pós-crise ocupa um espaço maior do que a união do atrator pré-crise com a sela caótica. Isto é devido a uma *explosão*, ou seja, a criação de órbitas periódicas instáveis no momento da crise, que preenchem todos os vazios da sela caótica [20,67,75].

Mesmo depois da crise, ainda é possível diferenciar as regiões  $S$  e  $B$  no espaço de fase. As Figuras 4.20(b) e 4.20(c), ampliações das regiões retangulares na Figura 4.20(a), mostram que a órbita mediadora e sua variedade estável são robustas à crise. A variedade estável divide o atrator caótico em bandas, podendo ainda ser usada como critério de separação entre as regiões  $B$  e  $S$ . A região  $B$  é determinada pela banda onde encontrava-se o atrator caótico antes da crise. A diferença é que agora uma trajetória sobre o atrator caótico pode cruzar a variedade estável da órbita mediadora, indo da região  $B$  para a região  $S$  e de volta para a região  $B$ , intermitentemente (intermitência induzida pela crise interior). No entanto, é possível encontrar órbitas caóticas que nunca abandonam as regiões  $B$  ou  $S$ . Trata-se das duas selas caóticas ilustradas nas Figuras 4.20(d)-4.20(f), onde as Figuras 4.20(e) e 4.20(f) são ampliações das regiões indicadas em 4.20(d). A sela caótica na região  $S$  (SCS) é a continuação da sela  $S$  pré-crise. A sela na região  $B$  (BCS) foi criada após a crise, sendo uma continuação do atrator caótico pequeno que existia antes da crise.

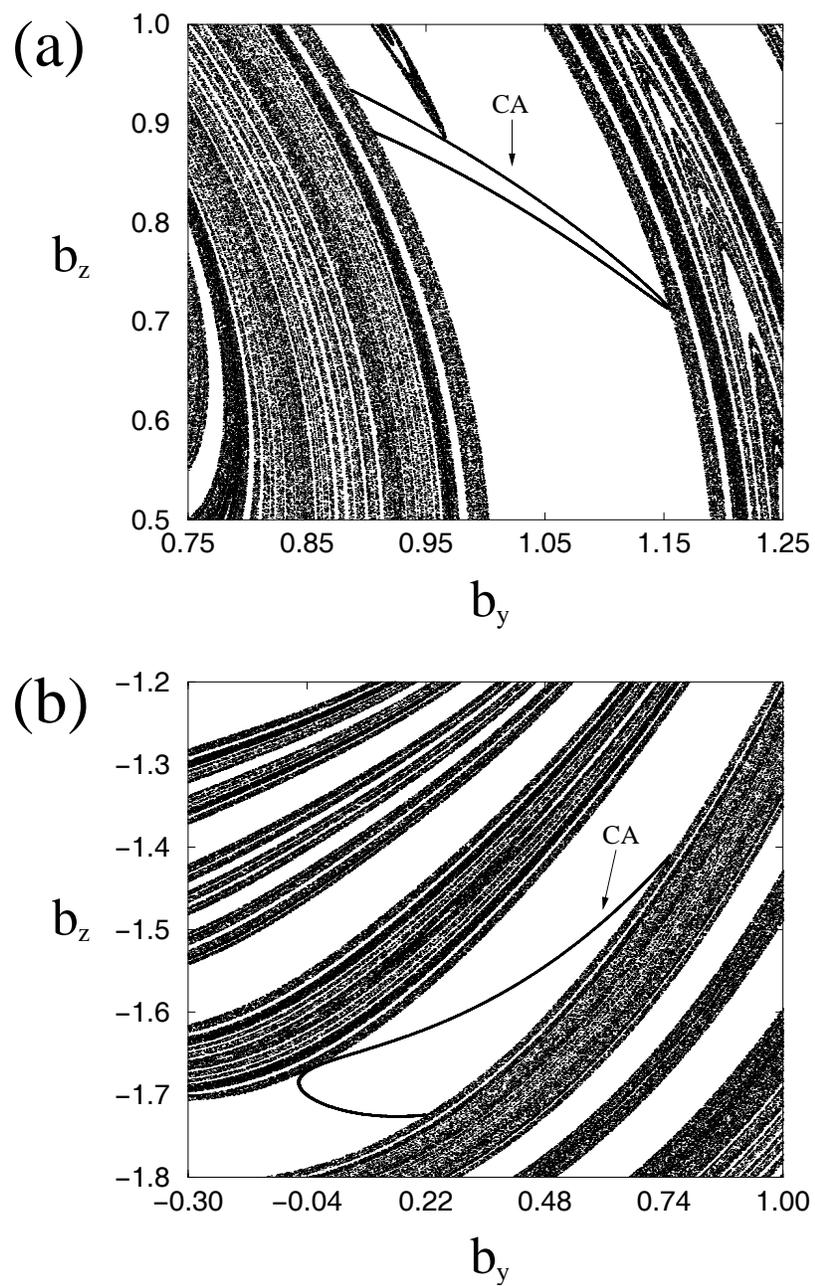


FIGURA 4.19 - Ampliações das duas regiões indicadas por retângulos na Figura 4.16(a), mostrando a colisão do atrator caótico (CA) com a variedade estável da sela caótica (pontos pretos).

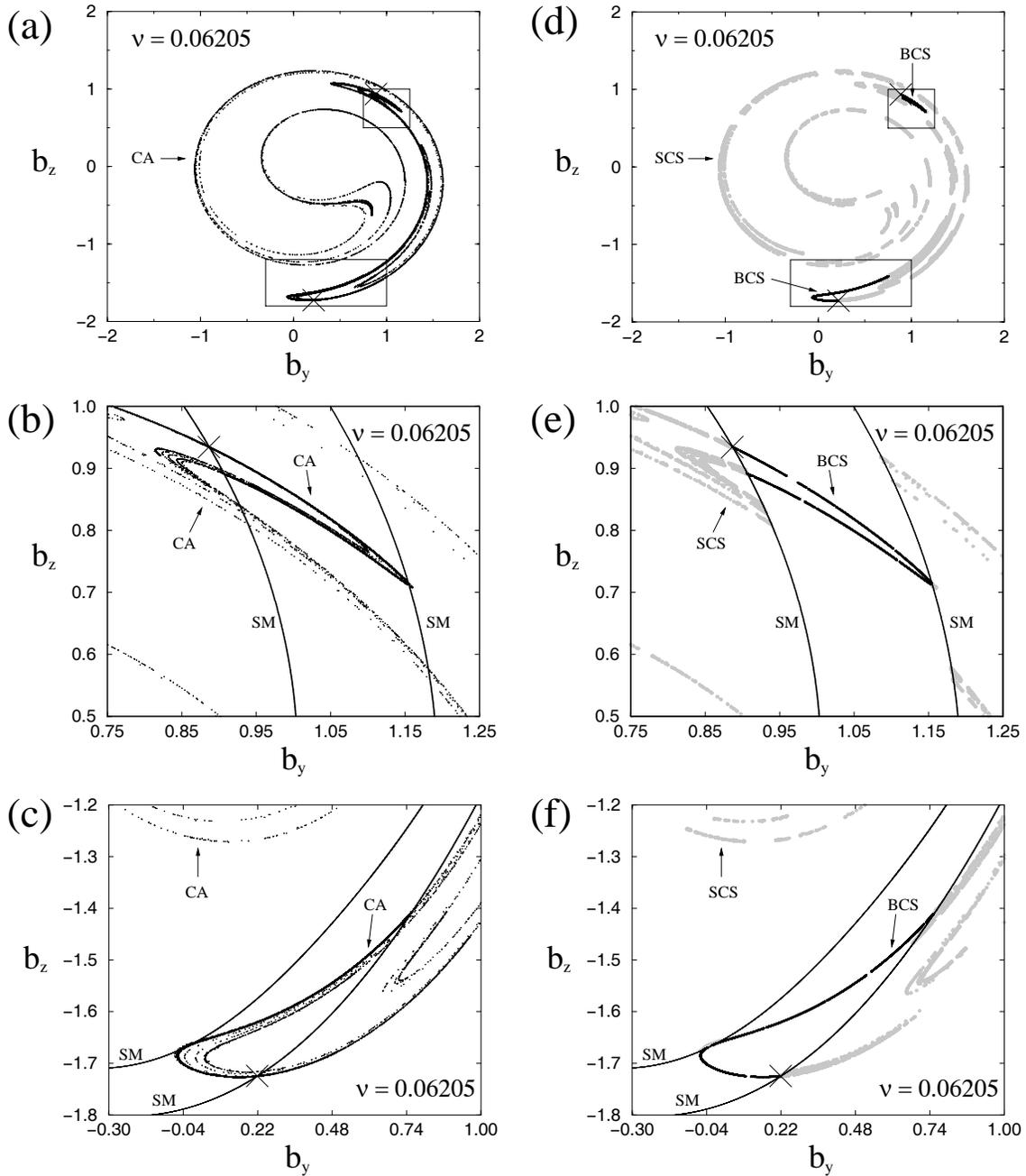


FIGURA 4.20 - Conjuntos invariantes após a crise, em  $\nu = 0.06205$ . (a) Atrator caótico (CA) com os dois pontos da órbita mediadora (cruzes); (b) e (c) ampliações dos retângulos superior e inferior de (a), respectivamente. As linhas SM são segmentos da variedade estável da órbita mediadora; (d)-(f) As selas caóticas SCS (cinza) e BCS (preto) referentes a (a)-(c).

À medida em que se diminui o valor de  $\nu$  para mais longe de  $\nu_{IC}$ , a sela  $B$  se altera rapidamente, e sua estrutura fractal ao longo da direção instável torna-se mais pronunciada, devido ao aumento de tamanho dos espaços “vazios”. Este fato pode ser observado nas Figuras 4.12(b) e 4.21. A Figura 4.21 mostra os mesmos conjuntos da Figura 4.20 para  $\nu = 0.0616$ .

Para entender o aumento de tamanho dos espaços “vazios” deve-se lembrar que em  $\nu_{IC}$  o atrator caótico é o fechamento de um dos ramos da variedade instável da órbita mediadora (ramo à direita da cruz na Figura 4.18(a)), o que significa que qualquer órbita caótica pertencente ao atrator gera pontos de Poincaré que “cobrem” todo este ramo da variedade instável. Neste ponto o atrator ainda encontra-se totalmente confinado na região  $B$ . Logo após a crise (Figura 4.20(b)) a variedade instável da órbita mediadora cruza a variedade estável da mesma, e as órbitas que estavam na região  $B$  ganham acesso à região  $S$ . Os pequenos espaços vazios na sela caótica  $B$ , visíveis na Figura 4.20(e), são “intervalos” de pontos que são mapeados para porções da variedade instável que se encontram na região  $S$ , tais como a “ponta” do atrator que atravessa para o lado direito da variedade estável ( $SM$ ) na Figura 4.20(b). Pode-se perceber pela Figura 4.21(b) que quando  $\nu$  é diminuído, a mesma “ponta” do atrator se protraí para mais adiante à direita da variedade estável ( $SM$ ). Com isso, intervalos maiores de pontos na região  $B$  são mapeados para esta ponta, ocasionando em aumento de tamanho dos intervalos “vazios” na sela caótica  $B$  (Figura 4.21(e)).

A dinâmica de trajetórias sobre o atrator segue o seguinte padrão. Para  $\nu > \nu_{IC}$ , trajetórias sobre o atrator caótico nunca abandonam a região  $B$ . Para  $\nu$  um pouco menor do que  $\nu_{IC}$ , uma trajetória iniciada na região  $B$  pode permanecer em  $B$  durante um longo tempo, até “cair” em um espaço “vazio” que é mapeado para a região  $S$ , o que faz com que a trajetória escape para a região  $S$ . É importante lembrar que os espaços nas selas caóticas pós-crise não se encontram realmente vazios. Na crise interior, uma explosão preenche os vazios nas selas caóticas por meio de órbitas periódicas instáveis que “visitam” ambas as regiões  $S$  e  $B$ . Estas órbitas são responsáveis pelo acoplamento dinâmico entre as duas regiões após a

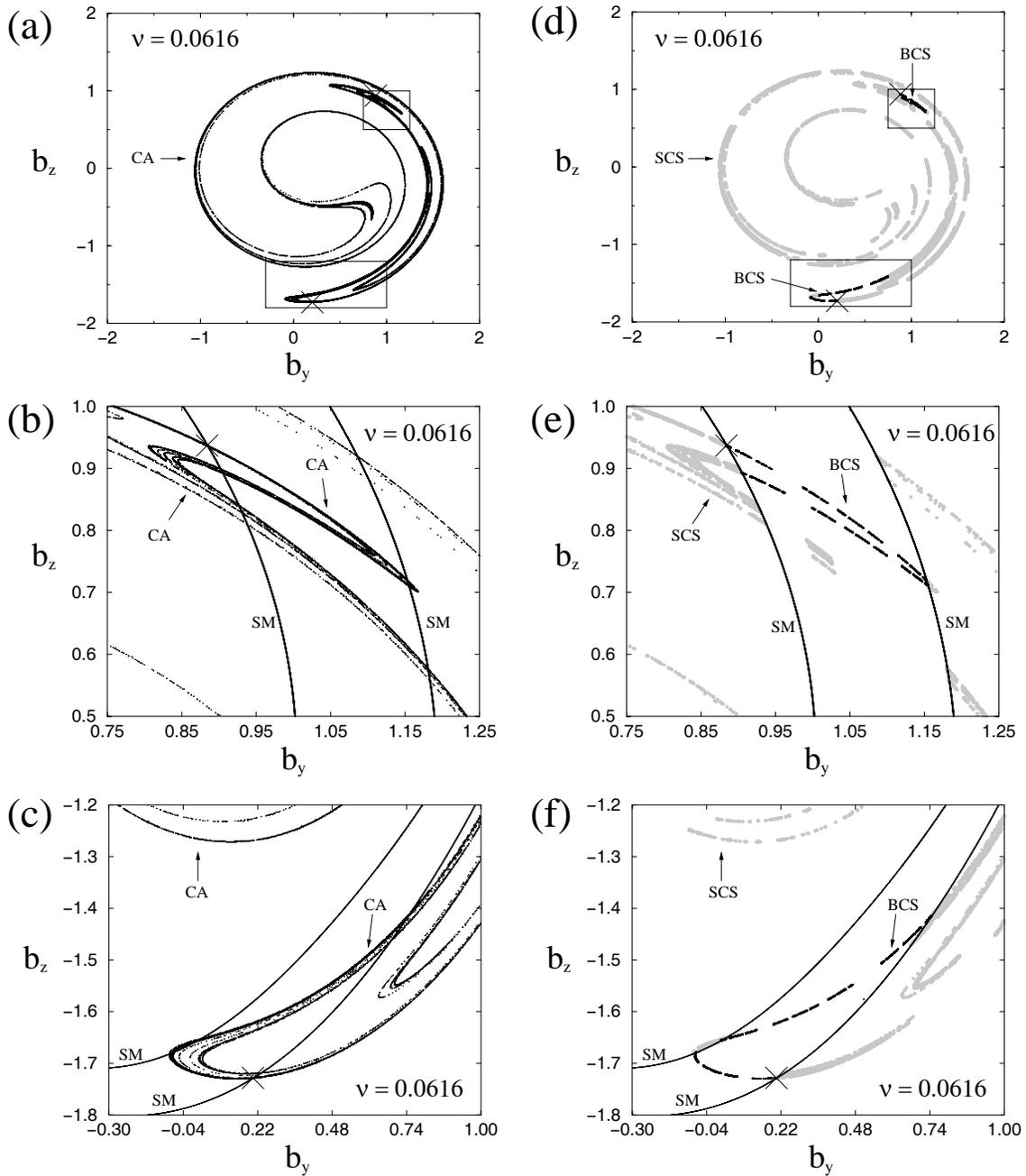


FIGURA 4.21 - Conjuntos invariantes após a crise, em  $\nu = 0.0616$ . (a) Atrator caótico (CA) com os dois pontos da órbita mediadora (cruzes); (b) e (c) ampliações dos retângulos superior e inferior de (a), respectivamente. As linhas SM são segmentos da variedade estável da órbita mediadora; (d)-(f) as selas caóticas SCS (cinza) e BCS (preto) referentes a (a)-(c).

crise, sendo chamadas de *órbitas de acoplamento* [20,67]. Ao ser mapeada para a região  $S$ , a trajetória encontra-se na vizinhança da sela caótica  $S$ . Contudo, como as selas caóticas possuem estrutura fractal ao longo das direções estável e instável, a probabilidade de uma órbita ser mapeada exatamente para  $SCS$  é nula, conforme comentado na Seção 2.7.1. Sendo assim, enquanto estão na região  $S$  as trajetórias percorrem os espaços “vazios” ao longo de sua direção instável. Estes espaços estão densamente preenchidos por pontos das órbitas de acoplamento. Após algum tempo, a trajetória é “re-injetada” na região  $B$ , pois trechos da variedade instável da órbita mediadora, sobre a qual se encontra o atrator caótico, são mapeados de volta para a região  $B$ .

Os “saltos” entre as regiões  $B$  e  $S$  se repetem intermitentemente. Esta dinâmica intermitente é ilustrada na Figura 4.22, onde uma série temporal com os pontos de Poincaré é exibida para  $\nu = 0.06211$ . As fases “laminares” fracamente caóticas correspondem ao tempo em que a trajetória encontra-se na região  $B$ , e as fases fortemente caóticas, ou “estouros”, ocorrem quando a trajetória está na região  $S$ . As linhas tracejadas representam a posição da órbita periódica instável  $p-2$ , mediadora da crise. Pode-se notar que logo antes dos estouros, nas fases indicadas pelas setas, a trajetória passa algumas iterações na vizinhança da órbita mediadora. Isto ocorre porque após cruzar a fronteira da região  $B$  para a região  $S$  a trajetória encontra-se próxima da variedade estável da órbita mediadora (a variedade estável é a própria fronteira). Logo, conforme ilustrado anteriormente na Figura 4.11, a trajetória é atraída para a órbita mediadora via sua variedade estável. Uma vez que a trajetória não se encontra exatamente sobre a variedade estável, e a órbita mediadora é instável, a trajetória eventualmente é repelida ao longo do ramo da variedade instável da órbita mediadora que aponta para a região  $S$ , e um “estouro” se inicia [20,73]. A intermitência induzida pela crise pode ser vista como uma alternância entre dois comportamentos transientes basicamente governados pela selas caóticas  $B$  (“laminar”) e  $S$  (estouros). O aumento no tamanho dos espaços na sela caótica  $B$  se reflete nas séries temporais como uma diminuição na duração das fases “laminares”,

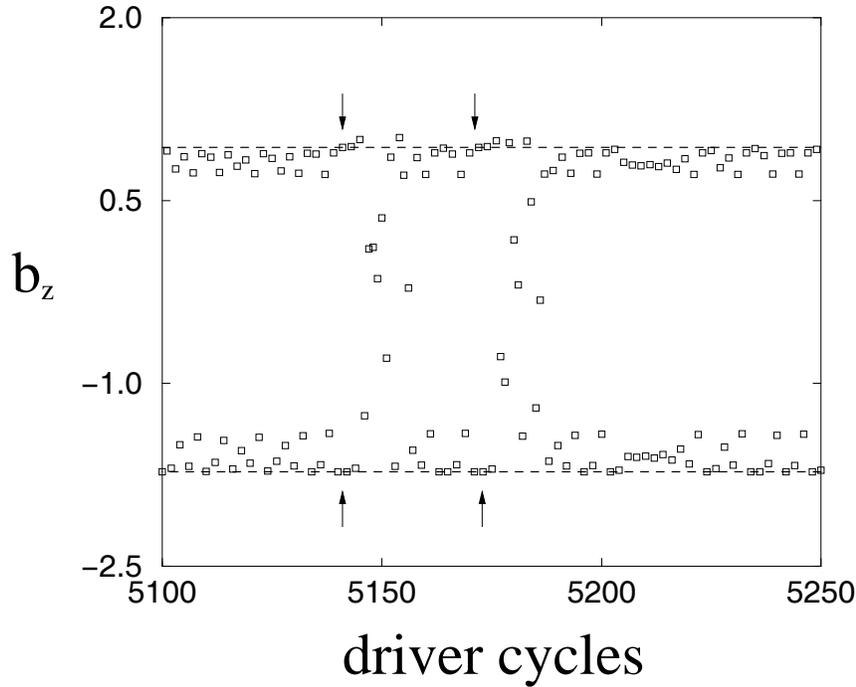


FIGURA 4.22 - Série temporal estroboscópica mostrando a intermitência induzida pela crise em  $\nu = 0.06211$ . As linhas tracejadas representam a posição da órbita mediadora de período 2, e as setas apontam para as fases de comportamento aproximadamente periódico que ocorrem logo antes de um forte “estouro” caótico.

como pode ser visto na Figura 4.4.2 para  $\nu = 0.06211$ ,  $\nu = 0.0620$  e  $\nu = 0.0616$ . O tempo de transiente médio entre dois estouros, calculado ao longo de uma série de  $10^6$  pontos de Poincaré, é  $\tau \approx 759$  para  $\nu = 0.06211$ , caindo para  $\tau \approx 20$  em  $\nu = 0.0616$ .

#### 4.4.3 Encontrando Órbitas de Acoplamento

Logo após a crise, as órbitas de acoplamento criadas possuem períodos muito altos, com o período tendendo a infinito quando  $\nu \rightarrow \nu_{IC}$  [20,67]. Nestes casos sua identificação numérica é extremamente difícil. À medida em que o parâmetro de controle  $\nu$  é diminuído, novas órbitas de acoplamento de período mais baixo são criadas. Estas órbitas podem ser encontradas pelo método de Newton, distribuindo

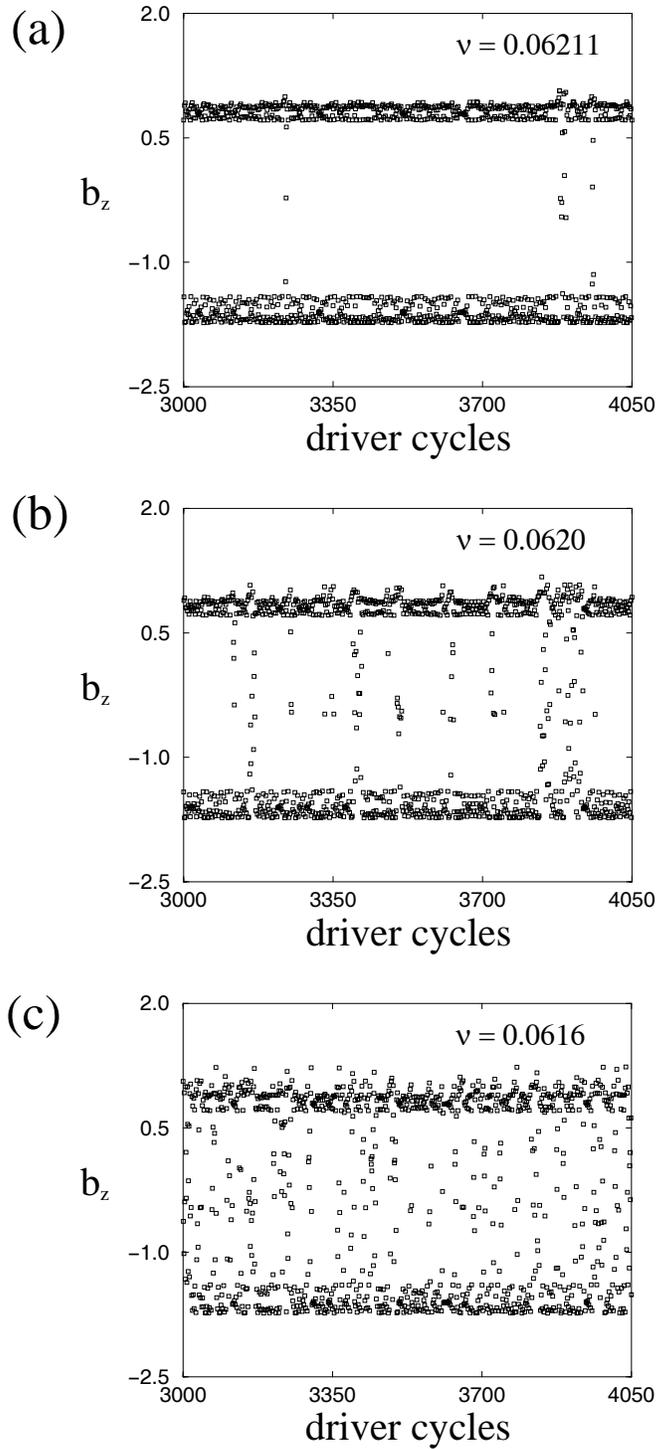


FIGURA 4.23 - Séries temporais estroboscópicas ilustrando a diminuição do tempo médio entre dois estouros em função de  $\nu$  para (a)  $\nu = 0.06211$ ; (b)  $\nu = 0.0620$  e (c)  $\nu = 0.0616$ .

um conjunto de condições iniciais, aleatoriamente geradas, em um dos espaços vazios da sela  $B$  ou  $S$ . É necessário informar ao método de Newton o período da órbita desejada. Como exemplo, usando  $\nu = 0.0616$ , procuramos aleatoriamente por órbitas com período superior a 10, usando o método de Newton. São geradas condições iniciais em uma região retangular contendo parte de um dos vazios da sela caótica  $B$ , conforme ilustrado pelo pequeno retângulo na Figura 4.24. As condições iniciais aleatórias são geradas até que seja encontrada uma órbita com o período especificado. Figura 4.25(a) mostra uma das órbitas de acoplamento encontradas. Trata-se de uma órbita de período 11 exibida junto com as selas caóticas  $B$  (preto) e  $S$  (cinza). Nas Figuras 4.25(b) e 4.25(c) são mostradas ampliações das regiões indicadas em 4.25(a). Pode-se perceber que a órbita de acoplamento possui componentes (pontos de Poincaré) na região  $B$  e na região  $S$ . As linhas SM indicam a variedade estável da órbita mediadora (não mostrada). Uma outra órbita de acoplamento, de período 13, é mostrada na Figura 4.26.

Pela sua estrutura fractal ao longo da direção instável, Szabó e Tél [74] referem-se às selas caóticas pós-IC como sendo o *esqueleto geométrico* do atrator. As órbitas de acoplamento formam o seu preenchimento ou “corpo”. Assim, o atrator caótico pós- crise pode ser decomposto em três componentes básicos: a sela  $B$ , a sela  $S$  e as órbitas de acoplamento.

#### 4.4.4 Definição da Região de Restrição

A correta definição da região de restrição é fundamental para a geração numérica das selas caóticas. É necessário definir a região  $R$  de tal maneira que ela contenha toda a sela caótica desejada e nenhum atrator. No interior da janela periódica, quando o atrator consiste de uma órbita periódica e encontra-se afastado da sela caótica coexistente, esta definição não é difícil. Em geral, basta cobrir um dos pontos do atrator com um círculo de raio suficientemente pequeno. Suficientemente pequeno significa que o círculo deve estar totalmente contido na região  $B$ , de forma a não cobrir pontos da sela caótica  $S$ . A região  $R$  é definida como um retângulo englobando toda a sela caótica, menos o círculo. O algoritmo PIM triple irá gerar uma órbita

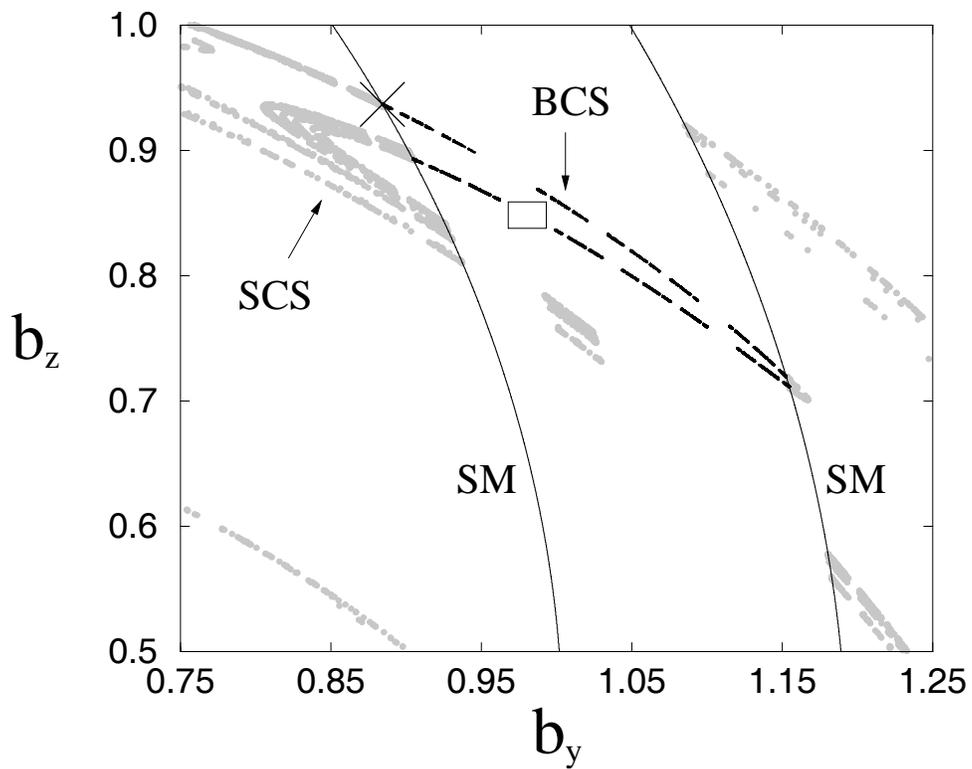


FIGURA 4.24 - Definição de uma região retangular com condições iniciais para o método de Newton para encontrar órbitas de acoplamento.

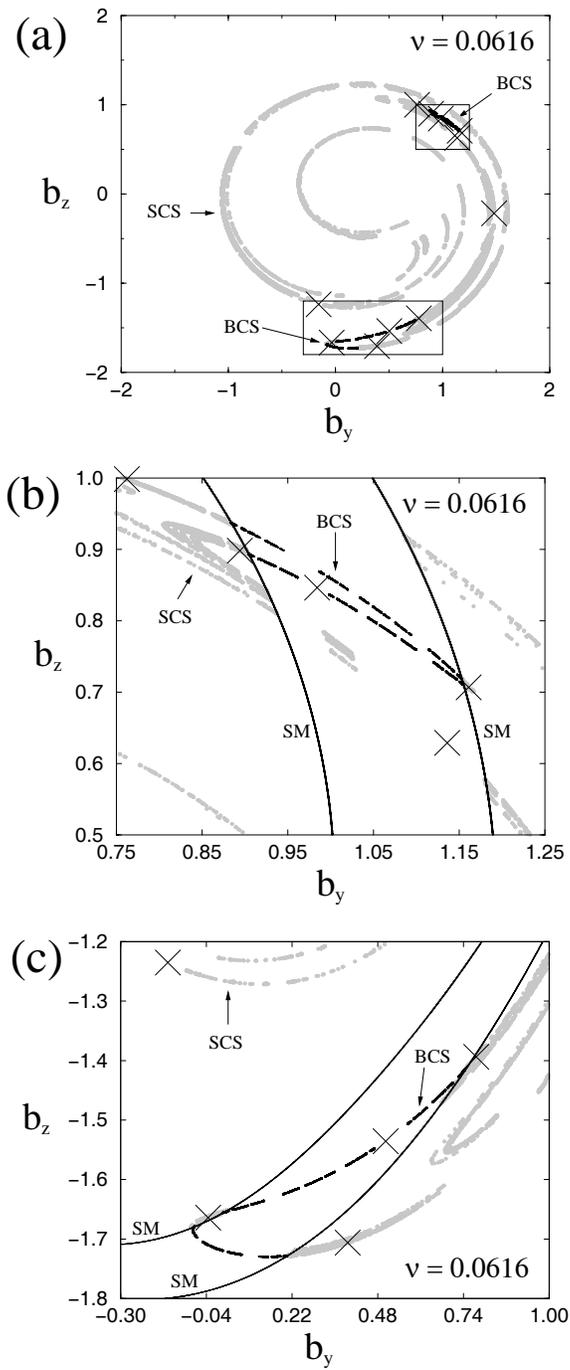


FIGURA 4.25 - (a) Selas caóticas SCS (cinza) e BCS (preto) junto com uma órbita de acoplamento de período 11 em  $\nu = 0.0616$ ; (b) e (c) ampliações das regiões retangulares em (a).

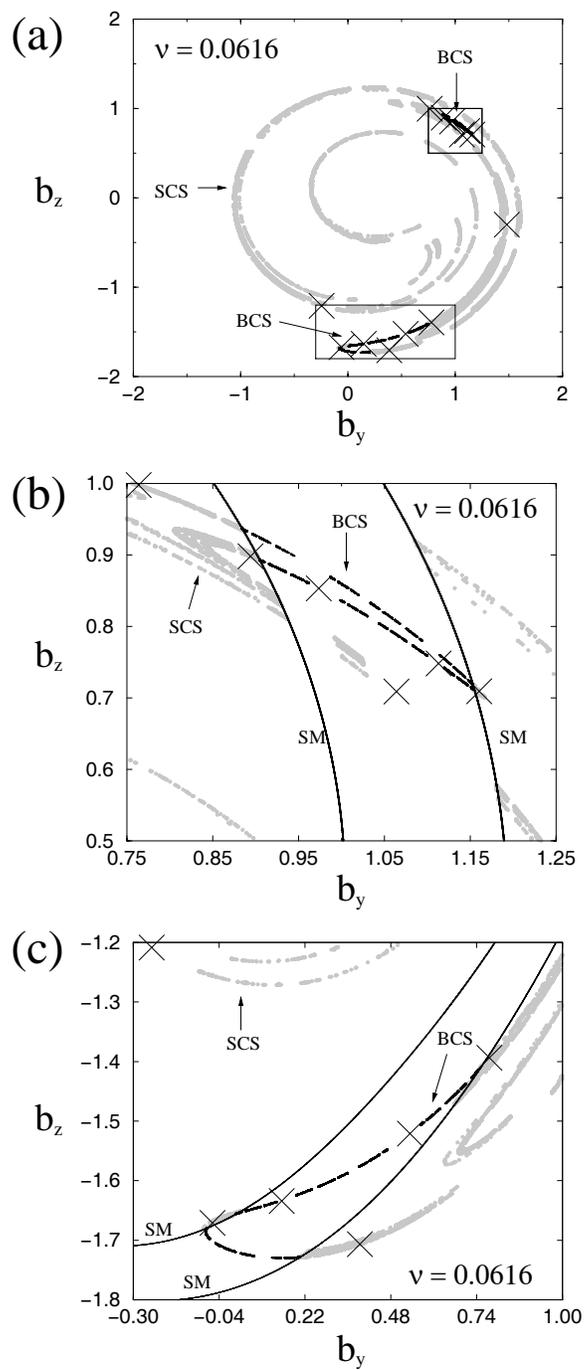


FIGURA 4.26 - (a) Selas caóticas SCS (cinza) e BCS (preto) junto com uma órbita de acoplamento de período 13 em  $\nu = 0.0616$ ; (b) e (c) ampliações das regiões retangulares em (a).

que nunca entra neste círculo. Para um atrator de período  $n$  não é necessário cobrir todos os  $n$  pontos periódicos. Basta cobrir um deles, pois se a órbita convergir para um dos pontos do atrator ela irá eventualmente passar pelo ponto coberto.

Próximo da crise interior, quando o atrator é um conjunto caótico localizado em bandas, é necessário cobrir uma das bandas. A situação mais complicada ocorre no momento da crise, quando o atrator toca a sela caótica. A definição de  $R$  deve ser feita de tal forma a cobrir o atrator sem cobrir partes da sela caótica. Caso contrário, a mal seleção da região  $R$  pode gerar o aparecimento de espaços vazios indesejados na sela  $S$ . A variedade estável da órbita mediadora serve como delimitador entre as regiões  $B$  e  $S$ , e pode ser usada para isolar a banda desejada. Algumas vezes pode-se utilizar uma aproximação linear para segmentos da variedade estável próximos do atrator caótico. Na Figura 4.27 o atrator (linha escura) no ponto de crise interior ( $\nu \approx 0.06212$ ) foi isolado da região  $R$  através de uma “caixa” em que as duas arestas laterais foram obtidas como interpolações lineares de pontos sobre a variedade estável.

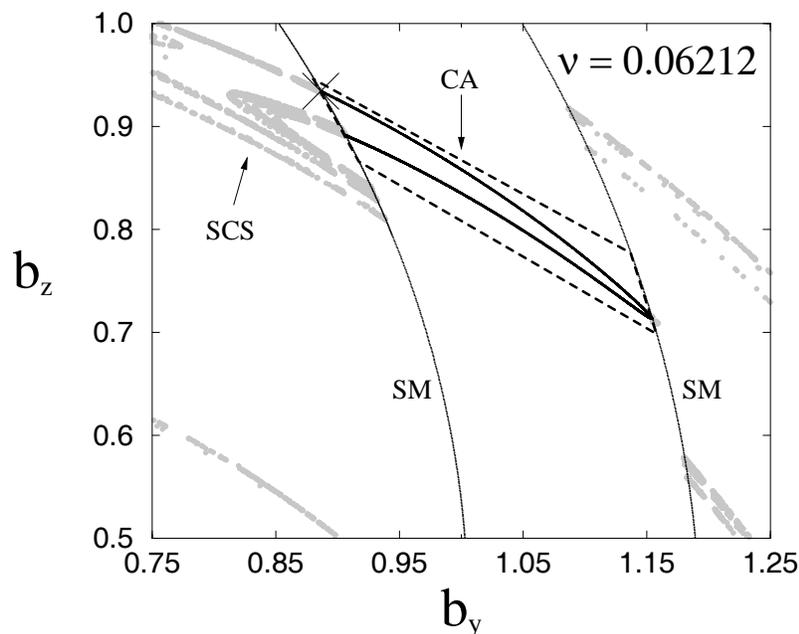


FIGURA 4.27 - Definição da região de restrição, obtida cobrindo-se uma banda do atrator caótico CA.

Após a crise, a região de restrição pode ser definida da mesma forma. A única diferença ocorre quando se deseja calcular a sela  $B$ . Neste caso a região de restrição é a própria caixa definida como mostrado na Figura 4.27. É necessário configurar o algoritmo PIM triple para que seja obtida uma órbita que sempre retorna à região  $R$  a cada  $n$  iterações (onde  $n$  é o número de bandas do atrator caótico pré-crise).

Para a construção das Figuras 4.12(a) e 4.12(b) foi necessária a definição de uma região de restrição para cada valor de  $\nu$ . Dentro da janela periódica, enquanto o atrator é periódico, a posição de um ponto do atrator pode ser identificada automaticamente antes de calcular a sela caótica  $S$ . Depois disto, basta definir um círculo razoavelmente pequeno em torno do ponto. Quando o atrator torna-se caótico, próximo de IC, é necessário definir regiões em torno de uma das bandas do atrator para diversos intervalos de  $\nu$ . Estas regiões tiveram que ser definidas manualmente. Para simplificar a definição da região  $R$  no interior da janela periódica, em vez de utilizar uma caixa como a da Figura 4.27, utilizou-se um conjunto de círculos para cobrir as bandas do atrator caótico.

A mesma abordagem manual foi necessária para o diagrama da sela  $B$ , depois da crise. Neste caso, como deseja-se encontrar trajetórias que nunca abandonam as bandas da região  $B$ , pode ser definida uma região de restrição um pouco maior do que as bandas ocupadas pela sela  $B$ . Isto permite que se use a mesma região para intervalos maiores de  $\nu$ , sem que as trajetórias geradas pelo algoritmo PIM triple escapem da sela caótica  $B$ .

Uma outra dificuldade ocorre comumente no interior de janelas periódicas. Apesar de só ter sido mostrado um atrator na Figura 4.12, o interior da janela periódica apresenta regiões em que outros atratores coexistem com o atrator mostrado. Durante o processo de geração da figura foram encontrados quatro outros atratores. Toda vez que um atrator é encontrado na região de restrição, as trajetórias escapam da sela caótica e convergem para o atrator. Para evitar que isto ocorra, é necessário redefinir a região de restrição para que dela seja excluído o novo atrator encontrado.

## CAPÍTULO 5

### CAOS NA EQUAÇÃO KURAMOTO-SIVASHINSKY

#### 5.1 Introdução

O desenvolvimento de ferramentas para a análise e descrição de caos em sistemas espaço-temporais, ou extensos, constitui um dos maiores desafios da área de sistemas dinâmicos [107]. Em princípio, o espaço de fase de um sistema espaço-temporal possui dimensão infinita, e as soluções podem exibir uma grande diversidade de comportamentos dinâmicos, que variam de soluções estacionárias e espaço-temporalmente periódicas, a espaço-temporalmente caóticas. Assim como em sistemas de baixa dimensão, a existência de pelo menos um expoente de Lyapunov positivo caracteriza a presença de comportamento caótico em sistemas extensos. Contudo, um sistema temporalmente caótico pode ser espacialmente ordenado (ou coerente) ou desordenado (incoerente), sendo que costuma-se convencionar que caos espaço-temporal ocorre quando o sistema apresenta desordem espacial e caos temporal. Não existe até o momento uma técnica padrão para a caracterização de caos espaço-temporal, que possibilite que resultados teóricos sejam quantitativamente comparados com experimentos e com simulações [108]. Uma das técnicas que vêm sendo investigadas é a análise de padrões gradientes (APG), que tem se mostrado capaz de caracterizar fenômenos que apresentam turbulência localizada [109], bem como diferenciar regimes e transientes em modelos de uma [110] ou duas [111,112] dimensões espaciais. Estas técnicas baseiam-se na análise de séries temporais ou espaço-temporais (seqüências de imagens variando com o tempo). Foi realizada uma investigação preliminar sobre o uso de APG em sistemas extensos de duas dimensões espaciais, usando a equação Swift-Hohenberg como modelo de instabilidade convectiva [113] e o modelo de Bohr e Rand para geração de turbulência localizada [114]. O Apêndice A contém uma descrição das técnicas de APG, com os resultados preliminares, mostrando a variação dos valores de quantificadores para a medida da

dinâmica de fase e de amplitude dos vetores de campos gradientes obtidos a partir de séries espaço-temporais de fenômenos transientes. Entretanto, concluímos que uma abordagem no nível do espaço de fase deve preceder abordagens posteriores envolvendo análise direta das estruturas dinâmicas no domínio espaço-temporal, feitas por exemplo, por meio da Análise de Padrões Gradientes. Dessa forma, embora a análise de dados em sistemas bidimensionais seja uma área de interesse crescente, na tese optamos por investigar de maneira mais profunda, restrita ao espaço de fase, um modelo com apenas uma dimensão espacial em um regime fracamente caótico, onde verifica-se a manutenção de coerência espacial. Este tipo de regime permite uma análise no espaço de fase semelhante à análise descrita no capítulo 4, ajudando a estabelecer a conexão entre a dinâmica caótica em sistemas de baixa dimensão e o surgimento de caos em sistemas extensos. A extensão dos resultados para modelos com duas ou três dimensões espaciais será investigada em trabalhos futuros. Como modelo a ser estudado foi escolhida a equação Kuramoto-Sivashinsky, que pode ser obtida a partir da equação Ginzburg-Landau Complexa, com relevância para o estudo de dinâmica de ondas de Alfvén.

## 5.2 A Equação Ginzburg-Landau Complexa

Recentemente, Lefebvre e Hada [115] estudaram a dinâmica de ondas de Alfvén sujeitas a instabilidades geradas por um feixe de ions propagando em direção paralela ao campo magnético. Foi utilizada uma forma da equação DNLS com o acréscimo de termos lineares para as taxas de crescimento e amortecimento da onda. Supondo uma instabilidade fraca, Lefebvre e Hada obtiveram, a partir da equação DNLS, uma equação para a amplitude do campo magnético na forma da equação Ginzburg-Landau Complexa (GLC) [4,116,117]. A equação Ginzburg-Landau complexa tem sido uma das equações mais estudadas nos últimos anos (ver Cross e Hohenberg [4] e Aranson e Kramer [117] e referências internas).

A equação GLC é um exemplo de *equação de amplitude*, ou seja, uma equação para a descrição da modulação espaço-temporal lenta próximo ao limiar de uma instabil-

idade [118]. Considere-se um sistema inicialmente em um ponto de equilíbrio. No caso de um sistema espacialmente estendido, um “ponto” de equilíbrio passa a ser um estado em que a variável de estado  $u(x, t)$  (velocidade, temperatura, densidade, campo magnético, etc.) não varia com o tempo para todo valor de  $x$ . Considere-se também um parâmetro de controle  $\epsilon$  definido de tal forma que uma instabilidade aparece quando  $\epsilon$  torna-se positivo ( $\epsilon$  pode ser definido como  $\epsilon = (R - R_c)/R_c$ , onde  $R$  é o parâmetro de controle das equações, e  $R_c \neq 0$  é o valor crítico, ou ponto de bifurcação, para o aparecimento da instabilidade). No caso de uma bifurcação Hopf supercrítica, logo após o ponto de bifurcação, o estado de equilíbrio do sistema perde sua estabilidade, e pequenas perturbações geram movimentos periódicos [6]. É apropriado [118] estudar a evolução destas perturbações em termos de uma decomposição da variável de estado em modos de Fourier

$$u(x, t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u_k e^{(-i\omega t + ikx)}, \quad (5.1)$$

onde  $\omega$  é a frequência,  $k$  é o número de onda,  $i = \sqrt{-1}$ . Para  $\epsilon < 0$ , todos os modos  $e^{(-i\omega t + ikx)}$  possuem uma taxa de crescimento  $\text{Im}(\omega)$  negativa, e sua amplitude decai com o tempo. Desta forma, perturbações são dissipadas com o tempo e o estado uniforme  $u = 0$  é estável. Em  $\epsilon = 0$ , o modo de Fourier com maior taxa de crescimento,  $\exp(-i\omega_c t + ik_c x)$ , torna-se marginalmente estável,  $\text{Im}(\omega_c) = 0$ . Para  $\epsilon > 0$ , existe uma banda de modos instáveis ao redor de  $k_c$ . A amplitude destes modos permanece baixa porque sua instabilidade é saturada devido à interação não-linear com os modos estáveis [118]. A Figura 5.1 ilustra o comportamento da taxa de crescimento dos modos próximo ao ponto de bifurcação.

Para valores do parâmetro de controle um pouco acima da bifurcação ( $0 < \epsilon \ll 1$ ), espera-se que os padrões formados possuam um comprimento de onda próximo de  $2\pi/k_c$ . As estruturas nas escalas de comprimento pequenas são insensíveis a  $\epsilon$ , pois os modos com curto comprimento de onda possuem um forte decaimento ( $\text{Im}(\omega) \ll 0$ ). No entanto, modulações lentas ocorrem nas maiores escalas espaciais dos padrões formados, devido à banda de modos instáveis, que é extremamente pequena. Nestas

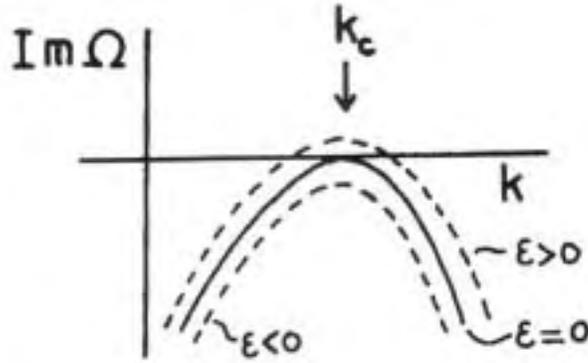


FIGURA 5.1 - Comportamento da taxa de crescimento dos modos de Fourier em função do número de onda  $k$ .

FONTE: [118] (p. 20).

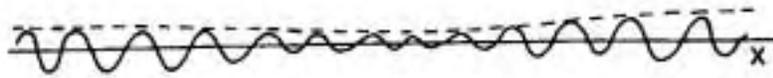


FIGURA 5.2 - Modulação lenta do modo crítico para  $\varepsilon \ll 1$ . O envelope é indicado com a linha tracejada.

FONTE: [118] (p. 20).

condições, é possível separar a dinâmica dos padrões próximo à bifurcação em termos de um componente mais rápido, com escala de comprimento dada pelo número de onda crítica, e um *envelope* que varia lentamente no tempo e no espaço. O campo  $u(x, t)$  pode ser então descrito como

$$u(x, t) \propto A(x, t)e^{i(k_c x - \omega_c t)} + c.c. + t.o.a., \quad (5.2)$$

onde  $A(x, t)$  é a amplitude complexa ou envelope, c.c. denota complexo conjugado e t.o.a. denota termos de ordem mais alta, que são termos proporcionais a  $\exp(2ik_c x)$  [118]. A Figura 5.2 representa um campo físico  $u(x, t)$  unidimensional (linha contínua), e o envelope  $A(x, t)$  (linha tracejada), próximo à bifurcação.

Supondo que o módulo  $|A|$  é pequeno, o que ocorre em bifurcações supercríticas [6], a dinâmica do envelope obedece à equação Ginzburg-Landau complexa [4,6,117,118,119,120]

$$\partial_t A = \epsilon A + (1 + ic_1) \nabla^2 A - (1 + ic_2) |A|^2 A, \quad (5.3)$$

onde  $c_1$  e  $c_2$  são coeficientes complexos. Uma dedução detalhada da equação 5.3 a partir da equação de reação-difusão pode ser encontrada em Kuramoto [120].

A equação 5.3 tem sido obtida em diversos contextos, incluindo fluidos Taylor-Couette e convecção Rayleigh-Bénard em fluidos binários [119], reações químicas oscilatórias [6,120], arritmia cardíaca [121], lasers [122,123], ondas de plasma em tokamaks [124,125], e acoplamento não-linear entre ondas de Langmuir e ion-acústicas em plasmas [126]. A forma da equação 5.3 é bastante geral, e os detalhes de cada sistema estão contidos nos coeficientes  $c_1$  e  $c_2$ . Em sua dedução a partir da equação DNLS, Lefebvre e Hada [115] escreveram o campo magnético  $B = b_y + ib_z$  como

$$B(x, t) = A(\xi, t) e^{i(k_c x - \omega_c t)}, \quad (5.4)$$

onde  $\xi = x - v_g(k_c)t$  e  $v_g(k_c)$  é a velocidade do modo mais instável. Considerando uma instabilidade fraca, eles obtiveram uma equação para a amplitude  $A$  na forma da equação GLC.

### 5.3 A Equação Kuramoto-Sivashinsky

O envelope  $A$  é uma variável complexa, e pode ser expresso em coordenadas polares, na forma

$$A = R e^{i\Phi}. \quad (5.5)$$

Uma mudança na fase  $\Phi$  corresponde a uma translação espacial do padrão [4,118].

Uma análise de estabilidade linear da equação (5.3) revela que um estado periódico uniforme

$$A_0(t) = A_0(t + T) = \sqrt{\epsilon} e^{-ic_2 \epsilon t}, \quad (5.6)$$

de período  $T$ , é estável se o critério de instabilidade Benjamin-Feir-Newell (BFN)

$$1 + c_1 c_2 > 0 \quad (5.7)$$

for satisfeito [6]. Perturbações na amplitude  $R$  e fase  $\Phi$  de  $A_0$  decaem exponencialmente com o tempo. Modos com comprimento de onda longo (com  $|k| < k_c \approx |1 + c_1 c_2|^{1/2}$ ) crescem exponencialmente se  $1 + c_1 c_2 < 0$ . Próximo à condição de instabilidade BFN, com  $1 + c_1 c_2$  um pouco menor do que zero, verifica-se a presença de caos na variação da fase  $\Phi$  de  $A$ . Nestes regimes,  $|A|$  permanece saturado, e ocorre uma predominância da dinâmica da fase. Neste caso a dinâmica do sistema pode ser descrita em termos de uma equação para a fase [117].

A equação da fase pode ser obtida considerando-se pequenas perturbações de  $A_0 = R_0 \exp(i\Phi_0)$  na forma

$$A = A_0(1 + r)e^{i\phi}, \quad (5.8)$$

ou

$$R = R_0(1 + r), \Phi = \Phi_0 + \phi. \quad (5.9)$$

Separando as partes real e imaginária da equação (5.3), inserindo a equação (5.8), e considerando uma situação em que a variação espacial e temporal de  $r$  e  $\phi$  são lentas, pode-se obter a seguinte equação para a variação da fase  $\phi$  [6,127]

$$\partial_t \phi = -|\mu| \nabla^2 \phi - \nu \nabla^4 \phi - \lambda (\nabla \phi)^2, \quad (5.10)$$

onde

$$\mu = 1 + c_1 c_2, \quad (5.11)$$

$$\nu = c_1^2(1 + c_2^2)/2, \quad (5.12)$$

$$\lambda = c_1 - c_2. \quad (5.13)$$

A equação (5.10) é conhecida como *equação Kuramoto-Sivashinsky* (equação KS). No caso unidimensional, derivando a equação (5.10) e introduzindo a variável  $u = \partial_x \phi$ , a equação KS pode ser escrita na forma

$$\partial_t u = -|\mu| \partial_x^2 u - \nu \partial_x^4 u - \lambda \partial_x(u^2), \quad (5.14)$$

O primeiro termo da direita na equação (5.14) age como uma fonte de energia para o sistema, e o segundo termo da direita é um termo dissipativo.

A equação Kuramoto-Sivashinsky foi nomeada após a sua dedução como uma equação para a dinâmica de fase da equação GLC, apresentada por Kuramoto e Tsuzuki [127], e posteriormente pela sua dedução como modelo para instabilidade em frentes de chamas, obtido por Sivashinsky [128]. No entanto, a equação KS foi primeiramente obtida como um modelo para a dinâmica de uma onda de deriva associada com oscilações de partículas aprisionadas em potenciais magnéticos em plasmas de tokamaks [129,130,131]. Ao longo dos anos, a equação KS tem sido obtida em diferentes contextos, tais como convecção Rayleigh-Bénard e escoamento de um fluido viscoso em um plano vertical [132], saturação não-linear de instabilidade Rayleigh-Taylor em filmes finos [133], e a dinâmica em escoamentos de dois fluidos sobrepostos, com viscosidades diferentes [134].

#### 5.4 Resolução Numérica da Equação KS

Nesta seção é apresentada a solução numérica da equação Kuramoto-Sivashinsky em uma dimensão espacial. Será resolvida a seguinte versão da equação KS, apresentada

por [129,130,131]

$$\partial_t u = -\partial_x^2 u - \nu \partial_x^4 u - \partial_x(u^2) \quad (5.15)$$

onde  $\nu > 0$  é um parâmetro de dissipação e  $u(x, t)$  obedece condições de contorno periódicas

$$u(x, t) = u(x + 2\pi, t). \quad (5.16)$$

Para uma abordagem de sistemas espaço-temporais baseada no formalismo de sistemas dinâmicos o procedimento padrão consiste em decompor o problema original, representado por uma equação diferencial parcial, em um conjunto de equações diferenciais ordinárias. Um dos métodos mais utilizados com esse fim é a projeção Galerkin [135,136,137,138]. Pelo método Galerkin, a função  $u(x, t)$  é representada por uma soma de coeficientes em função do tempo  $t$  multiplicados por elementos de um conjunto de funções ortogonais que dependem de  $x$

$$u(x, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k(t) \varphi_k(x). \quad (5.17)$$

A periodicidade das condições de contorno faz com que a equação 5.15 admita o uso de uma representação por série de Fourier

$$u(x, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k(t) e^{ikx}. \quad (5.18)$$

onde  $b_k$  são coeficientes complexos. Como  $u(x, t)$  é real,  $b_{-k} = b_k^*$ , onde  $b_k^*$  denota o complexo conjugado de  $b_k$ . Substituindo a equação 5.18 na equação 5.15 obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k(t) e^{ikx} \right) &= -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k(t) e^{ikx} \right) - \nu \frac{\partial^4}{\partial x^4} \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k(t) e^{ikx} \right) + \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial x} \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k(t) e^{ikx} \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_m(t) e^{imx} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k(t) e^{ikx} \right) &= -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k(t) e^{ikx} \right) - \nu \frac{\partial^4}{\partial x^4} \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k(t) e^{ikx} \right) + \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial x} \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_k(t) b_m(t) e^{ix(k+m)} \right). \end{aligned} \quad (5.19)$$

Calculando as derivadas, obtém-se:

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{b}_k e^{ikx} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} k^2 b_k e^{ikx} - \nu \sum_{k=-\infty}^{\infty} k^4 b_k e^{ikx} + \\ &\quad - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} i(k+m) b_k b_m e^{ix(k+m)}. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Seja  $\mathcal{F}$  o espaço de funções  $2\pi$ -periódicas. No espaço  $\mathcal{F}$  o produto interno é dado por [139]:

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(x) g^*(x) dx. \quad (5.21)$$

Representando a equação (5.20) por  $f(\sum b_k \varphi_k)$ , o método Galerkin requer que a seguinte condição seja satisfeita:

$$\langle f(\sum b_k \varphi_k), \varphi_l \rangle = 0, \quad l = -\infty, \dots, \infty. \quad (5.22)$$

Logo, multiplicando a equação (5.20) por  $e^{-ilx}$ , com  $l = -\infty, \dots, \infty$ , e integrando de 0 a  $2\pi$ , tem-se:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{b}_k e^{ikx} e^{-ilx} dx &- \int_0^{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} k^2 b_k e^{ikx} e^{-ilx} dx + \\ &+ \int_0^{2\pi} \nu \sum_{k=-\infty}^{\infty} k^4 b_k e^{ikx} e^{-ilx} dx + \\ &+ \int_0^{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} i(k+m) b_k b_m e^{ix(k+m)} e^{-ilx} dx = 0. \end{aligned}$$

Simplificando,

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{b}_k e^{ix(k-l)} dx &= \int_0^{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} k^2 b_k e^{ix(k-l)} dx + \\
&+ \int_0^{2\pi} \nu \sum_{k=-\infty}^{\infty} k^4 b_k e^{ix(k-l)} dx + \\
&+ \int_0^{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} i(k+m) b_k b_m e^{ix(k+m-l)} dx = 0. \quad (5.23)
\end{aligned}$$

Cada integral da função exponencial é nula exceto quando o expoente é zero (ortogonalidade dos modos de Fourier). Os três primeiros expoentes da equação (5.23) são zero quando  $k = l$ . Neste caso a integral é  $\int_0^{2\pi} e^0 dx = 2\pi$ . Para o termo não-linear, o expoente se anula quando  $k = l - m$ . A equação (5.23) passa a ser

$$\dot{b}_l 2\pi = l^2 b_l 2\pi - \nu l^4 b_l 2\pi - \sum_{m=-\infty}^{\infty} i(l - m + m) b_{l-m} b_m 2\pi. \quad (5.24)$$

Simplificando,

$$\dot{b}_l = l^2 b_l - \nu l^4 b_l - il \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_{l-m} b_m \quad l = -\infty, \dots, \infty. \quad (5.25)$$

Rearranjando e trocando a nomenclatura ( $l \rightarrow k$ ):

$$\dot{b}_k = (k^2 - \nu k^4) b_k - ik \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_m b_{k-m}, \quad k = -\infty, \dots, \infty \quad (5.26)$$

Na prática, considera-se um sistema com um truncamento de  $N$  modos

$$\dot{b}_k = (k^2 - \nu k^4) b_k - ik \sum_{m=-N}^N b_m b_{k-m}, \quad k = -N, \dots, N \quad (5.27)$$

Os coeficientes  $b_k$  na equação (5.27) são complexos. Uma simplificação comumente utilizada consiste em restringir a análise ao subespaço de soluções ímpares,  $u(x, t) =$

$-u(-x, t)$ . É possível mostrar que se a condição inicial  $u(x, 0)$  for uma função ímpar, a solução da equação (5.15) (ou, equivalentemente, da equação (5.27)) permanece ímpar durante todo o tempo [3]

$$u(x, t) = -u(-x, t), \quad \forall x, t. \quad (5.28)$$

A transformada de Fourier de uma função ímpar possui coeficientes puramente imaginários. Fazendo

$$b_k = -\frac{1}{2}ia_k, \quad (5.29)$$

onde  $a$  é um número real, tem-se a representação em série de senos [140]

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^N a_k(t)\sin(kx), \quad (5.30)$$

suficiente para representar funções ímpares. Fazendo a substituição da equação (5.29) na equação (5.27), obtém-se

$$-\frac{i\dot{a}_k}{2} = (k^2 - \nu k^4) \left(-\frac{ia_k}{2}\right) - ik \sum_{m=-N}^N \left(-\frac{ia_m}{2}\right) \left(-\frac{ia_{k-m}}{2}\right). \quad (5.31)$$

Simplificando,

$$\dot{a}_k = (k^2 - \nu k^4)a_k - \frac{k}{2} \sum_{m=-N}^N a_m a_{k-m}, \quad k = -N, \dots, N. \quad (5.32)$$

A equação (5.32), primeiramente apresentada em [141], inclui uma série de operações desnecessárias, pois envolvem valores de  $a_{k-m}$  para  $(k-m) < -N$  ou  $(k-m) > N$  no cálculo dos termos não-lineares. Tais coeficientes são nulos. Uma otimização pode ser feita de maneira a evitar que isso ocorra. Primeiramente, como  $u(x, t)$  é real, não é necessário integrar nem armazenar os modos com  $k$  negativo. Lembrando

que  $b_k = b_{-k}^*$ , tem-se que  $-ia_k/2 = ia_{-k}/2$ . Sendo assim, pode-se fazer

$$\begin{aligned} b_k &= -\frac{1}{2}ia_k \quad \text{para } 1 \leq k \leq N \\ &= \frac{1}{2}ia_{-k} \quad \text{para } -N \leq k \leq -1 \\ &= 0 \quad \text{caso contrário} \end{aligned} \quad (5.33)$$

Substituindo (5.33) em (5.27), obtém-se

$$\dot{a}_k = (k^2 - \nu k^4)a_k - \frac{k}{2} \left( \sum_{m=-N}^{-1} a_{-m}a_{m-k} + \sum_{m=1}^N a_m a_{k-m} \right), \quad (5.34)$$

com  $k = 1, \dots, N$ . Uma vez que  $ia_k = -ia_{-k}$ , não é necessário integrar os modos  $k = -N, \dots, -1$ . Além disso,  $\dot{a}_0 = 0$ . Para excluir os modos com  $k < -N$  e  $k > N$  do cálculo dos termos não-lineares, a equação (5.34) pode ser escrita como:

$$\dot{a}_k = (k^2 - \nu k^4)a_k - \frac{k}{2} \left( \sum_{m=k-N}^{-1} -a_{-m}a_{k-m} + \sum_{m=1}^{k-1} a_m a_{k-m} + \sum_{m=k+1}^N -a_m a_{m-k} \right), \quad (5.35)$$

ou

$$\dot{a}_k = (k^2 - \nu k^4)a_k + \frac{k}{2} \left( \sum_{m=k-N}^{-1} a_{-m}a_{k-m} - \sum_{m=1}^{k-1} a_m a_{k-m} + \sum_{m=k+1}^N a_m a_{m-k} \right), \quad (5.36)$$

com  $k = 1, \dots, N$ . Uma implementação em FORTRAN para a resolução numérica da equação K-S com a forma da equação (5.36), pode ser encontrada em [78].

O primeiro somatório na equação (5.36) é iniciado em  $k - N$  e não em  $-N$  porque o termo  $a_{k-m}$  é 0 sempre que  $m < k - N$ . Note-se que foi usada a substituição  $-a_{k-m} = a_{m-k}$ . O segundo somatório refere-se aos termos em que os índices  $k - m$  são positivos. A partir de  $m = k + 1$ , os termos  $a_{m-k}$  possuem índices negativos, razão pela qual a propriedade  $a_{k-m} = -a_{m-k}$  é utilizada no terceiro somatório.

A dinâmica não-linear da equação Kuramoto-Sivashinsky será estudada no espaço de fase definido pelos coeficientes de Fourier. Os padrões espaço-temporais  $u(x, t)$

correspondentes podem ser obtidos por

$$u(x, t) = \sum_{k=-N}^N b_k(t) e^{ikx}. \quad (5.37)$$

## 5.5 Análise de Estabilidade

Para analisar a estabilidade linear da equação KS, considere-se a parte linear da equação (5.36)

$$\dot{a}_k = (k^2 - \nu k^4) a_k. \quad (5.38)$$

O sistema de equações diferenciais dado pela equação (5.38) pode ser representado como

$$\dot{\mathbf{a}} = \mathbf{M}\mathbf{a}, \quad (5.39)$$

onde  $\mathbf{a}$  é o vetor de coeficientes de Fourier e  $\mathbf{M}$  é uma matriz diagonal, onde  $\mathbf{M}(k, k) = (k^2 - \nu k^4)$  e todos os demais elementos são nulos.

Da equação (5.39) percebe-se que a solução trivial  $u(x, t) = 0$  é um ponto fixo da equação Kuramoto-Sivashinsky. Seguindo a Seção 2.4.1, a estabilidade do ponto fixo é determinada pelos autovalores da matriz  $\mathbf{M}$ , que nesse caso são dados pelos elementos de sua diagonal. Os autovalores da matriz  $\mathbf{M}$  são nulos quando  $k = \pm 1/\sqrt{\nu}$ . Para  $|k| > 1/\sqrt{\nu}$  os autovalores são negativos e para  $|k| < 1/\sqrt{\nu}$ , são positivos. Sendo assim, existe uma banda de modos linearmente instáveis com número de onda  $k$  dentro do intervalo  $[-1/\sqrt{\nu}, 1/\sqrt{\nu}]$ , cujas amplitudes crescem com o tempo.

O termo  $-\partial_x^2 u$  na equação (5.15) equivale ao termo  $k^2 a_k$ , com sinal positivo na equação (5.38), sendo responsável pela desestabilização dos modos com longo comprimento de onda ( $|k|$  pequeno). Este termo age como uma fonte de energia para o sistema, enquanto o termo  $-\partial_x^4 u$  ( $-\nu k^4$  na equação (5.38)) é um termo estabilizador, cujo efeito dissipativo aumenta com o número de onda  $k$ . O termo não-linear  $-\partial_x(u^2)$  na equação (5.15), equivalente a  $-k/2 \sum_{m=-N}^N a_m a_{k-m}$  na equação (5.32), realiza o

acoplamento entre os modos, sendo responsável pela saturação da instabilidade. O crescimento dos modos instáveis, de comprimentos de onda longos, excita os modos com comprimentos de onda pequenos por meio da interação não-linear. A energia transferida é dissipada pelos modos com comprimentos de onda curtos (escalas dissipativas), que são fortemente amortecidos.

## 5.6 Sistemas Dinâmicos de Dimensão Finita

O truncamento no número de modos utilizados em aproximações do tipo Galerkin tem implicações diretas nos resultados numéricos obtidos. Em geral, os modos com baixo número de onda (que representam as grandes escalas espaciais) carregam a maior parte da energia, e os modos com alto número de onda decaem rapidamente, permanecendo com valores próximos de zero durante todo o tempo. Em princípio, para uma simulação de um sistema real é necessário manter os modos com número de onda até o limite das escalas dissipativas [142]. Este limite pode ser altíssimo e computacionalmente inviável no caso de sistemas fortemente caóticos ou “turbulentos”. Aqui o termo “turbulento” é usado de maneira a indicar um comportamento fortemente caótico ou irregular na variação temporal e espacial de um sistema não-linear, com um grande número de modos instáveis envolvidos na dinâmica [6,7,141].

Modelos que utilizam truncamentos com poucos modos são mais fáceis de se estudar, mas seus resultados podem ser altamente enganosos se comparados com dados reais. Um exemplo clássico é o modelo de Lorenz [143], concebido como uma aproximação para um problema de convecção Rayleigh-Bénard. Trata-se de um truncamento com apenas três modos de Fourier para um sistema acoplado das equações Navier-Stokes e de calor. Este modelo tornou-se popular, por ser talvez o primeiro modelo de baixa dimensão para um problema atmosférico a apresentar comportamento caótico. No entanto, estudos posteriores revelaram, através de truncamentos de dimensão mais alta, que os resultados obtidos com o modelo de 3 modos não são realísticos para o problema original de Lorenz [1,5]. Não obstante, é válido lembrar que o próprio modelo de Lorenz já foi deduzido em outros contextos em que ele constitui uma

representação razoavelmente precisa para problemas reais que apresentam comportamento caótico. É o caso do trabalho de Yorke e Yorke [144], em que as equações de Lorenz foram obtidas a partir de um problema de convecção em uma região toroidal.

A relação entre o comportamento aparentemente caótico ou turbulento verificado no mundo real e o caos verificado em sistemas dinâmicos finitos permanece um problema em aberto. Do ponto de vista prático, uma simulação numérica direta das equações do problema contém um número suficiente de modos se as escalas dissipativas são bem resolvidas. Isto se manifesta como um decaimento exponencial dos números de onda mais altos. Em contraste, uma simulação mal resolvida exhibe um acúmulo de energia nos números de onda mais altos, como resultado do processo de transferência de energia [5].

Em alguns casos é possível provar que um sistema com espaço de fase de dimensão infinita possui um conjunto invariante confinado de dimensão finita chamado de *variedade inercial*, que contém o *atrator global* do sistema, ou seja, um atrator que atrai todas as condições iniciais. A dinâmica sobre a variedade inercial é equivalente à de um sistema finito de equações diferenciais ordinárias chamado de *forma inercial*. A forma inercial é uma réplica de dimensão finita do sistema original. Para cada condição inicial para o sistema original, existe alguma condição inicial sobre a variedade inercial, tal que a distância relativa entre as duas trajetórias tende a zero [145]. Embora o estudo de variedades inerciais esteja fora do escopo deste trabalho, vale mencionar que a existência de uma variedade inercial foi provada para a equação Kuramoto-Sivashinsky [2,3]. Este fato tem estimulado o estudo de aproximações de baixa dimensão para equação KS. Armbruster et al. [139] mostraram que o comportamento dinâmico de uma aproximação com 4 modos para a equação KS no regime de caos fraco concorda qualitativa e quantitativamente com soluções obtidas com 64 modos apresentadas por Hyman et al. [2,145]. Jolly et al. [146] realizaram uma série de comparações mostrando a equivalência entre diagramas de bifurcação para a equação KS com números de modos variando de 3 a 12, usando a extensão do sistema como parâmetro de controle. Para maiores informações sobre

variedades inerciais, pode-se consultar Foias et al. [142] e Temam [3].

Para a equação Kuramoto-Sivashinsky, Christiansen et al. [141] realizaram testes com  $N = 16$  e  $N = 17$  e constataram que o comportamento dinâmico em ambos os casos é basicamente o mesmo para um determinado intervalo de valores do parâmetro  $\nu$  na equação (5.15), onde observa-se a presença de uma janela periódica de período três. Os autores ressaltaram, entretanto, que existe uma pequena diferença nos valores do parâmetro de controle  $\nu$  que marcam o início e o término da janela periódica. Para  $N = 17$ , a janela é inteiramente deslocada para a esquerda por uma quantidade  $\sim 10^{-5}$ .

Com o intuito de confirmar as observações de Christiansen et al. [141], foram gerados diagramas de bifurcação para três aproximações da equação K-S com truncamentos bem distintos. Os diagramas foram construídos integrando o sistema de equações (5.36) variando o parâmetro de controle  $\nu$ . A Figura 5.3 mostra diagramas de bifurcação para (a)  $N = 16$ , (b)  $N = 32$  e (c)  $N = 64$ . O diagrama com 16 modos está consideravelmente deslocado para a esquerda em relação aos demais, o que pode ser notado pelo intervalo diferente de valores de  $\nu$ . As diferenças entre as simulações com 32 e 64 modos são praticamente imperceptíveis no diagrama de bifurcação, apesar de o uso de mais modos ser, certamente, responsável por pequenas alterações no valor dos pontos de bifurcação. Para os propósitos deste capítulo, a aproximação dada pela Figura 5.3(a), com  $N = 16$  é suficiente, uma vez que parece ser capaz de capturar qualitativamente toda a dinâmica básica da equação (5.15) para os valores de  $\nu$  utilizados. O uso de menos modos pode gerar uma dinâmica bem diferente, sendo que um atrator caótico só aparece a partir de  $N = 9$  [141].

A Figura 5.4(a) mostra a variação da amplitude dos modos de Fourier  $a_k$  para o regime caótico em  $\nu = 0.029919$  e  $N = 16$ . Percebe-se que a dinâmica maior concentra-se nos modos com  $k$  mais baixo, enquanto os demais são amortecidos. O padrão espaço-temporal correspondente é mostrado na Figura 5.4(b).

É importante ressaltar que apesar de o número de modos utilizados neste trabalho

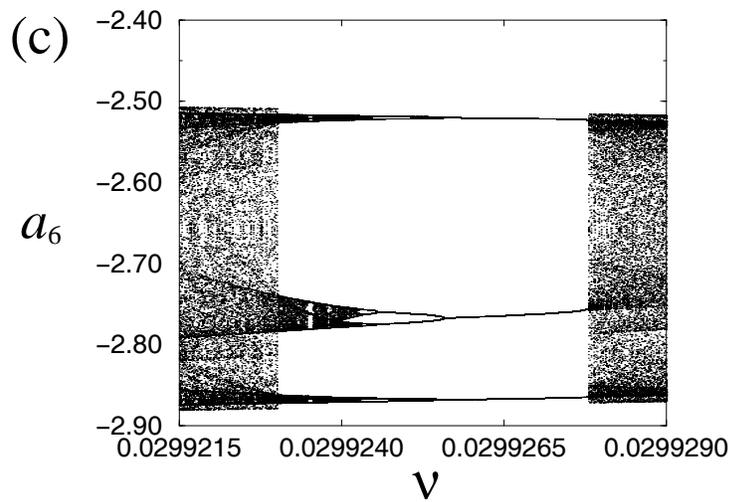
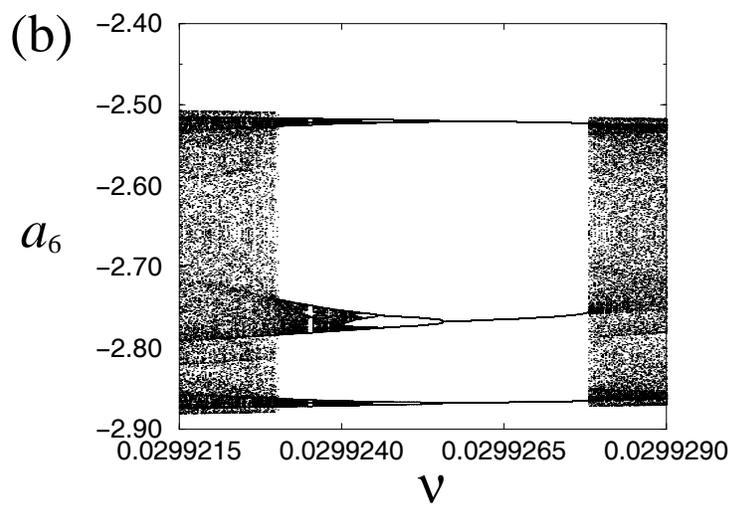
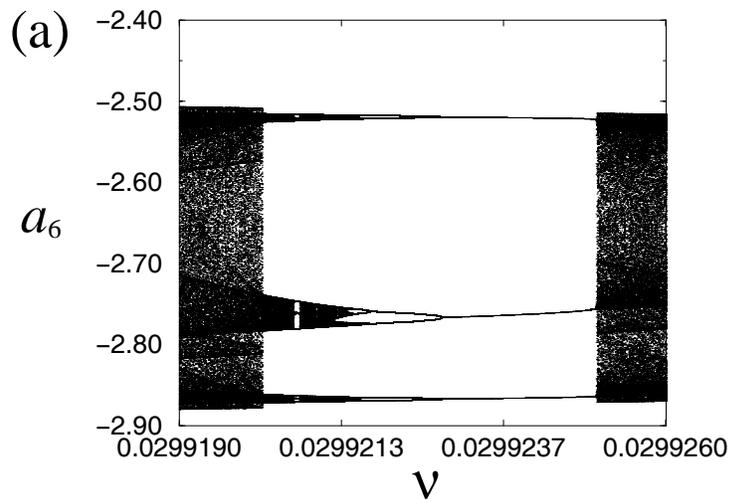


FIGURA 5.3 - Diagramas de bifurcação para a equação (5.36) com (a)  $N = 16$  modos; (b)  $N = 32$  modos; (c)  $N = 64$  modos.

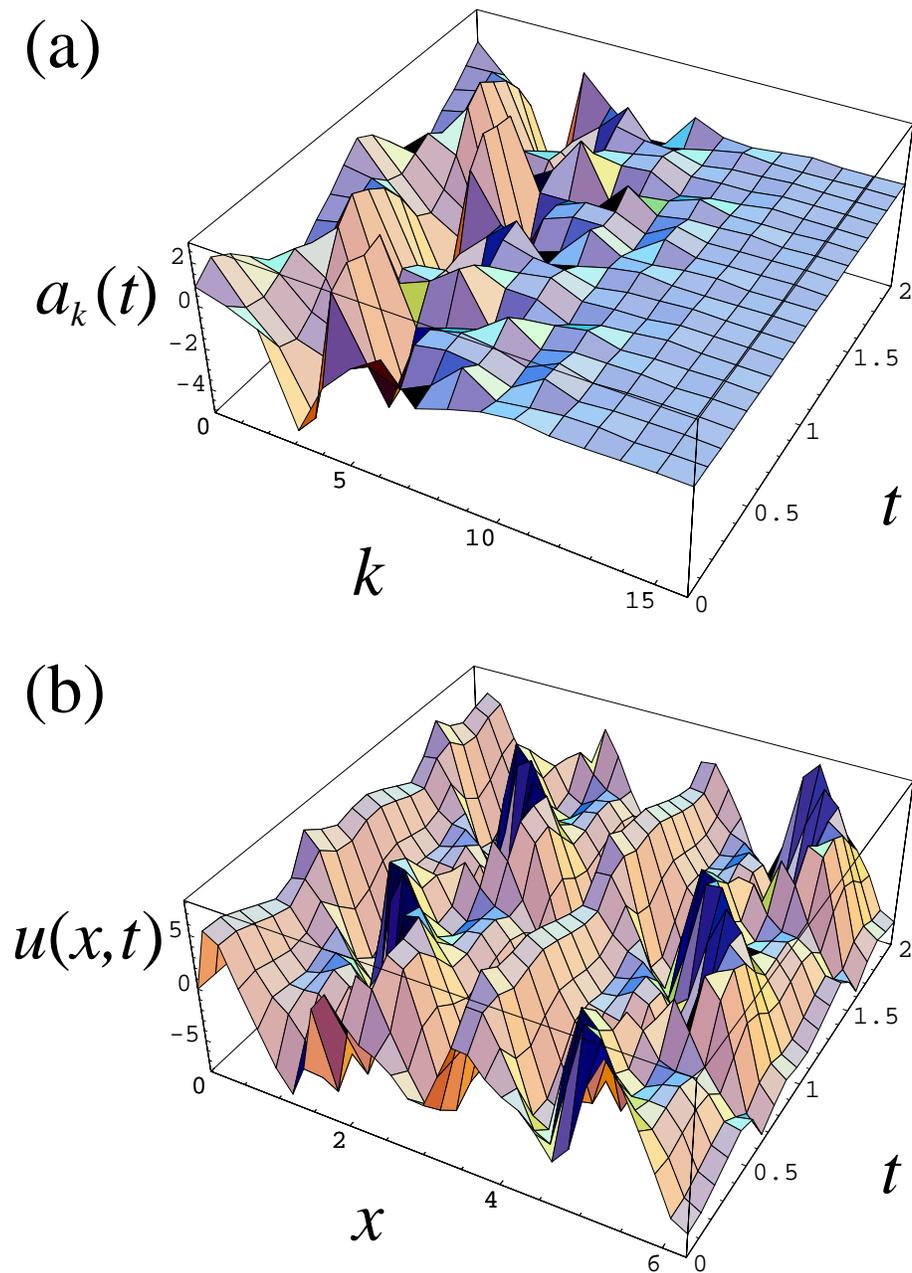


FIGURA 5.4 - (a) Variação temporal dos modos  $a_k(t)$  na equação (5.36) para  $\nu = 0.029919$  e  $N = 16$  modos; (b) variação espaço-temporal do campo  $u(x, t)$  correspondente a (a).

( $N = 16$ ) poder ser considerado baixo no contexto de simulações numéricas, ele é extremamente alto no contexto de sistemas dinâmicos, onde pouco se conhece sobre o comportamento de sistemas de dimensão  $\geq 3$ . De acordo com Holmes et al. [5], em termos de sistemas dinâmicos, um conjunto de equações é considerado de alta dimensão se  $N \geq 4$ .

## 5.7 Seção de Poincaré e Invariância a Translação

A dinâmica do sistema descrito pela equação (5.36) pode ser analisado sobre uma seção de Poincaré definida por  $a_1 = 0$ . Uma trajetória pode cruzar este hiperplano de duas maneiras: quando  $\dot{a}_1 > 0$  (da “esquerda” para a “direita”) ou quando  $\dot{a}_1 < 0$  (da “direita” para a “esquerda”). Pode-se definir um mapa  $\Theta$  da seguinte forma: tomando-se condições iniciais com  $a_1 = 0$  e valores arbitrários para os demais modos, integra-se a equação (5.36) até que  $a_1$  seja 0 novamente. As demais coordenadas são mapeadas como  $(a'_2, \dots, a'_N) = \Theta(a_2, \dots, a_N)$ . O mapa  $\Theta$  define uma transição do tipo “esquerda”-“direita” ou “direita”-“esquerda”. Se a condição inicial em  $a_1 = 0$  possui  $\dot{a}_1 > 0$ , na primeira intersecção com a seção de Poincaré (uma iteração de  $\Theta$ ),  $\dot{a}_1 < 0$  (cruzamento da “direita” para a “esquerda”). Na segunda iteração ( $\Theta^{[2]}$ ),  $\dot{a}_1 > 0$  (cruzamento da “esquerda” para a “direita”). Para a definição do mapa de Poincaré considera-se os pontos que cruzam o plano  $a_1 = 0$  sempre no mesmo sentido (“esquerda”-“direita” ou “direita”-“esquerda”). Para o restante deste capítulo será utilizado o mapa de Poincaré  $P$  definido por  $a_1 = 0$  e  $\dot{a}_1 > 0$ , de forma que  $P = \Theta^{[2]}$  para condições iniciais com  $\dot{a}_1 = 0$ . A análise sobre o plano de Poincaré reduz a dimensão do espaço de fase para  $N - 1$ .

A equação KS exhibe invariância a translação por  $\pi$  [107,141]

$$u(x, t) \rightarrow u(x + \pi, t). \quad (5.40)$$

Seja  $S$  uma operação de translação definida por  $Su(x, t) = u(x + \pi, t)$ . Em termos dos coeficientes  $a_k$  da equação (5.36), esta operação se reflete como uma mudança

no sinal dos modos ímpares

$$S : a_{2k} \rightarrow a_{2k}, a_{2k+1} \rightarrow -a_{2k+1}, \quad (5.41)$$

A invariância a translação significa que se  $A$  é um atrator para a equação (5.36), então  $SA$  também é. O atrator  $SA$  reflete a dinâmica do atrator  $A$ , de forma que se uma bifurcação ou crise ocorre em  $A$ , o mesmo ocorre em  $SA$  [5]. Assim, condições iniciais sobre o hiperplano  $a_1 = 0$  podem convergir para quatro subconjuntos sobre o hiperplano:  $A$ ,  $SA$ ,  $\Theta A$  e  $\Theta SA$ . Dois destes conjuntos pertencem ao domínio do mapa de Poincaré, com  $\dot{a}_1 > 0$  para todos os pontos do conjunto. Os outros dois refletem a ação do mapa  $\Theta$ , o que implica que  $\dot{a}_1 < 0$ . Estes são os quatro únicos subconjuntos que podem ser obtidos com as operações  $S$  e  $\Theta$ , uma vez que  $S^{[2]} = 1$ ,  $\Theta^{[2]} = P$  e as operações  $S$  e  $\Theta$  são comutativas.

A Fig 5.5 mostra um atrator caótico  $A$  e suas imagens  $SA$ ,  $\Theta A$  e  $S\Theta A$ , sob a ação dos mapas  $S$  e  $\Theta$ , para  $\nu = 0.029919$ . Resultados numéricos mostram que  $\dot{a}_1 > 0$  para  $A$  e  $S\Theta A$ , e  $\dot{a}_1 < 0$  para  $SA$  e  $\Theta A$ . Logo,  $A$  e  $S\Theta A$  pertencem ao domínio do mesmo mapa de Poincaré.

## 5.8 Crise Interior de Alta Dimensão na Equação KS

A maioria dos trabalhos teóricos sobre crises estão restritos a sistemas dinâmicos de baixa dimensão, descritos por mapas ou sistemas de duas ou três equações diferenciais ordinárias [20,24,44,45,72,73,75,77]. Nesta seção é mostrada a ocorrência de uma crise interior no espaço de fase de alta dimensão da equação (5.36), conforme reportado em Chian et al. [46]. Da mesma forma como na Seção 4.3, a crise interior é caracterizada por meio da colisão do atrator com uma órbita periódica instável.

Será utilizado um truncamento com  $N = 16$  modos para a equação (5.36). Um padrão espaço-temporal de  $u(x, t)$  em um regime caótico ( $\nu = 0.02992006$ ) é mostrado na Figura 5.6. É mostrada somente a evolução do padrão para  $0 \leq x \leq \pi$ , uma vez que os valores para  $\pi \leq x \leq 2\pi$  são os mesmos, porém com sinal invertido (soluções ímpares). Note que para o valor escolhido para o parâmetro de dissipação  $\nu$

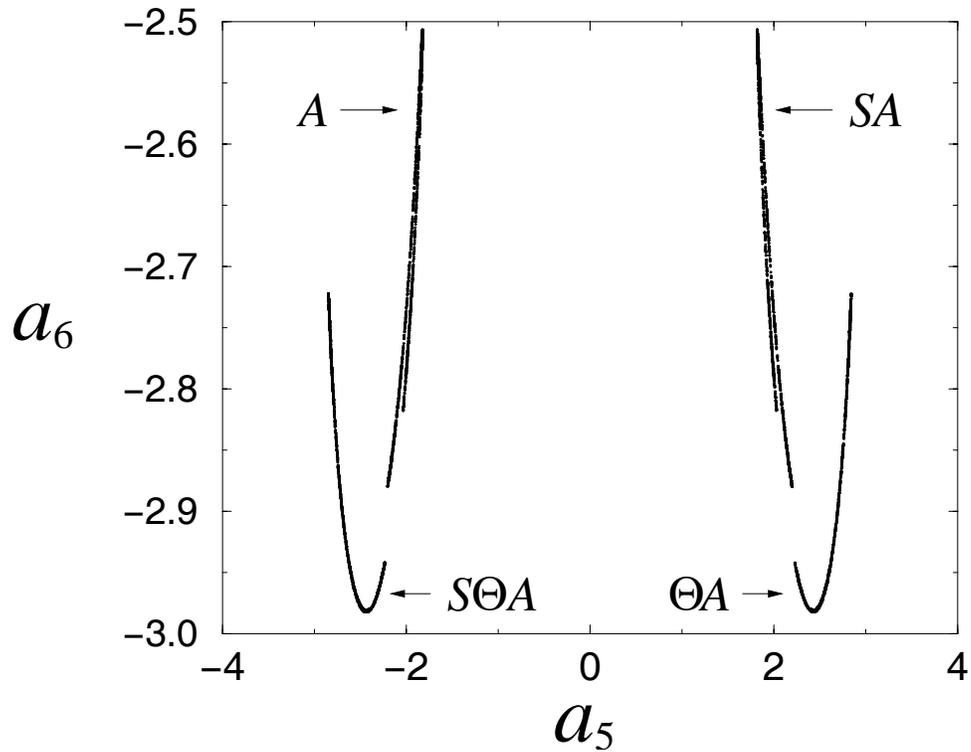


FIGURA 5.5 - Atrator caótico  $A$  e três outros conjuntos atratores sobre o hiperplano  $a_1 = 0$ , gerados pela ação dos mapas  $S$  e  $\Theta$  sobre  $A$ . O valor do parâmetro de controle é  $\nu = 0.029919$ .

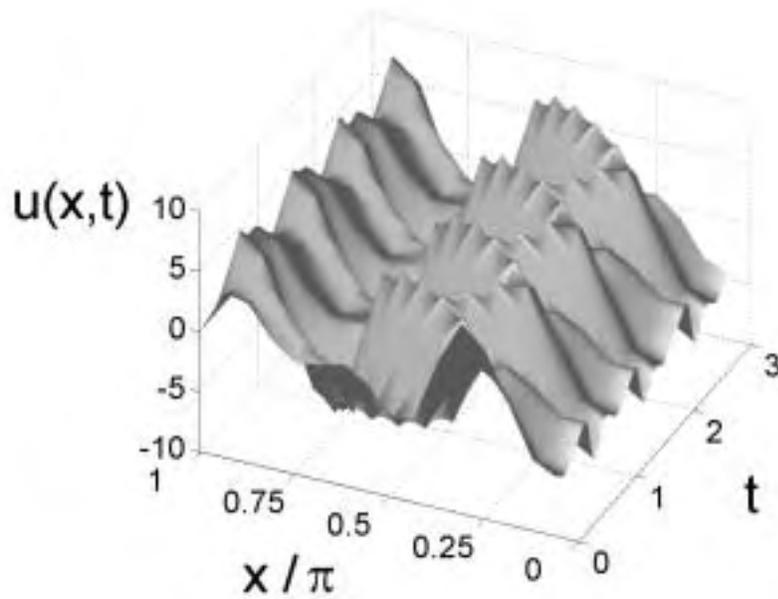


FIGURA 5.6 - Padrão espaço-temporal  $u(x, t)$  para  $\nu = 0.02992006$ .

e para a extensão do sistema  $L = 2\pi$ , a dinâmica da equação Kuramoto-Sivashinsky é caótica no tempo, mas mantém estruturas espacialmente coerentes [141].

A Figura 5.7(a) exibe o diagrama de bifurcação do atrator  $A$  da Seção 5.7, com a janela periódica de período 3 mostrada anteriormente na Figura 5.3(a). Para cada valor de  $\nu$  são exibidos os valores do modo  $a_6$  de 300 pontos de Poincaré da trajetória, após descartado um transiente inicial de 250 iterações. SN denota a bifurcação sela-nó e IC denota crise interior. As linhas pontilhadas indicam os pontos de Poincaré da órbita periódica instável de período 3 criada na bifurcação sela-nó em  $\nu_{SNB} \sim 0.02992498$ . Esta é a órbita mediadora da crise interior, que ocorre em  $\nu_{IC} \sim 0.02992021$ . O comportamento do maior expoente de Lyapunov  $\lambda_{max}$  dentro da janela periódica é mostrado na Figura 5.7(b). A dinâmica temporal da equação KS neste intervalo de  $\nu$  preserva as características típicas de um sistema dinâmico de baixa dimensão.

Para a obtenção de  $\lambda_{max}$  foi utilizado o algoritmo de Wolf [62]. Como o algoritmo de Wolf requer a integração das equações do sistema em conjunto com a equação

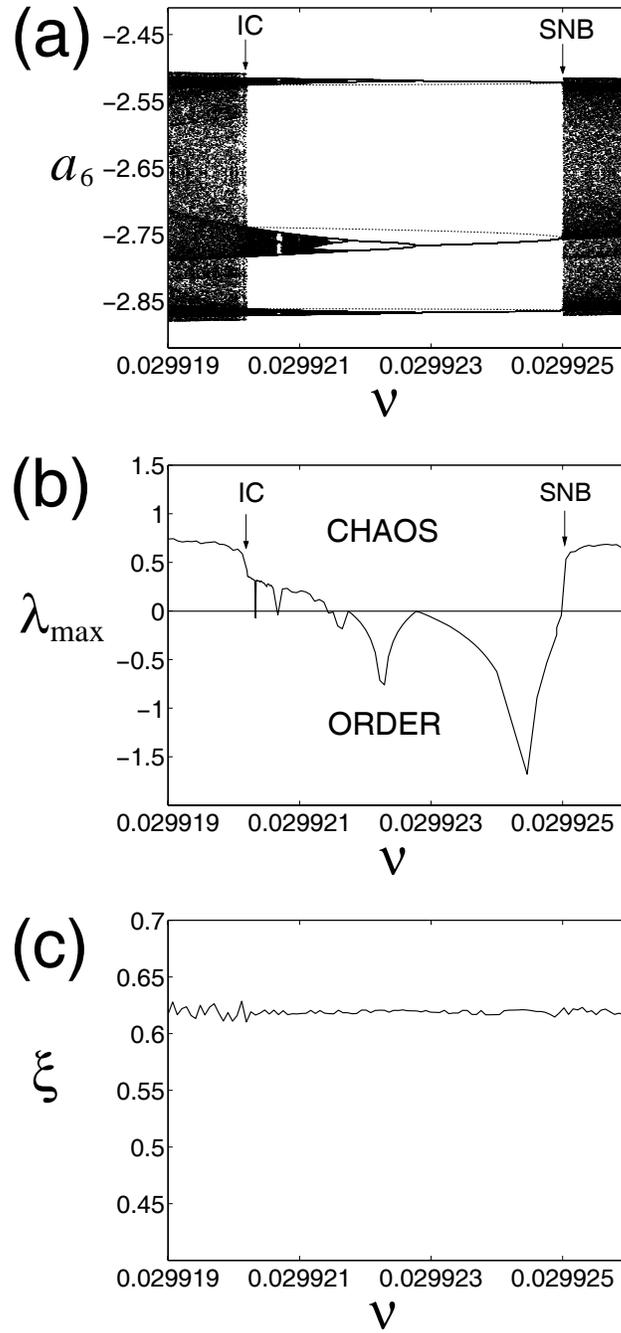


FIGURA 5.7 - (a) Diagrama de bifurcation diagram de  $a_6$  em função de  $\nu$ . IC denota crise interior e SNB denota bifurcação sela-nó. As linhas pontilhadas representam a órbita periódica instável de período 3; (b) variação do expoente de Lyapunov máximo  $\lambda_{\max}$  com  $\nu$ ; (c) variação do comprimento de correlação  $\xi$  com  $\nu$ .

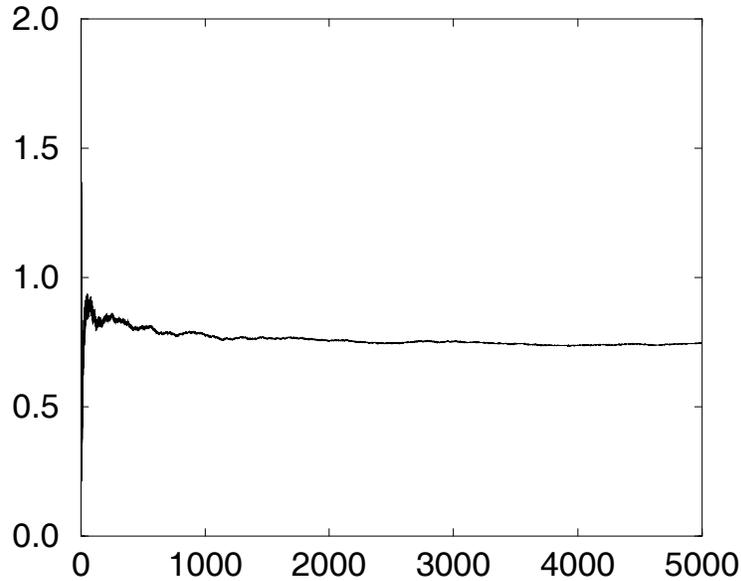


FIGURA 5.8 - Variação do expoente de Lyapunov máximo da equação (5.36) em função do tempo para  $\nu = 0.029919$ .

variacional para a obtenção da Jacobiana do fluxo (ver Seção 2.4.2.1), é necessário integrar um sistema de  $N(N + 1)$  equações diferenciais ordinárias para cada valor de  $\nu$  por um tempo suficiente para que haja convergência no valor de  $\lambda$ . A Figura 5.8 ilustra a convergência do algoritmo após  $t = 5000$  para  $\nu = 0.029919$ .

Para o intervalo de valores de  $\nu$  mostrado na Figura 5.7 a equação KS é fortemente dissipativa, com no máximo 1 expoente de Lyapunov positivo. A dimensão de Lyapunov do atrator caótico (ver Seção 2.5) em  $\nu = 0.029919$  é  $D_L \approx 2.09$ . O atrator apresenta comportamento típico de caos em sistemas de baixa dimensão. Para sistemas espaço-temporais, isto implica em uma manutenção de um alto grau de coerência espacial, mesmo em regimes temporalmente caóticos. O grau de coerência/desordem espacial pode ser medido pelo comprimento de correlação  $\xi$  [147].  $\xi$  é o comprimento além do qual o movimento é basicamente não-correlacionado.

Existem diversas maneiras de se calcular o comprimento de correlação médio de uma série espaço-temporal. Neste trabalho foi utilizado o cálculo a partir do fator de estrutura de seqüências de padrões, que tem se mostrado uma forma simples e

bem definida de se medir a desordem espacial das seqüências (ver Hu et al. [148] e referências internas).

Usando uma notação discreta  $u(x, t) = u(j\Delta x, t)$ , para inteiros  $j$  e distância  $\Delta x$  entre dois pontos de uma grade unidimensional com  $N$  pontos, a transformada de Fourier de um padrão  $u(x, t)$  para um sistema de extensão  $L = N\Delta x$  qualquer é dada por

$$u(j\Delta x, t) = \sum_{k=1}^N a_k(t) e^{ij\Delta x k 2\pi / (N\Delta x)}.$$

O comprimento de correlação pode ser obtido pelo fator de estrutura

$$S(k) = \langle |a_k(t)|^2 \rangle,$$

onde

$$a_k(t) = \sum_{j=1}^N u(j\Delta x, t) e^{-ij\Delta x k 2\pi / (N\Delta x)} = \sum_{j=1}^N u(j\Delta x, t) e^{-ijk 2\pi / N}.$$

Os colchetes  $\langle \rangle$  representam uma média no tempo, e o número de onda é dado por  $2\pi k / (N\Delta x)$ . Para o cálculo da média temporal de  $S(k)$ , é necessário que os dados utilizados sejam temporalmente não-correlacionados. Isto pode ser feito através de uma média entre os valores obtidos com condições iniciais diferentes [6,149] ou obtendo a média temporal de uma única série espaço-temporal com um longo espaço de tempo entre uma amostra e outra da série, de maneira que imagens sucessivas sejam aproximadamente não-correlacionadas [150,151]. Neste trabalho foi usada apenas uma série, sendo calculada a média sobre 100 amostras da série obtidas com 2000 passos de integração (20 unidades de tempo) entre cada uma, ou seja, após ser

descartado um transiente inicial de 20000 iterações, foram armazenados os valores de  $a_k(t)$  a cada 2000 iterações, e ao final obteve-se a média.

O inverso da largura do fator de estrutura é uma medida quantitativa da escala espacial das estruturas coerentes. Se os padrões possuem uma estrutura de banda larga nas suas transformadas de Fourier, isto contribui para um alargamento do fator de estrutura e uma redução do comprimento de correlação [150]. O comprimento de correlação é dado por Elder et al. [149] e por Morris et al. [150] como sendo

$$\xi = \frac{2}{w}$$

onde  $w$  é a largura do fator de estrutura. Normalmente,  $\xi$  é definido como sendo o raio de correlação espacial. No caso de um sistema 2D, a área de correlação é dada pela área do círculo ( $\pi\xi^2$ ) [152]. O valor de  $\xi$  é exibido na Figura 5.7(c). Neste caso  $\xi$  é uma medida do tamanho médio das estruturas vistas na Figura 5.6. O valor médio de  $\xi$  para os regimes temporalmente caóticos é aproximadamente o mesmo que para os regimes periódicos, o que reflete a manutenção de estruturas espaciais semelhantes em ambos os regimes, com conseqüente manutenção da coerência espacial.

Como em sistemas de baixa dimensão, a crise interior indicada por IC na Figura 5.7(a) ocorre quando a órbita mediadora colide com o atrator caótico fraco que é formado a partir de uma cascata de duplicação de período. A órbita mediadora foi encontrada com o método de Newton. Logo após a colisão o atrator se expande. A Figura 5.9 mostra uma projeção tridimensional ( $a_1, a_{10}, a_{16}$ ) do atrator caótico forte (linhas claras) definido no hiperplano de Poincaré de 15-dimensões logo após a crise ( $\nu = 0.02992020$ ), sobreposto pelo atrator caótico fraco (linhas escuras) no momento da crise ( $\nu_{IC}$ ). A crise interior é caracterizada por um aumento descontínuo no valor do expoente de Lyapunov máximo, como indicado na Figura 5.7(b). No ponto de crise ( $\nu_{IC}$ )  $\lambda_{max} = 0.35$ , sendo que após a crise em  $\nu = 0.02992006$   $\lambda_{max} = 0.62$ . Logo, a crise interior em consideração resulta em um aumento súbito no grau de caoticidade temporal da equação Kuramoto-Sivashinsky.

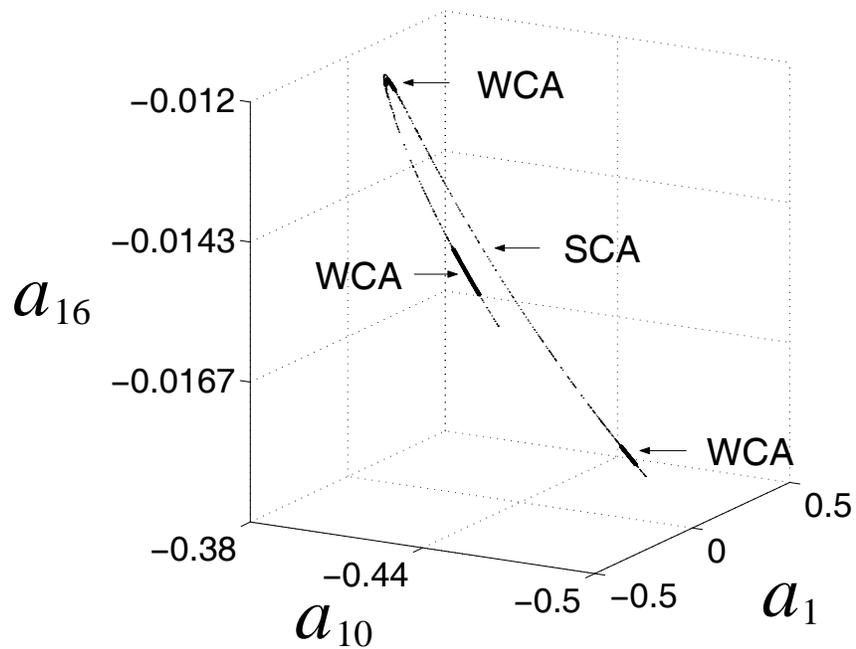


FIGURA 5.9 - Projeção tridimensional ( $a_1$ ,  $a_{10}$ ,  $a_{16}$ ) do atrator caótico forte SCA (linhas claras) definido no plano de Poincaré de 15 dimensões logo após a crise em  $\nu = 0.02992020$ , sobreposto pelo atrator caótico fraco WCA (linhas escuras) na crise ( $\nu = 0.02992021$ ).

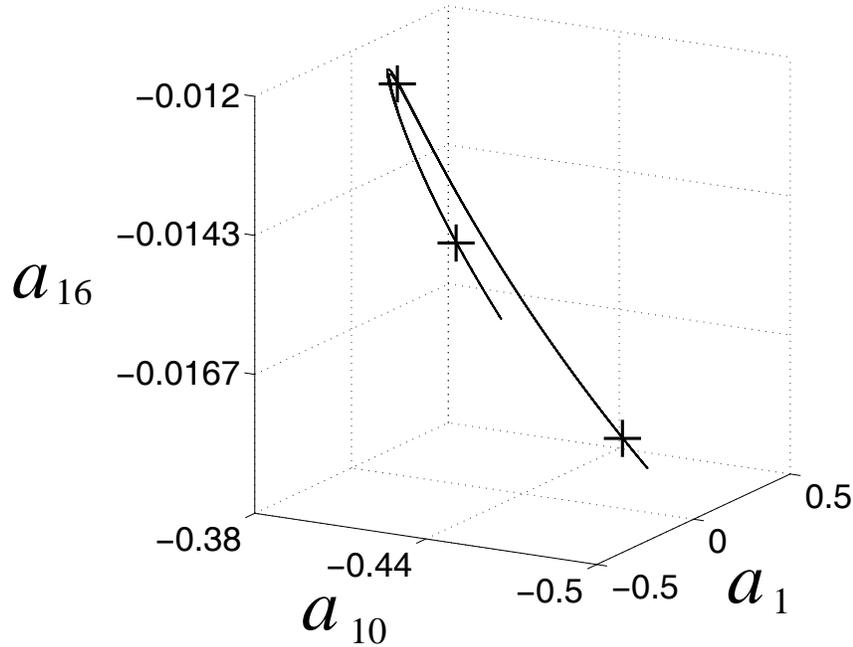


FIGURA 5.10 - Projeção tridimensional  $(a_1, a_{10}, a_{16})$  da variedade instável da órbita periódica instável de período-3 (cruzes) logo após a crise interior em  $\nu = 0.02992020$ .

Em  $\nu_{IC}$  a matriz Jacobiana do fluxo sobre um ponto da órbita periódica instável mediadora da crise possui somente um autovalor com valor absoluto maior do que 1, o que implica que a variedade instável da órbita mediadora é unidimensional (uma linha). Dentre os demais autovalores, um possui valor absoluto igual a 1 e todos os demais 14 possuem valores menores do que 1, o que implica que a variedade estável possui dimensão 14. Uma vez que o algoritmo YKY descrito na Seção 3.2 só é capaz de encontrar variedades unidimensionais, nesta seção é calculada apenas a variedade instável da órbita mediadora. O cálculo de variedades estáveis de alta dimensão para órbitas periódicas instáveis é uma tarefa extremamente complicada, sendo tratada na próxima seção. A Figura 5.10 é uma projeção tridimensional  $(a_1, a_{10}, a_{16})$  da variedade instável do ponto de sela de período 3 (denotado por 3 cruces) logo após a crise ( $\nu = 0.02992020$ ), computada com o algoritmo YKY.

Na Figura 5.11 é mostrada a colisão do atrator estranho fraco com a órbita periódica

instável de período três em uma projeção bidimensional do plano de Poincaré ( $a_5$  vs.  $a_6$ ), na vizinhança do ponto fixo superior na Figura 5.10. A linha espessa representa o atrator caótico e as linhas finas representam a variedade instável do ponto de sela. As Figuras 5.11(a)-(c) mostram os conjuntos invariantes antes da crise, no momento da crise e depois da crise, respectivamente. O atrator caótico sempre se estende ao longo da direção instável do sistema. No momento da crise (5.11(b)) o atrator caótico colide com a órbita periódica instável, ao mesmo tempo em que coincide com um dos ramos da variedade instável do ponto de sela (ver Seção 2.9). A colisão leva a uma expansão súbita do atrator caótico, que agora se estende ao longo dos dois ramos da variedade instável do ponto de sela, como mostrado na Figura 5.11(c). Uma comparação entre as Figuras 5.9 e 5.10 indica que, após a crise, o atrator caótico é o fechamento da variedade instável da órbita mediadora.

## 5.9 Selas Caóticas na Equação KS

Na seção anterior foi mostrado que uma crise interior de alta dimensão pode ser encontrada em um sistema espacialmente estendido exemplificado pela equação Kuramoto-Sivashinsky. Nesta seção é descrito um método para estudar o papel de selas caóticas em espaços de fase de alta dimensão. Introduzimos uma técnica para visualizar a tangência entre o atrator caótico e a variedade estável de uma sela caótica na crise interior descrita na seção anterior. Como resultado, pode-se mostrar uma tangência homoclínica de alta dimensão. Os resultados obtidos, encontrados nas referências [153,154], mostram que os comentários feitos na Seção 4.4 sobre selas caóticas em sistemas de baixa dimensão se aplicam também a este exemplo.

A Figura 5.12(a) mostra a variação da sela caótica (cinza) em função de  $\nu$ , sobreposta pelo diagrama de bifurcação do atrator (preto) para a janela periódica p-3 mostrada na Seção 5.8. Para cada valor de  $\nu$  foi encontrada uma trajetória próxima da sela caótica usando o algoritmo PIM triple com  $\delta = 10^{-6}$  (ver Seção 3.3.2). A linha tracejada denota a órbita periódica instável mediadora da crise, criada pela bifurcação sela-nó (SNB) em  $\nu = \nu_{SNB} \sim 0.02992498$ . Tal qual na Seção 4.4, a

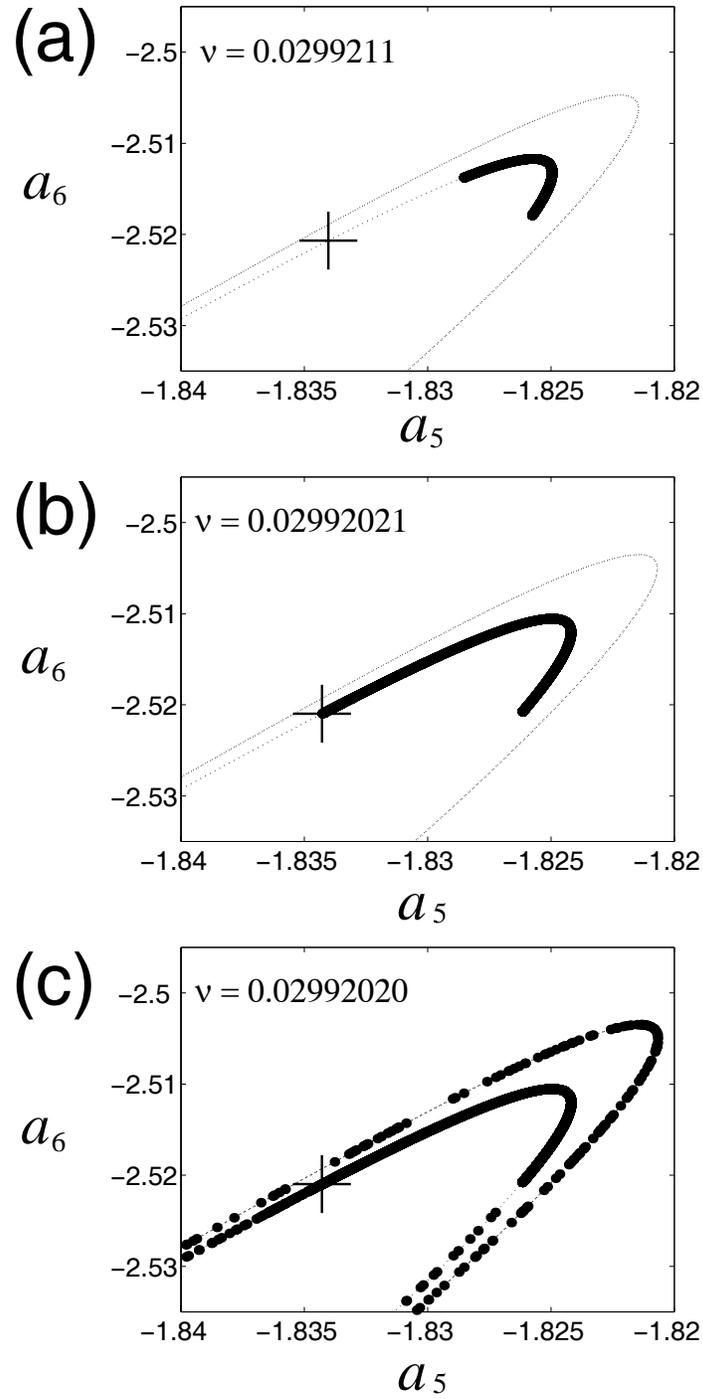


FIGURA 5.11 - Atrator caótico (linha espessas) e a variedade estável (linhas finas) do ponto de sela (a) antes da crise, (b) no momento da crise e (c) após a crise. A cruz denota um dos pontos de sela da órbita mediadora de período três.

região ocupada pelo atrator na janela periódica é chamada de região B e a região ao seu redor, ocupada pela sela caótica é chamada de região S. Pode-se perceber alguns espaços vazios na sela caótica na região S (SCS) ao longo da janela periódica. Após a colisão com a órbita mediadora, o atrator caótico perde sua estabilidade assintótica, sendo convertido em uma sela caótica na região B, imersa num atrator caótico muito maior. Na Figura 5.12(b) é exibida parte do diagrama de bifurcação antes de IC ( $\nu > \nu_{IC}$ ), e após IC ( $\nu < \nu_{IC}$ ) é mostrada a variação da sela caótica na região B (BCS). Pode-se ver que os espaços nesta sela caótica tornam-se mais aparentes à medida em que  $\nu$  é decrescido, afastando-se de  $\nu_{IC}$ .

Como mencionado no capítulo 4, para valores de  $\nu < \nu_{IC}$  e  $\nu > \nu_{SNB}$  a sela caótica SCS encontra-se imersa no atrator caótico. Como exemplo, a Figura 5.13 mostra uma projeção tridimensional ( $a_1, a_{10}, a_{16}$ ) da sela caótica definida no hiperplano de Poincaré de 15 dimensões antes da bifurcação sela-nó, em  $\nu = 0.029925 > \nu_{SNB}$ .

Na Figura 5.14 foi adotada a projeção bidimensional ( $a_5, a_6$ ) para visualizar a dinâmica na vizinhança de  $\nu_{SNB}$ . Para  $\nu = 0.0299249 < \nu_{SNB}$ , logo após SNB, o atrator é uma órbita periódica estável de período 3. Um dos três pontos de Poincaré da órbita é mostrado como uma cruz na Figura 5.14(a). A sela caótica S é exibida em linhas escuras. Esta sela possui um grande espaço vazio ao redor do ponto periódico. Existe uma infinidade de outros espaços vazios em SCS, a maioria dos quais não são visíveis na Figura 5.14(a) devido ao seu pequeno tamanho. Quando  $\nu$  é aumentado além de  $\nu_{SNB}$  o atrator periódico desaparece devido à sua coalescência com uma órbita periódica instável de período 3 na bifurcação sela-nó, e um atrator caótico (CA) aparece, como mostrado na Figura 5.14(b) para  $\nu = 0.029925$ . O atrator caótico na Figura 5.14(b) não possui os vazios encontrados em SCS para  $\nu < \nu_{SNB}$  (Figura 5.14(a)). Eles são subitamente preenchidos por pontos recorrentes criados numa explosão ocorrida na bifurcação sela-nó. A sela caótica encontrada neste regime pré-SNB (Figura 5.13) forma um subconjunto do atrator caótico. O atrator caótico pré-SNB contém o conjunto de órbitas periódicas instáveis pertencentes à sela caótica pré-SNB mais um conjunto de órbitas periódicas estáveis criadas pela

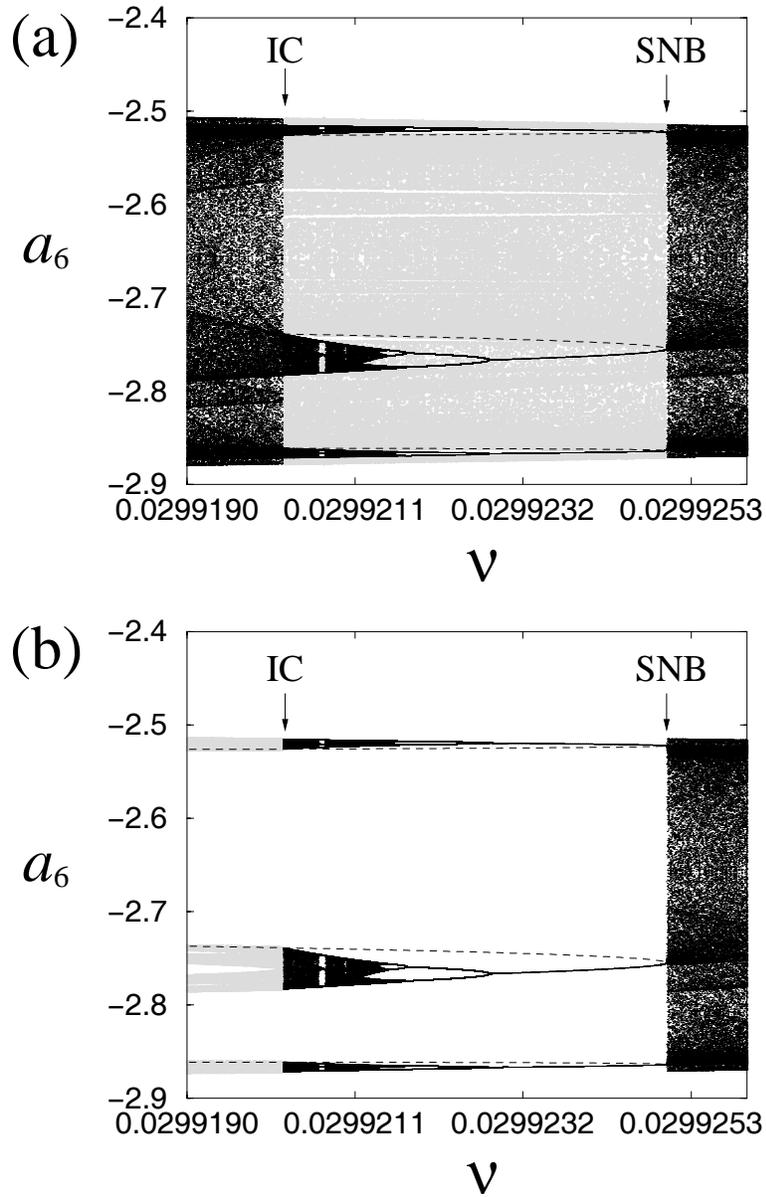


FIGURA 5.12 - (a) Variação de  $a_6$  para a sela caótica (cinza) em função de  $\nu$ , sobreposta pelo diagrama de bifurcação do atrator (preto) em uma janela periódica de período 3. IC denota crise interior e SNB denota bifurcação sela-nó. As linhas tracejadas denotam a órbita periódica instável p-3, mediadora da crise. (b) O mesmo que (a), mas mostrando a conversão do atrator caótico pré-IC em uma sela caótica na região B após IC.

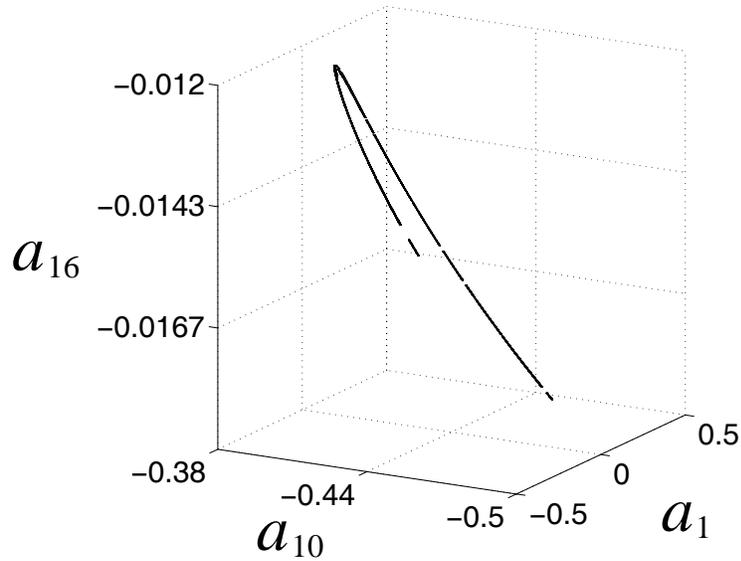


FIGURA 5.13 - Projeção tridimensional  $(a_1, a_{10}, a_{16})$  da sela caótica definida no hiperplano de Poincaré de 15 dimensões logo antes da bifurcação sela-nó, em  $\nu = 0.029925$ .

explosão.

### 5.9.1 Visualização de uma Tangência Homoclínica de Alta Dimensão

Esta seção detalha o que ocorre na crise interior em  $\nu_{IC}$ , mostrando que o atrator caótico colide com a variedade estável da sela caótica  $S$ . É elaborado um método para visualizar uma tangência homoclínica de alta dimensão usando uma escolha apropriada de uma grade de condições iniciais para o algoritmo sprinkler, com o intuito de exibir uma projeção bidimensional da variedade estável da sela caótica  $S$  na vizinhança do atrator caótico.

Em Lai e Winslow [14], o método sprinkler foi utilizado para encontrar as variedades estáveis de uma sela caótica em um espaço de fase de alta dimensão de um mapa acoplado. Eles usaram uma grade bidimensional de condições iniciais, gerada variando-se os valores de duas das 20 variáveis de estado enquanto as demais foram mantidas com valores fixos. Esta estratégia não é adequada para o problema abordado nesta seção, uma vez que aqui o objetivo é mostrar a tangência entre o atrator

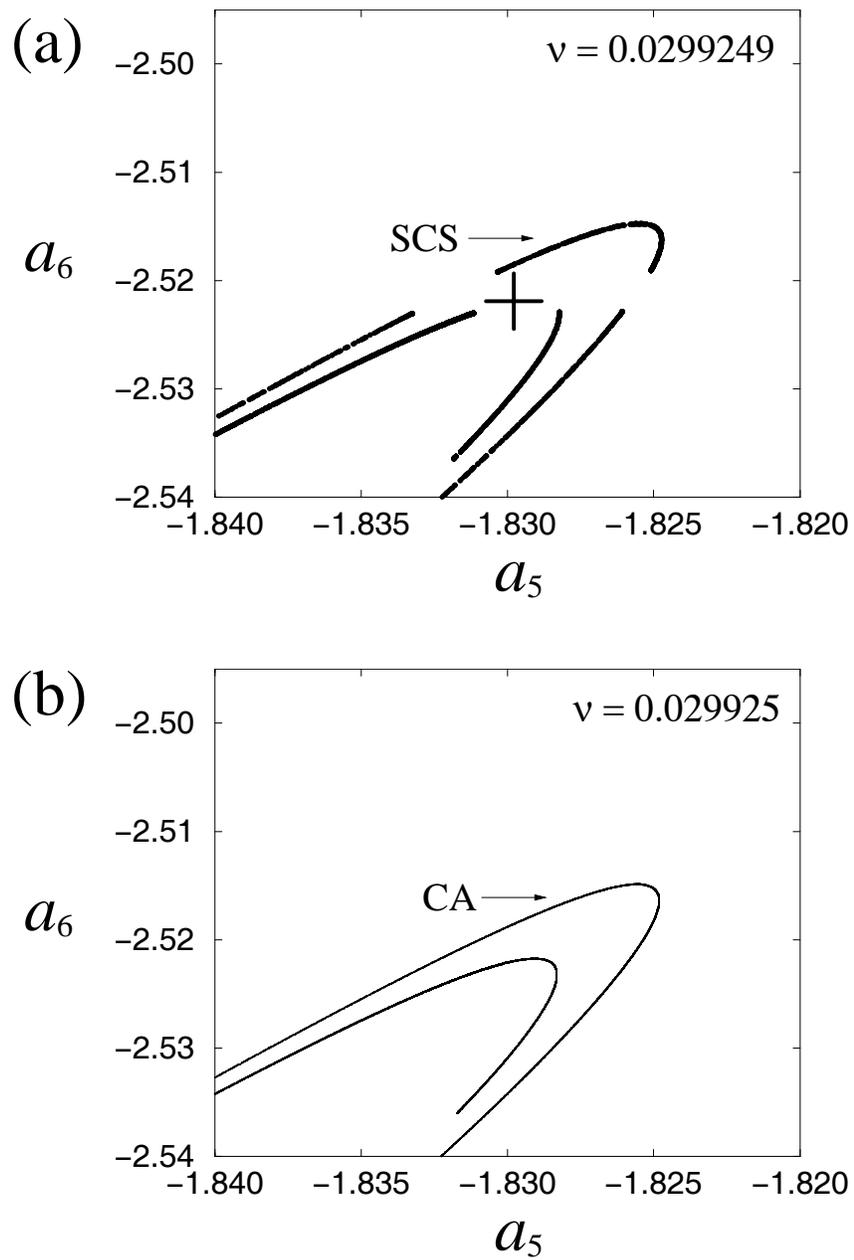


FIGURA 5.14 - Projeção bidimensional  $(a_5, a_6)$  dos pontos de Poincaré de: (a) o atrator periódico (cruz) e a sela caótica SCS (linhas escuras) em  $\nu = 0.0299249$ , logo após a bifurcação sela-nó; (b) o atrator caótico CA logo antes da bifurcação sela-nó, em  $\nu = 0.029925$ .

caótico e a variedade estável da sela caótica  $S$ . É difícil visualizar tal tangência em um espaço de fase de alta dimensão, logo, todas as 15 coordenadas de cada ponto da grade precisam ser cuidadosamente escolhidas. A Figura 5.15 ilustra o processo usado para criar a grade ao redor do ramo superior do atrator caótico em  $\nu_{IC}$ . Primeiramente, um conjunto de 4 pontos ( $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ ) é escolhido da sela caótica  $S$  (linhas cinzas) que encontra-se “ao redor” do atrator (linhas pretas). Estes pontos formam uma amostra a partir da qual a grade é interpolada. A Figura 5.15 mostra uma grade de pontos dentro de um polígono definido pelos vértices  $ABCD$ . O segmento de reta  $[A, B]$  é dividido em  $n$  subintervalos delimitados pelos pontos  $p_i$ ,  $i = 1, \dots, n+1$ , e o segmento de reta  $[C, D]$  é dividido em  $n$  subintervalos delimitados por pontos  $q_i$ ,  $i = 1, \dots, n+1$ . Cada segmento de reta definido por um par de pontos  $(p_i, q_i)$  é dividido em  $m$  subintervalos, gerando uma grade  $n \times m$ . Extrapolação linear pode ser usada para adicionar pontos fora do polígono original. Por exemplo, para adicionar 10 pontos acima e 10 pontos abaixo do segmento  $[A, B]$ , dividido em  $n$  subintervalos, pode-se usar uma expressão como

$$p_i = B + i(A - B)/n, \quad i = -10, -9, \dots, n + 10. \quad (5.42)$$

Seguindo este procedimento, uma grade é construída ao redor de um dos três ramos do atrator caótico pré-IC. Esta grade será usada para mostrar uma seção da variedade estável de SCS no espaço de fase 15-D.

Na Figura 5.16 parte da sela caótica  $S$  ao redor do ramo superior do atrator caótico em  $\nu_{IC}$  é mostrada junto com a grade gerada. Os três diferentes ângulos de visão desta projeção tridimensional  $(a_2, a_3, a_4)$  sugerem que a grade é aproximadamente tangente a cada ponto deste ramo do conjunto caótico. Para verificar se o mesmo ocorre nas outras coordenadas do espaço de fase, foram exibidas uma série de diferentes projeções tridimensionais envolvendo todos os modos de Fourier usados. Estas projeções, mostradas nas Figuras 5.17 e 5.18, revelam que o método de interpolação linear utilizado é capaz de definir uma grade apropriada para o estudo da dinâmica na vizinhança deste conjunto caótico.

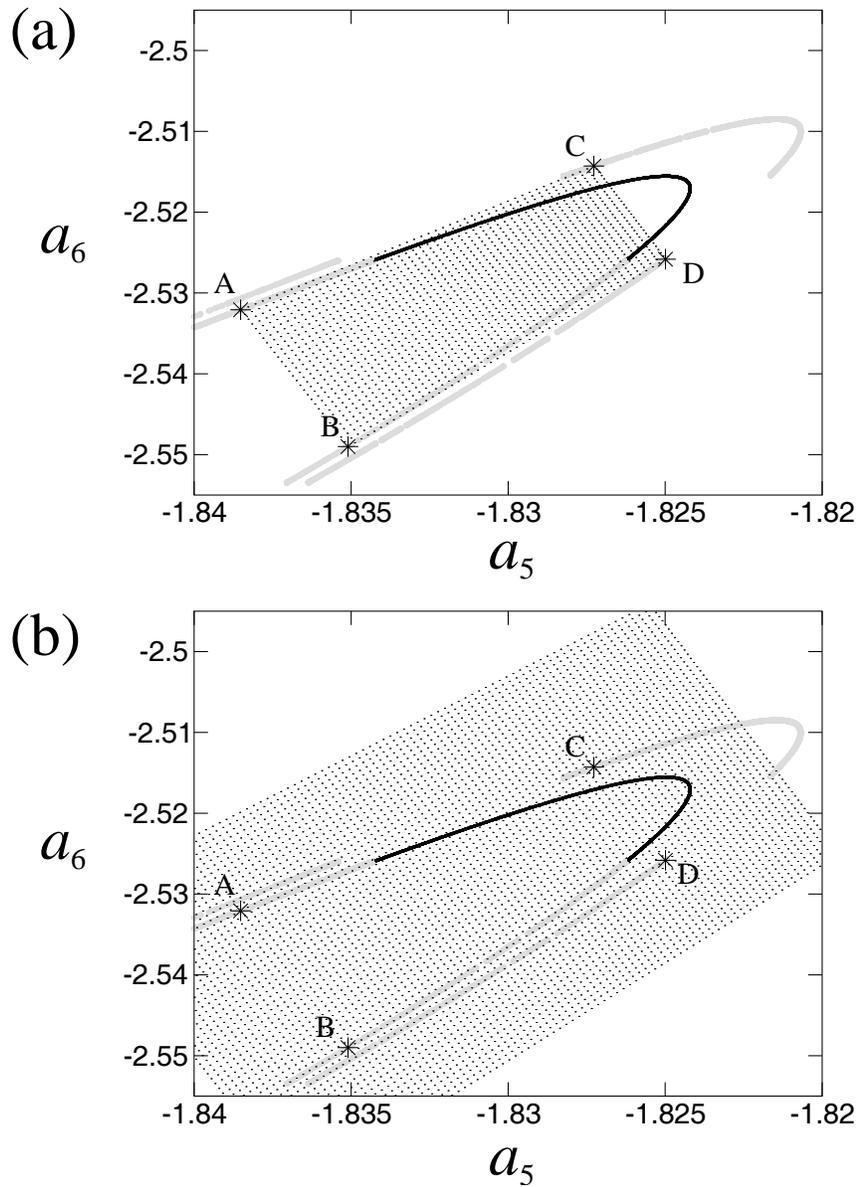


FIGURA 5.15 - Grade construída a partir de quatro pontos da sela caótica (cinza) em  $\nu_{IC} = 0.02992021$ . (a) Os pontos de grade no segmento de reta AB são encontrados por interpolação linear. O mesmo é feito para encontrar os pontos de grade nos segmentos CD, AC e BD. Os pontos dentro do polígono ABCD são encontrados por interpolação linear entre pontos sobre as arestas. (b) Pontos fora do polígono ABCD são encontrados através de extrapolação linear.

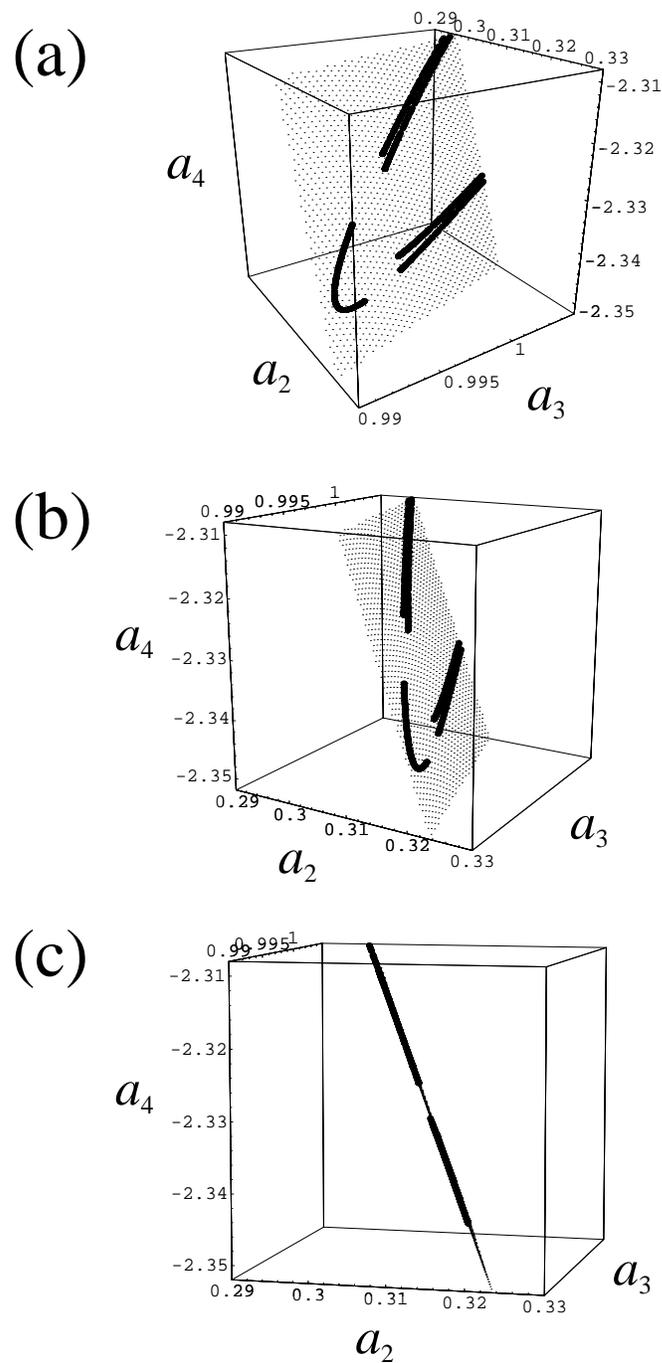


FIGURA 5.16 - Três diferentes ângulos de uma projeção tridimensional ( $a_2$ ,  $a_3$ ,  $a_4$ ), da grade junto com uma parte da sela caótica  $S$  em  $\nu_{IC} = 0.02992021$ . A grade encontra-se próxima de cada ponto nesta parte da sela caótica.

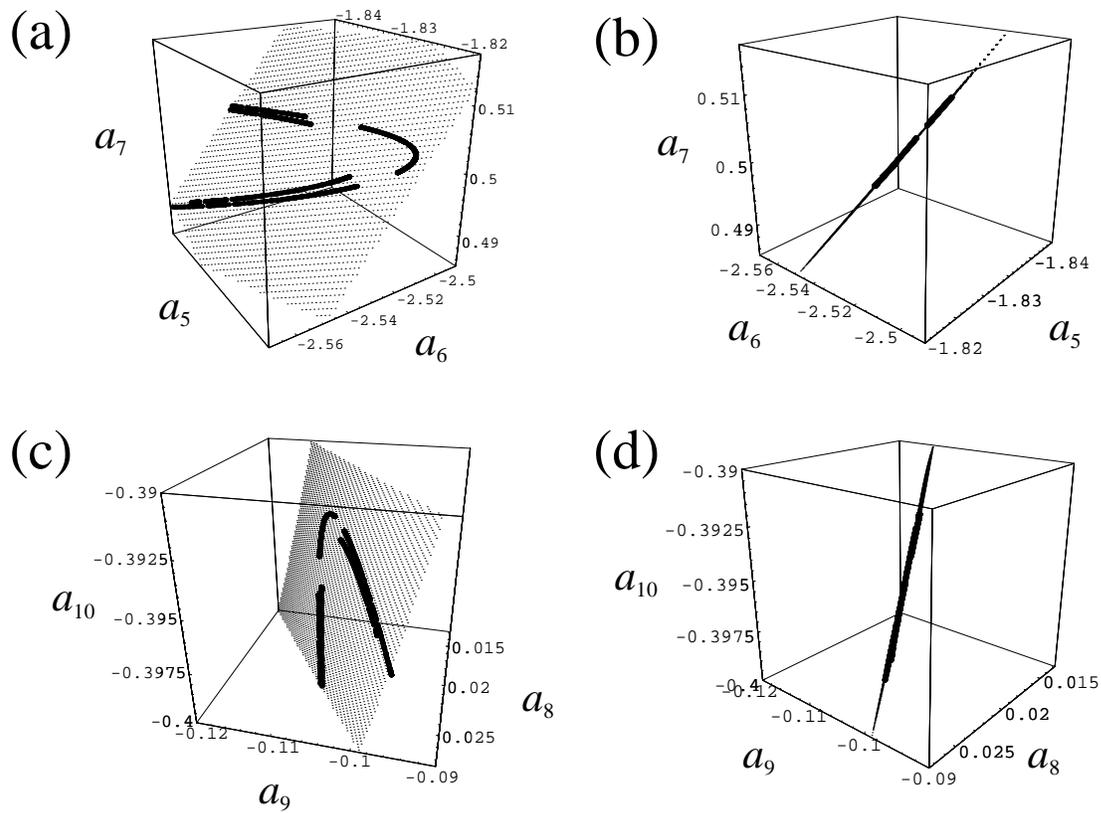


FIGURA 5.17 - Dois ângulos diferentes das projeções  $(a_5, a_6, a_7)$  (a)-(b) e  $(a_8, a_9, a_{10})$  (c)-(d) da grade com a sela caótica S em  $\nu_{IC} = 0.02992021$ .

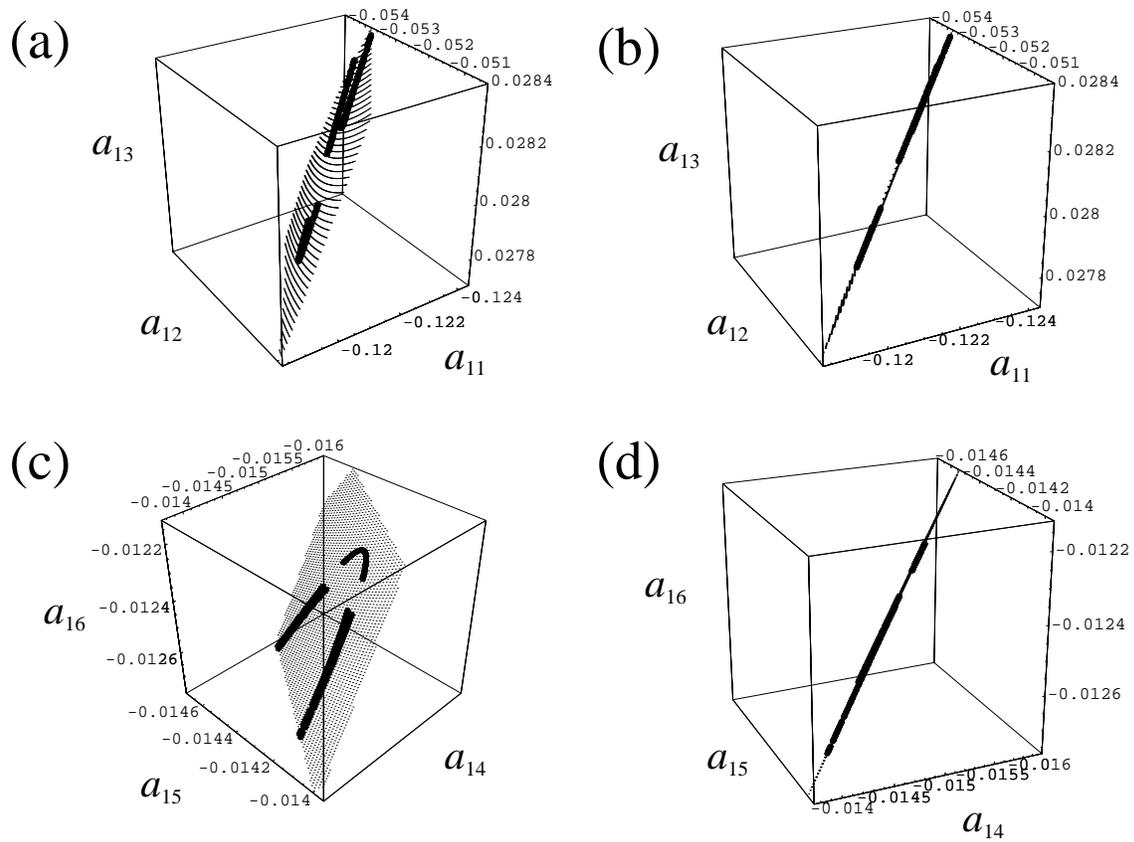


FIGURA 5.18 - Dois ângulos diferentes das projeções  $(a_{11}, a_{12}, a_{13})$  (a)-(b) e  $(a_{14}, a_{15}, a_{16})$  (c)-(d) da grade com a sela caótica S em  $\nu_{IC} = 0.02992021$ .

Em princípio, para ilustrar a tangência entre a variedade estável da sela caótica, a ser calculada sobre a grade de pontos, e o atrator caótico, os pontos da grade precisam “tocar” todos os pontos do atrator caótico. Com o intuito de estimar a precisão do método utilizado para este problema, desenvolvemos um algoritmo para computar a distância média entre pontos sobre o atrator e pontos da grade. A distância média pode ser obtida com o seguinte procedimento:

- 1) Escolha aleatoriamente um ponto  $p$  do ramo superior do atrator caótico;
- 2) Encontre o ponto  $q$  da grade mais próximo (com a menor distância Euclidiana) de  $p$ ;
- 3) Armazene a distância  $\Delta_i = \|p - q\|$ ;
- 4) Repita os passos 1 a 3,  $N$  vezes;
- 5) Obtenha a distância média entre pontos sobre o atrator e a grade como

$$D = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Delta_i.$$

Para a grade usada na Figura 5.20(b), que possui 575333 pontos, foi encontrado o valor  $D = 4.20 \times 10^{-5}$  para  $N = 500$ , o que pode ser visto como uma estimativa para a precisão da grade. O uso de grades mais finas resulta em menores valores para  $D$ .

Uma vez definida a grade, o método sprinkler pode ser diretamente aplicado. Para escolher o valor de  $t_c$  (ver Seção 3.3.1) é necessário calcular primeiro o tempo médio de transiente  $\tau$ . Dadas  $N_0$  condições iniciais, computa-se  $N_t$ , o número de trajetórias que permanecem na região de restrição após  $t$  iterações do mapa de Poincaré, lembrando que a região de restrição é uma região do espaço de fase que contém a sela caótica e não contém nenhum atrator. A forma como a região de restrição é definida neste caso será explicada na Seção 5.9.3. A Figura 5.19 mostra um gráfico de  $\log N_t \times t$  em  $\nu_{IC}$ , onde  $N_0 = 10000$  condições iniciais diferentes foram usadas. O gráfico pode ser interpolado por uma linha reta com inclinação

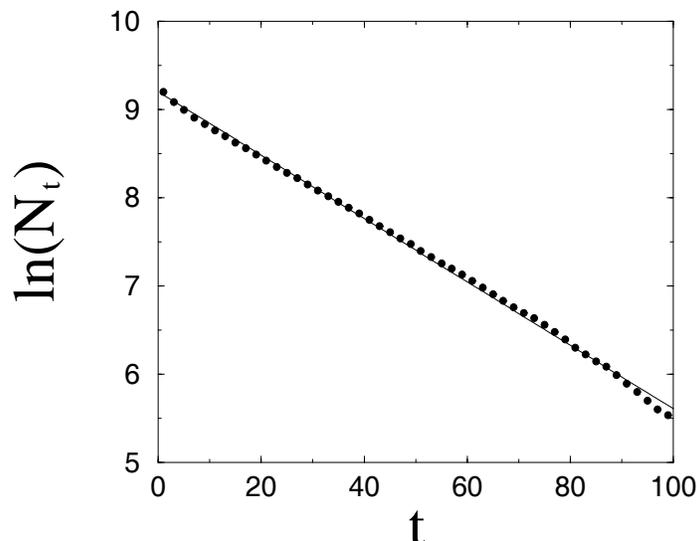


FIGURA 5.19 - Decaimento exponencial de  $N_t$ , o número de trajetórias que permanecem na região de restrição no tempo  $t$ , em função de  $t$ . O inverso da inclinação da reta interpolada fornece o tempo médio de transiente  $\tau \approx 27.9$ .

$\gamma = -3.59 \times 10^{-2} \pm 1.45 \times 10^{-4}$ , o que implica em um tempo médio de transiente  $\tau = -1/\gamma \approx 27.9$ . Baseado neste valor foi escolhido  $t_c = 45$ .

Prosseguindo com o método sprinkler, obtém-se o tempo de escape (ou tempo de transiente) para cada ponto da grade. Pontos com tempo de escape maior do que  $t_c$  são considerados com parte da variedade estável da sela caótica S. Na Figura 5.20 é exibida a parte superior do atrator caótico (linha fina, CA) com a sela caótica S (linhas espessas, SCS) e sua variedade estável (pontos pretos ao fundo) para (a)  $\nu = 0.0299211$  (antes da crise) e (b)  $\nu = 0.02992021$  (no momento da crise). O ponto de Poincaré superior da órbita periódica instável mediadora da crise é representado pela cruz. Pode-se notar que os espaços vazios na sela caótica S sempre coincidem com espaços vazios em sua variedade estável, o que significa que a grade foi bem escolhida. Pode-se ver na Figura 5.20(b) que no momento da crise a sela caótica S e o atrator caótico colidem. O ponto de colisão é a órbita mediadora, que pertence à sela S. Simultaneamente, o atrator caótico colide com a variedade estável da sela S.

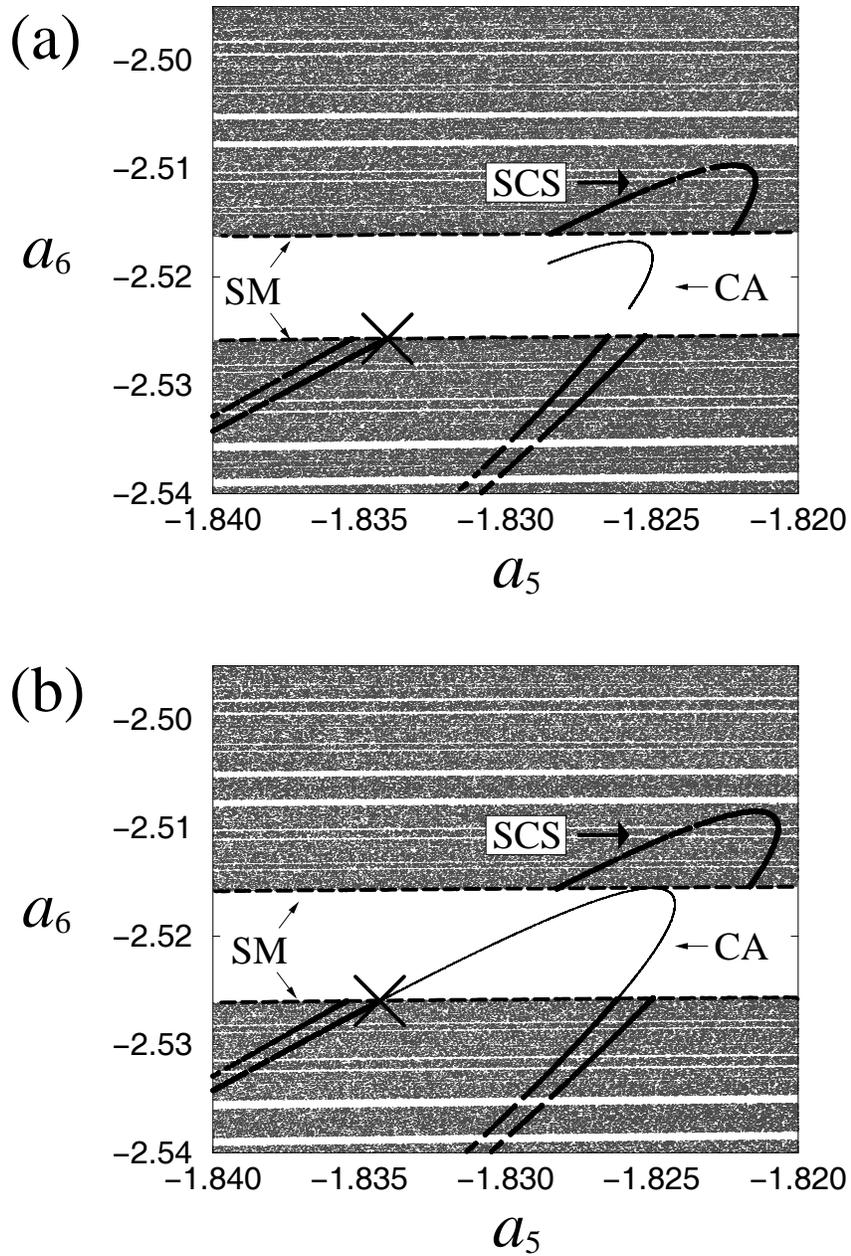


FIGURA 5.20 - Atrator caótico CA (linhas finas), a sela caótica S SCS (linhas espessas) e sua variedade estável (pontos claros): (a) antes da crise interior, em  $\nu = 0.0299211$ ; e (b) no momento da crise interior,  $\nu = 0.02992021$ . A cruz denota um dos pontos de Poincaré da órbita periódica instável p-3 mediadora da crise. As linhas tracejadas representam segmentos da fronteira entre a região B e a região S, definida pela variedade estável (SM) da órbita mediadora.

Conforme discutido na Seção 4.4, a variedade estável da órbita mediadora determina a fronteira entre a região B e a região S. Neste sistema, a órbita mediadora possui 14 autovalores estáveis (com valores absolutos menores do que 1), o que implica que a variedade estável da órbita mediadora possui dimensão 14 (ver Seção 2.6.3). O cálculo numérico de variedades estáveis de alta dimensão para pontos fixos é uma tarefa extremamente complicada. Recentes trabalhos têm apresentado a computação de variedades bidimensionais [155,156,157,158]. A computação de variedades estáveis de dimensões muito mais altas é ainda uma tarefa desafiadora. Contudo, pode-se aproximar projeções unidimensionais de segmentos da variedade estável (SM) da órbita mediadora próximo aos pontos de tangência usando a variedade estável da sela caótica S, como mostrado pelas linhas tracejadas na Figura 5.20. Isto pode ser feito devido à similaridade entre as variedades de uma sela caótica e as variedades de órbitas periódicas instáveis pertencentes a ela (ver Seções 3.4 e 4.4). Usando este método, a Figura 5.20(b) revela a tangência entre o atrator caótico e a variedade estável da órbita mediadora. Conforme mostrado na Seção 5.8, no momento da crise o atrator caótico é o fechamento de um dos ramos da variedade instável da órbita mediadora. Logo, a Figura 5.20(b) demonstra a tangência homoclínica de alta dimensão entre as variedades estável e instável da órbita mediadora. Apesar de a Figura 5.20(b) mostrar somente uma projeção bidimensional  $(a_5, a_6)$  do espaço de fase, a colisão pode ser observada em projeções sobre quaisquer escolhas de modos de Fourier, como exemplificado nas Figuras 5.21 e 5.22.

### 5.9.2 Situação Pós-Crise

Após a crise, o atrator caótico fraco é convertido na sela caótica B, como mostrado na Figura 5.12(b). A fronteira entre as regiões B e S ainda é determinada pela variedade estável da órbita mediadora. A Figura 5.23 exhibe a estrutura dos conjuntos caóticos para  $\nu = 0.02992006$ , depois da crise. A Figura 5.23(a) mostra o atrator caótico e a Figura 5.23(b) mostra as selas caóticas B (linhas finas) e S (linhas espessas). Para  $\nu < \nu_{IC}$ , mas ainda próximo do ponto de crise  $\nu_{IC}$ , a sela caótica B está localizada em regiões do espaço de fase previamente ocupadas pelo atrator caótico

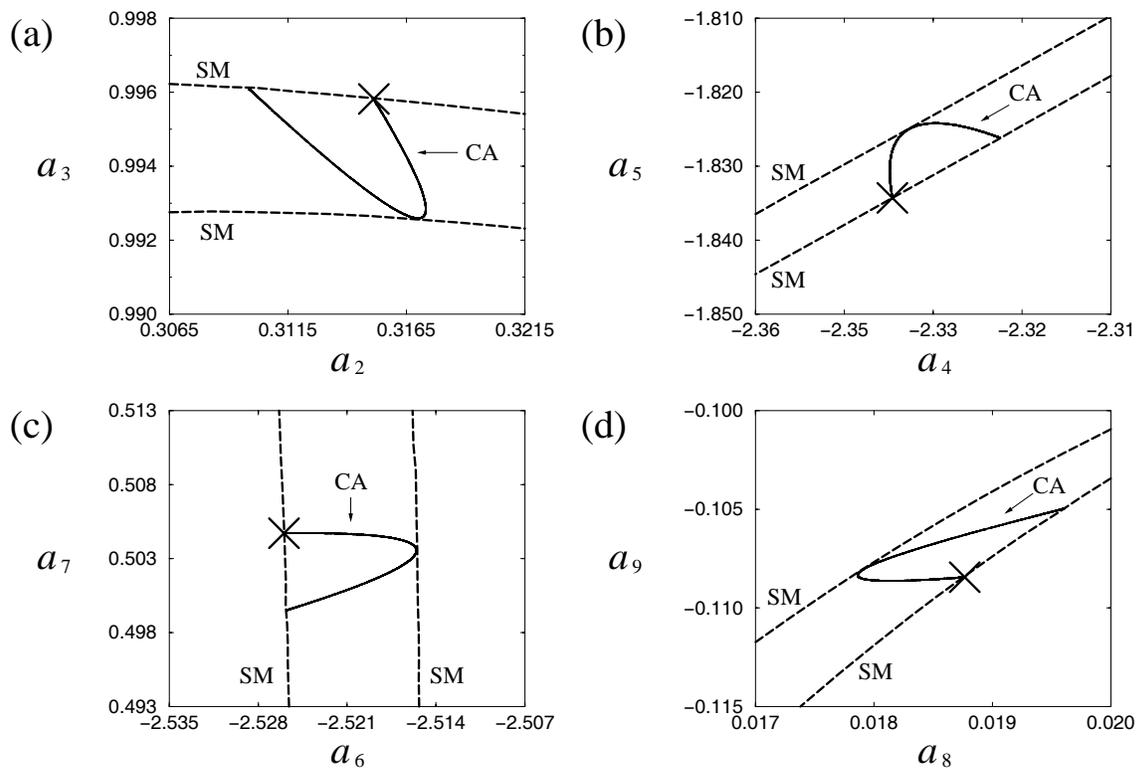


FIGURA 5.21 - Quatro diferentes projeções bidimensionais mostrando a tangência homoclínica entre o atrator caótico (CA) e a variedade estável (linhas tracejadas - SM) da órbita periódica instável mediadora (cruz) na crise interior,  $\nu_{IC} = 0.02992021$ .

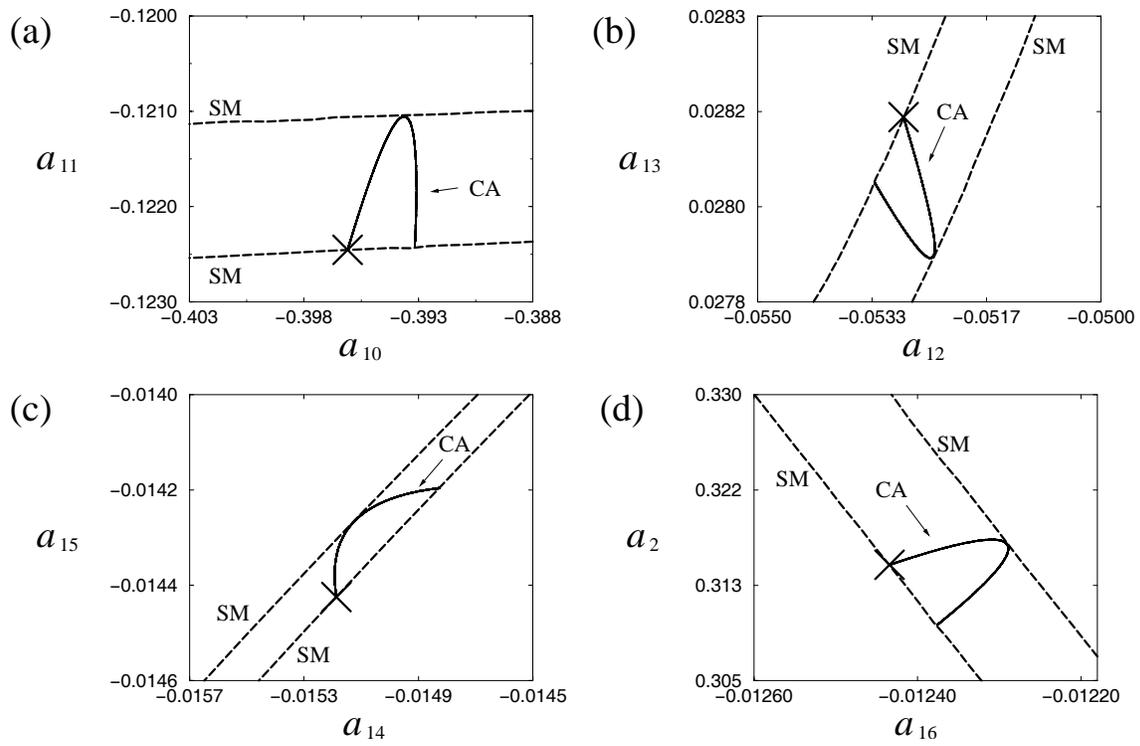


FIGURA 5.22 - Quatro diferentes projeções bidimensionais mostrando a tangência homoclínica entre o atrator caótico (CA) e a variedade estável (linhas tracejadas - SM) da órbita periódica instável mediadora (cruz) na crise interior,  $\nu_{IC} = 0.02992021$ .

fraco pré-IC. Os segmentos locais da fronteira entre as regiões B e S, ilustrado como linhas tracejadas, são obtidos a partir da variedade estável da sela caótica S, como nas Figuras 5.20-5.22. Pode-se notar pela Figura 5.23 que o atrator caótico pós-IC contém as selas caóticas B e S. Contudo, os espaços vazios em ambas as selas caóticas são subitamente preenchidos por órbitas de acoplamento criadas por uma explosão logo após IC. Logo, como no caso descrito na Seção 4.4, o atrator caótico pós-crise consiste das órbitas periódicas instáveis das selas caóticas B e S, mais as órbitas de acoplamento criadas pela explosão. A alta periodicidade das órbitas de acoplamento combinada com a alta dimensão do espaço de fase da equação KS tornam extremamente árduo o trabalho de detecção destas órbitas periódicas instáveis. Embora não tenham sido numericamente encontradas órbitas de acoplamento para a equação KS, não há motivos para se pensar que a física do sistema seja diferente do caso descrito para a equação DNLS na Seção 4.4, de forma que as novas órbitas criadas após a crise devem possuir componentes em ambas as regiões B e S.

Foi mostrado no capítulo 4, para sistemas dinâmicos de baixa dimensão, que após uma crise interior, trajetórias podem cruzar a fronteira entre as regiões B e S, exibindo comportamento intermitente, em que fases “laminares” de dinâmica fracamente caótica são interrompidas por fortes “estouros” caóticos. A Figura 5.24 mostra os valores do modo  $a_4$  para uma seqüência de pontos de Poincaré em  $\nu = 0.02992020$ , revelando que a mesma dinâmica está presente neste sistema dinâmico de alta dimensão. As fases laminares correspondem à dinâmica da trajetória enquanto ela encontra-se na região B, e os estouros correspondem à dinâmica na região S. As linhas tracejadas indicam a posição da órbita mediadora de período 3. As setas apontam para fases pré-estouro, quando a trajetória passa algumas iterações na vizinhança da órbita mediadora.

### 5.9.3 Definição da Região de Restrição

A definição de uma região de restrição em um espaço de fase de alta dimensão pode ser uma tarefa complicada. A seguir são considerados diferentes casos para as situações abordadas na seção anterior.

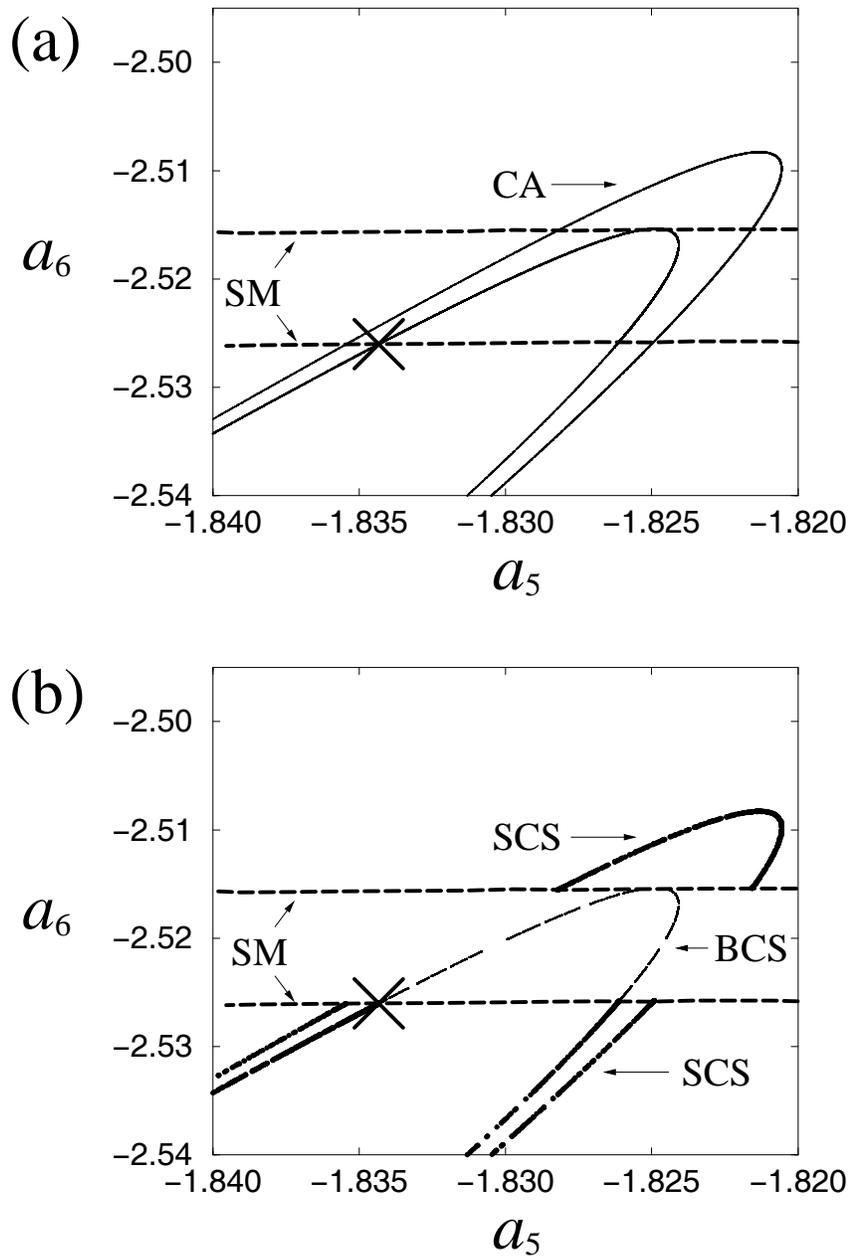


FIGURA 5.23 - (a) Atrator caótico (CA) após a crise interior, em  $\nu = 0.02992006$ . As linhas tracejadas indicam segmentos da variedade estável (SM) da órbita periódica instável mediadora (cruz); (b) a sela caótica B (BCS, linhas finas) e a sela caótica S (SCS, linhas espessas) que compõem o atrator caótico mostrado em (a).

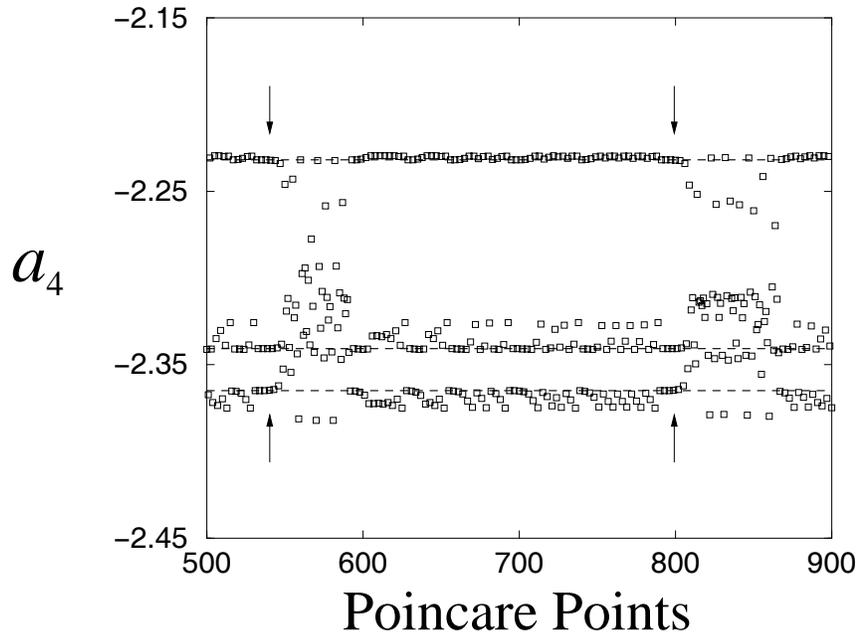


FIGURA 5.24 - Seqüência de pontos de Poincaré mostrando a intermitência induzida pela crise interior em  $\nu = 0.02992020$ . As linhas tracejadas denotam a posição da órbita periódica instável mediadora p-3, e as setas apontam para fases de comportamento aproximadamente periódico que ocorrem logo antes de um forte estouro caótico.

No início da janela periódica, após a bifurcação sela-nó, condições iniciais aleatórias são atraídas para um atrator periódico p-3. Como comentado na Seção 5.7, este atrator pode ser  $A$  ou  $S\Theta A$ , pois ambos fazem parte do mesmo mapa de Poincaré. Neste caso, a região de restrição pode ser definida como o espaço de fase menos uma pequena esfera 15-dimensional ao redor de um dos pontos periódicos de cada um dos atratores. O algoritmo PIM-triple procura por uma trajetória que esteja sempre fora das esferas, ou seja, a uma distância Euclidiana dos pontos periódicos maior do que um valor específico.

Após a sequência de bifurcações de duplicação de período, quando o atrator torna-se caótico e localizado em três ramos separados no plano de Poincaré, é necessário definir a região de restrição cobrindo um dos ramos sem cobrir partes da sela caótica  $S$ . A Figura 5.25(a) mostra a colisão do atrator caótico (CA, preto) com a sela caótica  $S$  (SCS, cinza) no ponto de crise interior  $\nu_{IC}$ . É possível isolar um dos ramos do atrator cobrindo-o com uma caixa 15-D, cuja projeção sobre o plano  $(a_5, a_6)$  é mostrada na Figura 5.25(b). O canto superior direito da caixa é definido pelas coordenadas da órbita periódica instável mediadora (cruz). O canto inferior esquerdo pode ser obtido a partir do atrator caótico. Uma longa trajetória caótica é gerada sobre o atrator e o ponto com o menor valor de  $a_5$  ou  $a_6$  é tomado como sendo o canto inferior esquerdo da caixa. Projeções sobre planos diferentes mostram figuras semelhantes. A sela caótica  $S$  é obtida como uma trajetória “straddle” que nunca entra na caixa. A caixa criada com este método simples contém este ramo de CA devido à sua forma particular. Diferentes ramos podem requerer caixas definidas de maneira diferente. Alternativamente, outros tipos de cobertura podem ser usados, tais como conjuntos de esferas, com o cuidado de que estas esferas não cubram partes de SCS, que sempre se encontra ao longo da direção instável. Foram testadas diversas formas de região de restrição, todas produzindo resultados similares. Neste caso específico, a região de restrição mais simples pode ser definida com base apenas no eixo  $a_5$ , como mostrado na Figura 5.25(c). Uma vez que as duas linhas verticais na Figura 5.25(c) não cruzam outras partes dos conjuntos caóticos (SCS e CA), elas

podem ser usadas para identificar numericamente os pontos que se encontram neste ramo do atrator caótico.

Após a crise interior não é fácil identificar as regiões B e S, uma vez que não se pode usar o algoritmo YKY para encontrar a variedade estável da órbita mediadora. Contudo, para  $\nu < \nu_{IC}$ , mas ainda próximo do ponto de crise, a sela caótica B localiza-se em três ramos do espaço de fase anteriormente ocupados pelo atrator caótico pré-IC. A sela caótica B pode ser encontrada usando o algoritmo PIM triple para determinar uma trajetória “straddle” que sempre, a cada três iterações, retorna a uma dada região. Esta região é definida um pouco maior do que um dos ramos do atrator pré-IC. Tal região é ilustrada na Figura 5.26(a), onde a posição da órbita mediadora (cruz) ainda pode ser usada para determinar com precisão o lado direito da região em  $\nu = 0.02992006$ . O lado esquerdo é definido um pouco para a esquerda de sua posição na crise (Figura 5.25(c)). Uma vez que a sela caótica B é encontrada, ela pode ser usada para encontrar a melhor posição para o lado esquerdo, com o intuito de encontrar a sela caótica S como uma órbita PIM triple que nunca entra na região ocupada por BCS 5.26(b).

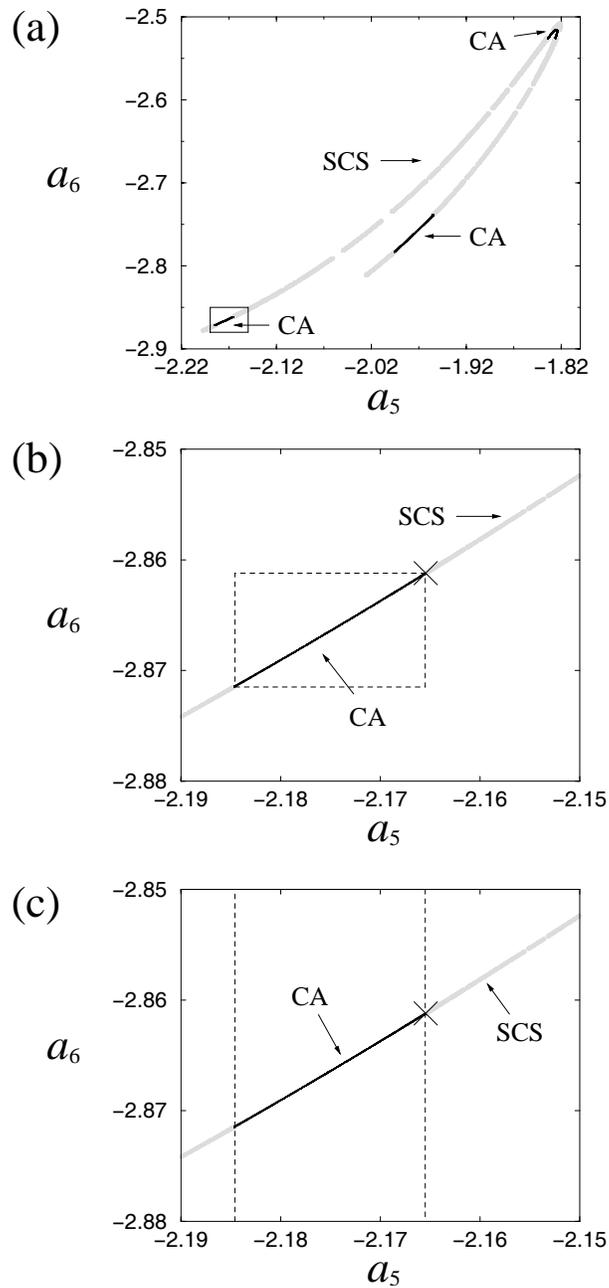


FIGURA 5.25 - (a) Sela caótica S (SCS, cinza) e o atrator caótico (CA, preto) no ponto de crise interior  $\nu_{IC}$ ; (b) Ampliação da região retangular em (a) mostrando a definição de uma região de restrição com uma caixa cobrindo um dos ramos de CA; (c) região de restrição mais simpels, usando somente valores de  $a_5$  para determinar se um ponto pertence à região B ou não.

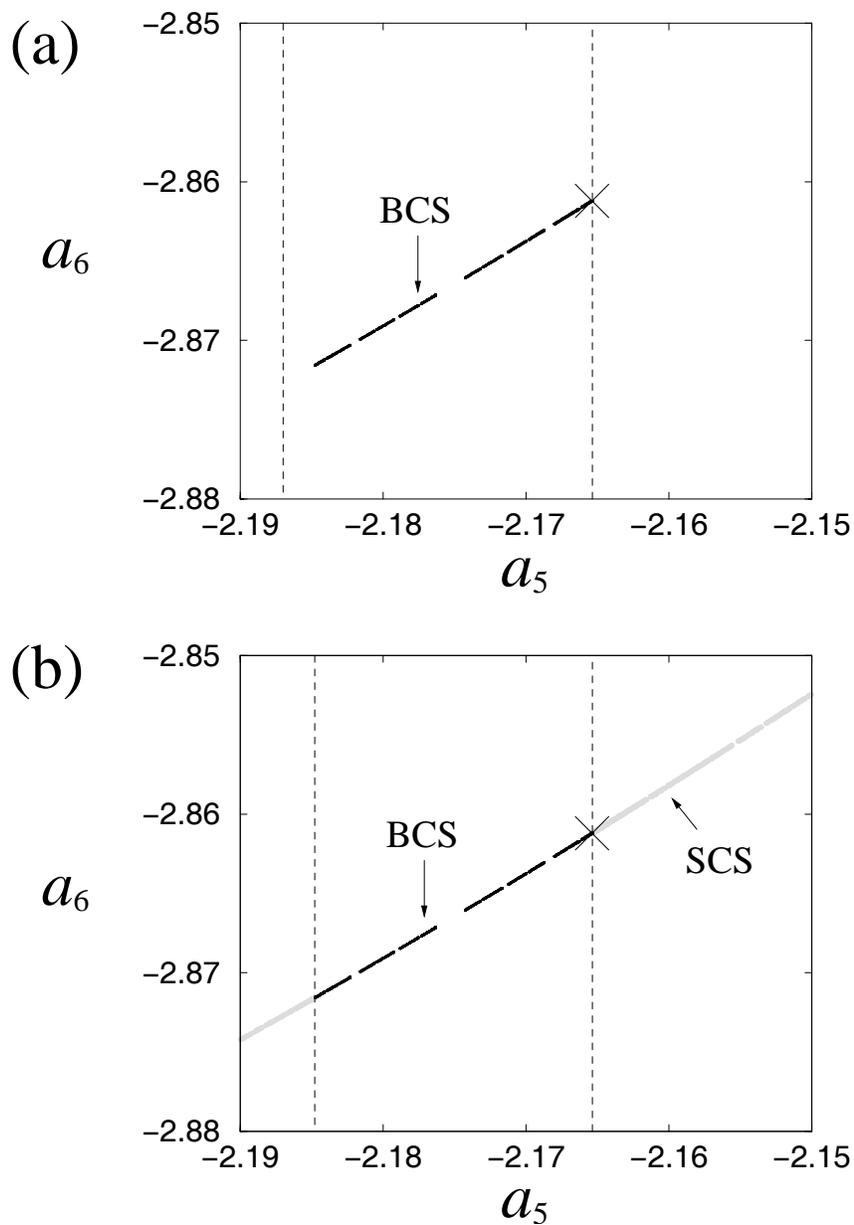


FIGURA 5.26 - (a) Sela caótica B (BCS) após a crise, em  $\nu = 0.02992006$ . As linhas verticais tracejadas determinam a posição da região B. BCS é encontrada como uma órbita PIM triple que retorna para esta região a cada três iterações do mapa de Poincaré; (b) Uma vez que BCS é encontrada, a linha vertical esquerda é ajustada e a sela caótica S (SCS) é encontrada como uma órbita PIM triple que nunca entra na região B.

## CAPÍTULO 6

### CONCLUSÃO

#### 6.1 Resumo dos Resultados

Nesta tese foi desenvolvido um estudo numérico sobre caos em sistemas dinâmicos de baixa e alta dimensão. Na primeira parte foi investigada a relevância de órbitas periódicas instáveis, selas caóticas e suas respectivas variedades na caracterização de crises em um sistema dinâmico de baixa dimensão representando ondas de Alfvén interplanetárias no regime estático, modeladas pela equação DNLS. Foi demonstrado, através de simulações numéricas, que antes de uma bifurcação sela-nó e após uma crise interior os atratores caóticos fortes são formados após uma “explosão”, que preenche totalmente os espaços vazios existentes em uma sela caótica. As técnicas numéricas usadas para identificar e analisar estes conjuntos caóticos não-atrativos foram explicadas detalhadamente. Em particular, foi descrito como obter as órbitas periódicas instáveis criadas após uma crise interior, que acoplam duas selas caóticas separadas, resultando na formação de um atrator caótico forte. Este acoplamento pode ser usado para explicar a intermitência Alfvênica induzida pela crise, apresentada em Chian et al. [44] como um possível mecanismo para a geração da intermitência Alfvênica observada em plasmas espaciais. Apesar de a análise ter sido exemplificada com soluções estacionárias da equação DNLS, as bifurcações discutidas (sela-nó, duplicação de período e crises) são comuns à maioria dos sistemas dinâmicos de baixa dimensão.

Na segunda parte foi estudada a dinâmica não-linear da equação Kuramoto-Sivashinsky. Foi mostrado que este sistema extenso é capaz de exibir as mesmas características encontradas em modelos simulados em espaços de fase de baixa dimensão. Foi caracterizada pela primeira vez a ocorrência de uma crise interior devido a tangência homoclínica em uma equação diferencial parcial. Foi apresentado um

novo método que usa interpolações lineares entre pontos dos conjuntos caóticos para escolher uma grade apropriada para a visualização da tangência homoclínica em um espaço de fase de alta dimensão. Uma vez que a grade precisa ser tangente a todos os pontos do atrator caótico em uma certa região de interesse, a aplicação direta do método ainda está limitada a casos em que os conjuntos caóticos possuem apenas uma direção de expansão. Mais estudos são necessários para que se possa desenvolver um método para situações mais gerais. Não obstante, muitos sistemas exibem atratores caóticos de baixa dimensão em espaços de fase de alta dimensão, com seqüências de bifurcações e crises similares aos casos discutidos nesta tese, devendo ser possível aplicar as técnicas aqui introduzidas em tais sistemas. Exemplos de análise numérica de equações diferenciais parciais que exibem caos de baixa dimensão incluem um modelo para a evolução não-linear de oscilações magnetohidrodinâmicas de baixa frequência em plasmas [40], um modelo genérico para a propagação de ondas não-lineares externamente forçadas em um meio espacialmente estendido [159], e um modelo para dispositivos semicondutores [160]. Exemplos experimentais incluem uma fita magnetoelástica [161], circuitos eletrônicos [162], experimentos com gotas [163], com bolhas de ar [164], e lasers [165].

As principais contribuições desta Tese são resumidas a seguir:

- Primeiro estudo de selas caóticas em ondas de Alfvén;
- Primeiro estudo do uso de selas caóticas e suas variedades para caracterizar crise interior em um sistema dinâmicos de alta dimensão;
- Verificação numérica de que selas caóticas e órbitas de acoplamento são responsáveis por intermitência induzida por crise interior em EDOs e EDPs;
- Elaboração de uma técnica de caracterização de tangência homoclínica para EDP's;
- Primeira caracterização de crise interior com tangência homoclínica em uma EDP, usando o método desenvolvido.

## 6.2 Trabalhos Futuros

### 6.2.1 Paralelização de Algoritmos

O tempo de execução do algoritmo PIM triple para obtenção de selas caóticas depende fortemente da quantidade de equações integradas e do tempo médio de escape da sela caótica. Para uma trajetória de 30000 pontos em uma sela caótica da equação KS resolvida com 16 modos de Fourier, o tempo de execução médio em um PC Pentium II 800 MHz com 256 MB de RAM é de aproximadamente 30 horas. Para sistemas com mais modos, um tempo médio de escape grande, ou situações que exijam o cálculo de trajetórias mais longas, a execução seqüencial do código passa a ser extremamente problemática, o que nos motiva a sugerir a paralelização do código implementado. O mesmo pode ser feito com outros algoritmos com alto custo computacional, como o cálculo de expoentes de Lyapunov e o método de Newton para encontrar órbitas periódicas instáveis em sistemas espaço-temporais.

Um outro ponto que pode ser explorado diz respeito ao método de caracterização de tangência homoclínica para EDP's, apresentado na Seção 5.9.1. O método apresentado funciona no caso de sistemas com atratores caóticos de baixa dimensão fractal. Uma generalização para atratores com alta dimensão fractal ampliaria a aplicabilidade do método.

### 6.2.2 Análise no Espaço de Fase no Domínio Espaço-Temporal Unidimensional

Nesta tese foi escolhido um regime em que a dinâmica da equação KS é caótica no tempo, mas permanece coerente no espaço. Esta característica permite que se desenvolvam procedimentos numéricos para analisar sistemas dinâmicos de alta dimensão. Sabe-se que com certas alterações dos parâmetros de controle, como a diminuição dos valores do parâmetro de dissipação ou aumento da extensão do sistema, a dinâmica da equação KS pode tornar-se caótica no tempo e no espaço. Em tais regimes, bifurcações e mecanismos não-lineares bem diferentes podem aparecer. Acreditamos que as técnicas numéricas introduzidas neste trabalho podem ser úteis para estender

o estudo da equação KS para o regime de caos espaço-temporal. Entretanto, esta suposição só poderá ser confirmada após experimentações numéricas.

### **6.2.3 Análise no Espaço de Fase no Domínio Espaço-Temporal Bidimensional**

Uma das possibilidades de extensão do presente trabalho é a investigação de transição para caos e formação de padrões em sistemas com duas dimensões espaciais. Neste caso, seria extremamente interessante a investigação de soluções para a equação Kuramoto-Sivashinsky bidimensional, que Rosa [166] sugere como um modelo que, no regime de caos espaço-temporal, pode exibir compatibilidade com a dinâmica das estruturas coronais observadas em raios-X moles<sup>1</sup>. Paniconi e Elder [151] apresentaram um estudo sobre soluções numéricas da equação KS bidimensional, tendo sido identificados três regimes distintos para uma determinada faixa de valores do parâmetro de dissipação: formação de padrões hexagonais espacialmente periódicos, padrões hexagonais espacialmente oscilatórios e estados desordenados, ou caos espaço-temporal. Os pontos de transição entre os três regimes foram aproximadamente determinados, mas os mecanismos responsáveis pelas transições ainda não são conhecidos. Sabe-se, entretanto, que as transições são marcadas por longos transientes, o que indica a presença de selas caóticas no espaço de fase. A interação entre as selas caóticas e conjuntos atratores pode ser estudada por meio do algoritmo “stagger-and-step” [90], para achar selas caóticas com diversas direções instáveis.

### **6.2.4 Análise de Séries Temporais e Espaço-Temporais**

A utilidade prática dos métodos de análise de conjuntos atratores e não-atrativos em sistemas reais depende de sua aplicabilidade sobre dados observacionais, quando não se tem conhecimento das equações do sistema. Tais dados se apresentam, em geral, na forma de séries temporais ou espaço-temporais (seqüências de imagens variando com o tempo). A análise de séries temporais tem possibilitado a detecção de selas caóticas em experimentos com lasers [168], um pêndulo [169] e circuitos eletrônicos

---

<sup>1</sup>Radiação eletromagnética com frequências entre  $3 \times 10^{17}$  Hz e  $3 \times 10^{18}$  Hz [167].

[159,170], bem como a detecção de órbitas periódicas instáveis em experimentos com plasmas de fusão [171,172]. Estes resultados suportam fortemente a verificação experimental dos resultados teóricos discutidos nesta tese.

A análise de séries espaço-temporais abre a possibilidade do uso de novas formas de investigação de modelos matemáticos, baseadas na comparação das soluções geradas com as imagens obtidas de sistemas reais. Este tipo de estudo é particularmente interessante no caso de sistemas de grande extensão espacial, com a presença de caos espaço-temporal totalmente desenvolvido, onde as correlações espaciais e temporais decaem exponencialmente [173] e a análise no espaço de fase torna-se bem mais complicada. Uma das formas de quantificar a dinâmica em séries espaço-temporais é a análise de padrões gradientes (APG), descrita no Apêndice A.

### 6.3 Possíveis Aplicações

A identificação de órbitas periódicas instáveis e de selas caóticas em sistemas reais possibilita o uso de técnicas de controle que permitem conduzir o sistema para soluções periódicas [10,11] ou prolongar o tempo de transiente caótico [174]. O segundo caso é indicado em certas situações em que deseja-se manter o estado caótico, em vez de deixar o sistema convergir para um estado periódico. Como exemplo, estudos revelam que a diminuição de comportamento caótico em batimentos cardíacos pode levar a problemas no coração [175]. Alguns autores têm postulado que ataques epiléticos também estão relacionados com a diminuição de caoticidade na atividade neuronal [176,177]. Um exemplo de aplicação de controle para manter o caos usando selas caóticas é a prevenção de colapsos de voltagem em sistemas elétricos de potência. Colapsos de voltagem ocorrem quando o sistema está sobrecarregado. Em tais casos, as variáveis de estado do sistema, tais como as diversas voltagens, flutuam de maneira irregular por um certo tempo antes de decaírem para zero subitamente, levando a um “blackout”. Dhamala e Lai [174] estudaram o modelo para sistemas de potência introduzido por Dobson e Chiang [178], em que o colapso ocorre quando o sistema, que opera em uma região onde existe um atrator caótico, sofre um distúrbio

ou sobrecarga temporária que causa uma mudança para um valor de parâmetro onde uma crise de fronteira ocorre, após o que o sistema exibe caos transiente seguido de colapso. Dhamala e Lai [174] usaram o conhecimento de uma sela caótica para desenvolver um método de controle, baseado apenas em dados experimentais obtidos de séries temporais, que faz com que o sistema permaneça na sela caótica, evitando o colapso. O mesmo método foi aplicado em um modelo para descrever a variação da população de uma dada espécie [179]. Neste caso, uma crise de fronteira pode significar a extinção da espécie, e a identificação de selas caóticas permite a aplicação de controle para evitar a extinção. Em um modelo de reações químicas [180], a decomposição de um atrator caótico, criado após uma crise interior, em duas selas caóticas, semelhante aos casos abordados nesta tese, permite que a aplicação de controle evite “estouros” indesejados no regime intermitente [174]. Em todos estes casos foram utilizados modelos simples, descritos por sistemas de 3 ou 4 EDO’s acopladas. Nesta tese foi descrito um processo para estudar em detalhes a dinâmica de selas caóticas responsáveis por transientes e intermitência em equações diferenciais parciais, o que amplia a possibilidade de investigação de controle em modelos mais realistas.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Sparrow, C. **The Lorenz equations: bifurcations, chaos, and strange attractors**. New York: Springer-Verlag, 1982. 267 p.
- [2] Hyman, J. M.; Nicolaenko, B. The Kuramoto-Sivashinsky equation: a bridge between PDE's and dynamical systems. **Physica D**, v. 18, n. 1-3, p. 113-126, 1986.
- [3] Temam, R. **Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics**. New York: Springer-Verlag, 1988. 500 p.
- [4] Cross, M. C.; Hohenberg, P. C. Pattern formation outside of equilibrium. **Reviews of Modern Physics**, v. 65, n. 3, p. 851-1112, 1993.
- [5] Holmes, P.; Lumley, J. L.; Berkooz, G. **Turbulence, coherent structures, dynamical systems and symmetry**. Cambridge: Cambridge University Press, 1996. 420 p.
- [6] Bohr, T.; Jensen, M. H.; Paladin, G.; Vulpiani, A. **Dynamical systems approach to turbulence**. Cambridge: Cambridge University Press, 1998. 350 p.
- [7] He, K. Crisis-induced transition to spatiotemporally chaotic motions. **Physical Review Letters**, v. 80, n. 4, p. 696-699, 1998.
- [8] He, K. Saddle Pattern Resonance and Onset of Crisis to Spatiotemporal Chaos. **Physical Review Letters**, v. 84, n. 15, p. 3290-3293, 2000.
- [9] Schöll, E. **Nonlinear spatio-temporal dynamics and chaos in semiconductors**. Cambridge: Cambridge University Press, 2001. 406 p.
- [10] Ott, E.; Grebogi, C.; Yorke, J. A. Controlling chaos. **Physical Review Letters**, v. 64, n. 11, p. 1196-1199, 1990.

- [11] Macau E. E. N., Grebogi C. Driving trajectories in complex systems. **Physical Review E**, v. 59, n. 4, p. 4062-4070, 1999.
- [12] Macau, E. E. N.; Caldas I. L. Driving trajectories in chaotic scattering. **Physical Review E**, v. 65, n. 2, 026215, 2002.
- [13] Hsu, G.-H.; Ott, E.; Grebogi, C. Strange saddles and the dimensions of their invariant manifolds. **Physics Letters A**, v. 127, n. 4, p. 199-204, 1988.
- [14] Lai, Y.-C.; Winslow, R.-L. Geometric properties of the chaotic saddle responsible for supertransients in spatiotemporal chaotic systems. **Physical Review Letters**, v. 74, n. 26, p. 5208-5211, 1995.
- [15] Chen, H.; Tang, J.-X.; Tang, S.-Y.; Xiang, H.; Chen, X. Average transient lifetime and Lyapunov dimension for transient chaos in a high-dimensional system. **Chinese Physics Letters**, v. 18, n. 11, p. 1435-1437, 2001.
- [16] Schmiegel, A.; Eckhardt, B. Fractal stability border in plane Couette flow. **Physical Review Letters**, v. 79, n. 26, p. 5250-5253, 1997.
- [17] Eckhardt, B.; Mersmann, A. Transition to turbulence in a shear flow. **Physical Review E**, v. 60, n. 1, p. 509-517, 1999.
- [18] Darbyshire, A. G.; Mullin, T. Transition to turbulence in constant-mass-flux pipe-flow. **Journal of Fluid Mechanics**, v. 289, p. 83-114, 1995.
- [19] Wang, X.-J. Genesis of bursting oscillations in the Hindmarsh-Rose model and homoclinicity to a chaotic saddle. **Physica D**, v. 62, n. 1-4, p. 263-274, 1993.
- [20] Szabó, K. G.; Lai, Y.-C.; Tél T.; Grebogi, C. Topological gap filling at crisis. **Physical Review E**, v. 61, n. 5, p. 5019-5032, 2000.
- [21] Ott, E. **Chaos in dynamical systems**. Cambridge: Cambridge University Press, 1993. 385 p.

- [22] Ziemniak, E. M.; Jung, C.; Tél, T. Tracer dynamics in open hydrodynamical flows as chaotic scattering. **Physica D**, v. 76, n. 1-3, p. 123-146, 1994.
- [23] Battelino, P. M.; Grebogi, C.; Ott, E.; Yorke, J. A. Multiple coexisting attractors, basin boundaries and basic sets. **Physica D**, v. 32, n. 2, p. 296-305, 1988.
- [24] Grebogi, C.; Ott, E.; Yorke, J. A. Crises, sudden changes in chaotic attractors, and transient chaos. **Physica D**, v. 7, n. 1, p. 181-200, 1983.
- [25] Sweet, D.; Ott, E. Fractal dimension of higher-dimensional chaotic repellers. **Physica D**, v. 139, n. 1-2, p. 1-27, 2000.
- [26] Péntek, A.; Zontán, T.; Tél, T.; Grebogi, C.; Yorke, J. A. Fractal boundaries in open hydrodynamical flows: signatures of chaotic saddles. **Physical Review E**, v. 51, n. 5, p. 4076-4088, 1995.
- [27] Jacobs, J.; Ott, E. Calculating topological entropy for transient chaos with an application to communicating with chaos. **Physical Review E**, v. 57, n. 6, p. 6577-6588, 1998.
- [28] Chen, F. F. **Introduction to plasma physics**. New York: Plenum Press, 1974. 329 p.
- [29] Benz, A. O. **Plasma astrophysics: kinetic processes in solar and stellar coronae**. Dordrecht: Kluwer Academic Press, 1993. 299 p.
- [30] Space Environment Center. Disponível em: <<http://www.sel.noaa.gov/>>. Acesso em: 22 mar. 2003.
- [31] Steiner, J. E. **Introdução à astronomia e astrofísica**. São Paulo: IAG USP, 1978. 468 p.
- [32] Chian, A. C.-L.; Borotto, F. A.; Rempel, E. L.; Macau, E. E. N.; Rosa, R. R.; Christiansen, F. Dynamical systems approach to space environment turbulence. **Space Science Reviews**, v. 107, n. 1-2, p. 447-461, 2003.

- [33] Belcher, J. W.; Davis, L. Large-amplitude Alfvén waves in the interplanetary medium, 2. **Journal of Geophysical Research**, v. 76, n. 16, p. 3534-3563, 1971.
- [34] Goldstein, M. L.; Roberts, D. A. Magnetohydrodynamic turbulence in the solar wind. **Annual Review of Astronomy and Astrophysics**, v. 33, p. 283-325, 1995.
- [35] Goldstein, M. L.; Roberts, D. A.; Deane, A. E.; Ghosh, S.; Wong, H. K. Numerical simulation of Alfvénic turbulence in the solar wind. **Journal of Geophysical Research**, v. 104, n. A7, p. 14437-14451, 1999.
- [36] Cross, R. **Introduction to Alfvén Waves**. [S. l.]: Adam Hilger, 1988. 221 p.
- [37] Borotto, F. A. **Dinâmica caótica de ondas de Alfvén no vento solar**. 2000. 111 p. (INPE-8161-TDI/755). Tese (Doutorado em Ciência Espacial/Geofísica Espacial) - Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 2000.
- [38] Bruno, R.; Carbone, V.; Veltri, P.; Pietropaulo, E.; Bavassano, B. Identifying intermittency events in the solar wind. **Planetary and Space Science**, v. 49, n. 12, p. 1201-1210, 2001.
- [39] Marsch, E.; Tu, C.-Y. On the radial evolution of MHD turbulence in the inner heliosphere. **Journal of Geophysical Research**, v. 95, n. A6, p. 8211-8229, 1990.
- [40] Ghosh, S.; Papadopoulos, K. The onset of Alfvénic turbulence. **Physics of Fluids**, v. 30, n. 5, p. 1371-1387, 1987.
- [41] Buti, B. Chaos in magnetoplasmas. **Nonlinear Processes in Geophysics**, v.6, n. 3-4, p. 129-143, 1999.

- [42] Bavassano, B.; Dobrowolny, M.; Mariani, F.; Ness, N. F. Radial evolution of power spectra of inter-planetary alfvénic turbulence. **Journal of Geophysical Research**, v. 87, n. A5, p. 3617-3622, 1982.
- [43] Hada, T.; Kennel, C. F.; Buti, B.; Mjølhus. Chaos in driven Alfvén systems. **Physics of Fluids B**, v. 2, n. 11, p. 2581-2590, 1990.
- [44] Chian, A. C.-L.; Borotto, F.A.; Gonzalez, W.D. Alfvén intermittent turbulence driven by temporal chaos. **Astrophysics Journal**, v. 505, n. 2, p. 993-998, 1998.
- [45] Chian, A. C.-L.; Borotto, F. A.; Rempel, E. L. Alfvén boundary crisis. **International Journal of Bifurcation and Chaos**, v. 12, n. 7, p. 1653-1658, 2002.
- [46] Chian, A. C.-L.; Rempel, E. L.; Macau, E. E. N.; Rosa, R. R.; Christiansen, F. High-dimensional interior crisis in the Kuramoto-Sivashinsky equation. **Physical Review E - Rapid Communications**, v. 65, n. 3, 035203(R), 2002.
- [47] Macek, W. M.; Redaelli, S. Estimation of the entropy of the solar wind flow. **Physical Review E**, v. 62, n. 5, p. 6496-6504, 2000.
- [48] Redaelli, S.; Macek, W. M. Lyapunov exponent and entropy of the solar wind flow. **Planetary and Space Science**, v. 49, n. 12, p. 1211-1218, 2001.
- [49] Pavlos, G. P.; Kyriakou, G. A.; Rigas, A. G.; Liatsis, P. I.; Trochoutsos, P. C.; Tsonis, A. A. Evidence for strange attractor structures in space plasmas. **Annales Geophysicae - Atmospheres, Hydrospheres and Space Sciences**, v. 10, n. 5, p. 309-322, 1992.
- [50] Athanasiu, M. A.; Pavlos, G. P. SVD analysis of the magnetospheric AE index time series and comparison with low-dimensional chaotic dynamics. **Nonlinear Processes in Geophysics**, v. 8, n. 1-2, p. 95-125, 2001.

- [51] Sorriso-Valvo, L. , Carboni, V.; Giulianani, P.; Veltri, P.; Bruno, R.; Antoni, V.; Martines, E. Intermittency in plasma turbulence. **Planetary and Space Science**, v. 49, n. 12, p. 1193-1200, 2001.
- [52] Lorenz, E. **The essence of chaos**. Seattle: University of Washington Press, 1993. 227 p.
- [53] Manneville, P. **Dissipative structures and weak turbulence**. San Diego: Academic Press, 1990, 483 p.
- [54] Alligood, K. T.; Sauer, T. D.; Yorke, J. A. **Chaos: an introduction to dynamical systems**. New York: Springer Verlag, 1996. 603 p.
- [55] Grebogi, C.; Ott, E.; Yorke, J. A. Chaos, strange attractors, and fractal basin boundaries in nonlinear dynamics. **Science**, v. 238, n. 4827, p. 585-718, 1987.
- [56] Parker, T. S.; Chua, L. O. **Practical numerical algorithms for chaotic systems**. New York: Springer-Verlag, 1989. 348 p.
- [57] Macau, E. E. N.; Grebogi, C. Driving trajectories in chaotic systems. **International Journal of Bifurcation and Chaos**, v. 11, n. 5, p. 1423-1442, May 2001.
- [58] Devaney, R. L. **A first course in chaotic dynamical systems: theory and experiments**. [S. l.]: Addison-Wesley, 1992. 302 p.
- [59] Hale, J. K. **Ordinary differential equations**. New York: John Wiley & Sons, 1969. 332 p.
- [60] Tabor, M. **Chaos and integrability in nonlinear dynamics: an introduction**. [S. l.]: John Wiley & Sons, 1989. 384 p.
- [61] Fiedler-Ferrara, N.; Prado, C. P. C. **Caos: uma introdução**. São Paulo: Edgard Blücher, 1994. 402 p.

- [62] Wolf, A.; Swift, J. B.; Swinney, H. L.; Vastano, J. A. Determining Lyapunov exponents from a time series. **Physica D**, v. 16, n. 3, p. 285-317, 1985.
- [63] Kantz, H.; Schreiber, T. **Nonlinear time series analysis**. Cambridge: Cambridge University Press, 1999. 320 p.
- [64] Guckenheimer, J.; Holmes, P. **Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcations of vector fields**. New York: Springer Verlag, 1983. 453 p.
- [65] Nusse, H. E.; Yorke, J. A. A procedure for finding numerical trajectories on chaotic saddles. **Physica D**, v. 36, n. 1-2, p. 137-156, 1989.
- [66] Nusse, H. E.; Yorke, J. A. **Dynamics: Numerical explorations**. New York: Springer-Verlag, 1998. 608 p.
- [67] Szabó, K. G.; Lai, Y.-C.; Tél, T.; Grebogi, C. Critical exponent for gap filling at crisis. **Physical Review Letters**, v. 77, n. 15, p. 3102-3105, 1996.
- [68] Macau, E. E. N. comunicação pessoal sobre conjuntos de Cantor.
- [69] Dawson, S. P. Strange nonattracting chaotic sets, crises, and fluctuating Lyapunov exponents. **Physical Review Letters**, v. 76, n. 23, p. 4348-4351, 1996.
- [70] Moresco, P.; Dawson, S. P. Chaos and crises in more than two dimensions. **Physical Review E**, v. 55, n. 5, p. 5350-5360, 1997.
- [71] Wiggins, S. **Global bifurcations and chaos**. New York: Springer-Verlag, 1988. 494 p.
- [72] Grebogi, C.; Ott, E.; Yorke, J. A. Chaotic attractors in crisis. **Physical Review Letters**, v. 48, n. 22, p. 1507-1510, 1982.
- [73] Grebogi, C.; Ott, E.; Romeiras, F.; Yorke, J. A. Critical exponents for crisis-induced intermittency. **Physical Review A**, v. 36, n. 11, p. 5365-5380, 1987.

- [74] Szabó, K. G.; Tél, T. Transient chaos as the backbone of dynamics on strange attractors beyond crisis. **Physics Letters A**, v. 196, n. 3-4, p. 173-180, 1994.
- [75] Robert, C.; Alligood, K. T.; Ott, E.; Yorke, J. A. Explosions of chaotic sets. **Physica D**, v. 144, n. 1-2, p. 44-61, 2000.
- [76] Hong, L.; Xu, J. X. Further study of interior crises in systems of ordinary differential equations. **Acta Physica Sinica**, v. 49, n. 7, p. 1228-1234, 2000.
- [77] Grebogi, C.; Ott, E.; Yorke, J. A. Critical exponent of chaotic transients in nonlinear dynamical systems. **Physical Review Letters**, v. 57, n. 11, p. 1284-1287, 1986.
- [78] Christiansen, F. Fixed points, and how to get them. In: Cvidanović, P.; Artuso, R.; Dahlqvist, P.; Mainieri, R.; Tanner, G.; Vattay, G.; Whelan, N.; Wirzba, A. (ed.) **Chaos: classical and quantum**, on line book. Disponível em: <<http://www.nbi.dk/ChaosBook/>>, p. 247-271, 2003.
- [79] J.H. Curry, An algorithm for finding closed orbits. In: Nitecki, Z.; Robinson, C. (ed.). **Global Theory of Dynamical Systems**. New York: Springer-Verlag, 1979. p. 111-120.
- [80] You, Z.; Kostelich, E.; Yorke, J. A. Calculating stable and unstable manifolds. **International Journal of Bifurcation and Chaos**, v. 1, n. 3, p. 605-623, 1991.
- [81] Kantz, H.; Grassberger, P. Repellers, semi-attractors, and long-lived chaotic transients. **Physica D**, v. 17, n. 1, p. 75-86, 1985.
- [82] Braun, R.; Feudel, F. Supertransient chaos in two-dimensional complex Ginzburg-Landau equation. **Physical Review E**, v. 53, n. 6, p. 6562-6565, 1996.

- [83] Dhamala, M.; Lai, Y. C. Unstable periodic orbits and the natural measure of nonhyperbolic chaotic saddles. **Physical Review E**, v. 60, n. 5, p. 6176-6179, 1999.
- [84] Aguirre, J.; Vallejo, J. C.; Sanjuán, M. A. F. Wada basin and chaotic invariant sets in the Hénon-Heiles system. **Physical Review E**, v. 64, n. 6, 066208, 2001.
- [85] Kan, I.; Koçak, H.; Yorke, J. A. Persistent homoclinic tangencies in the Hénon family. **Physica D**, v. 83, n. 4, p. 313-325, 1995.
- [86] Jacobs, J.; Ott, E.; Grebogi, C. Computing the measure of nonattracting chaotic sets. **Physica D**, v. 108, n. 1-2, p. 1-11, 1997.
- [87] Kapitaniak, T.; Lai, Y.-C.; Grebogi, C. Metamorphosis of chaotic saddle. **Physics Letters A**, v. 259, n. 6, p. 445-450, 1999.
- [88] Lai, Y.-C.; Zyczkowski, K.; Grebogi, C. Universal behavior in the parametric evolution of chaotic saddles. **Physical Review E**, v. 59, n. 5, p. 5261-5265, 1999.
- [89] Moresco, P.; Dawson, S. P. The PIM-simplex method: an extension of the PIM-triple method to saddles with an arbitrary number of expanding directions. **Physica D**, v. 126, n. 1-2, p. 38-48, 1999.
- [90] Sweet, D.; Nusse, H. E.; Yorke, J. A. Stagger-and-Step method: detecting and computing chaotic saddles in higher dimensions. **Physical Review Letters**, v. 86, n. 11, p. 2261-2264, 2001.
- [91] Lai, Y.-C.; Grebogi, C.; Yorke, J. A. Sudden change in the size of chaotic attractors: how does it occur? In: Kim, J. H.; Stringer, J. (ed.). **Applied Chaos**. New York: John Wiley & Sons, 1992, p. 441-455.
- [92] Buti, B. Chaotic Alfvén waves in multispecies plasmas. **Journal of Geophysical Research**, v. 97, n. A4, p. 4229-4233, 1992.

- [93] Spangler, S. R. Evolution of nonlinear Alfvén waves subject to growth and damping. **Physics of Fluids**, v. 29, n. 8, p. 2535-2547, 1986.
- [94] Rogister, A. Parallel propagation of nonlinear low-frequency waves in high-beta plasma. **Physics of Fluids**, v. 14, n. 12, p. 2733-&, 1971.
- [95] Mjølhus, E. Modulational instability of hydromagnetic waves parallel to magnetic-field. **Journal of Plasma Physics**, v. 16, p. 321-334, 1976.
- [96] Spangler, S. R.; Sheerin, J. P. Properties of Alfvén solitons in a finite-beta plasma. **Journal of Plasma Physics**, v. 27, p. 193-198, 1982.
- [97] Dangoisse, D.; Glorieux, P.; Hennequin, D. Laser Chaotic Attractors in Crisis. **Physical Review Letters**, v. 57, n. 21, p. 2657-2660, 1986.
- [98] Ditto, W. L.; Rauseo, S.; Cawley, R.; Grebogi, C.; Hsu, G.-H.; Kostelich, E.; Ott, E.; Savage, H. T.; Segnan, R.; Spano, M. L.; Yorke, J. A. Experimental observation of crisis-induced intermittency and its critical exponent. **Physical Review Letters**, v. 63, n. 9, 923-926, 1989.
- [99] Leven, R. W.; Selent, M. Construction and quantitative characterization of a chaotic saddle from a pendulum experiment. **Chaos Solitons and Fractals**, v. 4, n. 12, p. 2217-2222, 1994.
- [100] Sartorelli, J. C.; Gonçalves, W. M.; Pinto, R. D. Crisis and intermittence in a leaky-faucet experiment. **Physical Review E**, v. 49, n. 5, p. 3963-3975, 1994.
- [101] Pinto, R. D.; Sartorelli, J. C. Homoclinic tangency and chaotic attractor disappearance in a dripping faucet experiment. **Physical Review E**, v. 61, n. 1, p. 342-347, 2000.
- [102] Kaifen He, Critical behavior of crisis-induced transition to spatiotemporal chaos in parameter space. **Physical Review E**, v. 63, n. 1, 016218, 2001.

- [103] Borotto, F. A.; Chian, A. C.-L.; Hada, T.; Rempel, E. L. Chaos in driven Alfvén systems: boundary and interior crises. **Physica D**, v. 194, n. 3-4, p. 275-282, 2004.
- [104] Rempel, E. L.; Chian, A. C.-L. Alfvén chaotic saddles. **International Journal of Bifurcation and Chaos**, v. 14, n. 11, p. 4009-4017, 2004.
- [105] Rempel, E. L.; Chian, A. C.-L.; Macau, E. E. N.; Rosa, R. R. Numerical analysis of chaotic saddles in low-dimensional dynamical systems: the DNLS equation. **Physica D**, v. 199, n. 3-4, p. 407-424, 2004.
- [106] Szabó, K. G.; Tél, T. Thermodynamics of attractor enlargement. **Physical Review E**, v. 50, n. 2, p. 1070-1082, 1994.
- [107] Putkaradze, V. **Local structures in extended systems**. 1997. 149 p. Tese (Ph.D. in Physics) - Copenhagen University, Copenhagen, 1997.
- [108] Tajima, S.; Greenside, H. S. Microextensive chaos of a spatially extended system. **Physical Review E**, v. 66, n. 1, 017205, 2002.
- [109] Rosa, R. R.; Sharma, A. S.; Valdivia, J. A. Characterization of localized turbulence in plasma extended systems. **Physica A**, v. 257, n. 1-4, p. 509-514, 1998.
- [110] Assireu A. T.; Rosa, R. R.; Vijaykumar, N. L.; Lorenzetti, J. A.; Rempel, E. L.; Ramos, F. M.; Sa, L. D. A.; Bolzan, M. J. A.; Zanandrea, A. Gradient pattern analysis of short nonstationary time series: an application to Lagrangian data from satellite tracked drifters. **Physica D**, v. 168, p. 397-403, 2002.
- [111] Rosa, R. R.; Pontes, J.; Christov, C. I.; Ramos, F. M.; Rodrigues Neto, C.; Rempel, E. L.; Walgraef, D. Gradient pattern analysis of Swift-Hohenberg dynamics: phase disorder characterization. **Physica A**, v. 283, n. 1-2, p. 156-159, 2000.

- [112] Neto, C. R.; Rosa, R. R.; Ramos, F. M. Pattern characterization: A case study in osmosedimentation. **International Journal of Modern Physics C**, v. 12, n. 8, p. 1261-1269, 2001.
- [113] Swift, J.; Hohenberg, P. C. Hydrodynamic fluctuations at the convective instability. **Physical Review A**, v. 15, n. 1, p. 319-328, 1977.
- [114] Bohr, T.; Rand, D. A. A mechanism for localised turbulence. **Physica D**, v. 52, n. 2-3, p. 532-543, 1991.
- [115] Lefebvre, B.; Hada, T. Spatio-temporal behavior of a driven system of MHD waves. **Eos Transactions of AGU**, v. 81, n. 48, Fall Meeting Supplement, Abstract SM62A-09, 2000.
- [116] Levermore, C. D.; Oliver, M. The complex Ginzburg-Landau equation as a model problem. In: Deift, P.; Levermore, C. D.; Wayne, C. E. (ed.). **Lectures in Applied Mathematics: Dynamical systems and probabilistic methods in partial differential equations**, [S. l.]: American Mathematical Society, 1996. p. 141-190.
- [117] Aranson, I. S.; Kramer, L. The world of the complex Ginzburg-Landau equation. **Reviews of Modern Physics**, v. 74, p. 99-143, 2002.
- [118] van Saarloos, W. The complex Ginzburg-Landau equation for beginners. In: Cladis, P. E.; Palffy-Muhoray, P. (ed.). **Spatio-temporal patterns in non-equilibrium complex systems**. Reading, MA: Addison-Wesley, 1994. p. 19-31.
- [119] van Hecke, M.; Hohenberg, P. C.; van Saarloos, W. Amplitude equations for pattern forming systems. In: van Beijren, H.; Ernst, M. H. (ed.). **Fundamental problems in statistical mechanics VIII**. Amsterdam: North-Holland, 1994. p. 245-296.
- [120] Kuramoto, Y. **Chemical oscillations, waves and turbulence**: Springer series in synergetics. Berlin, Springer-Verlag: 1984. 156p.

- [121] Davidenko, J. M., Pertsov, A. V., Salomonsz, R., Baxter, W. and Jalife, J. Stationary and drifting spiral waves of excitation in isolated cardiac-muscle. **Nature**, v. 355, n. 6358, p. 349-351, 1992.
- [122] Staliunas, K.; Weiss, C. O. Tilted and standing waves and vortex lattices in class-A lasers. **Physica D**, v. 81, n. 1-2, p. 79-93, 1995.
- [123] Scheuer, J.; Malomed, B. A. Stable and chaotic solutions of the complex Ginzburg-Landau equation with periodic boundary conditions. **Physica D**, v. 161, n. 1-2, p. 102-115, 2002.
- [124] Itoh, S. I.; Itoh, K.; Fukuyama, A.; Miura, Y. Edge localized mode activity as a limit cycle in tokamak plasmas. **Physical Review Letters**, v. 67, n. 18, p. 2485-2488, 1991.
- [125] Itoh, S. I.; Itoh, K.; Fukuyama, A. The ELMy H mode as a Limit Cycle and the Transient Responses of H Modes in Tokamaks. **Nuclear Fusion**, v. 33, n. 10, p. 1445-1457, 1993.
- [126] Erichsen, R.; Brunnet, L. G.; Rizzato, F. B. Coupling of low-frequency modes with the complex Ginzburg-Landau equation: Generalized Zakharov equations. **Physical Review E**, v. 60, n. 6, p. 6566-6570, 1999.
- [127] Kuramoto, Y.; Tsuzuki, T. Persistent propagation of concentration waves in dissipative media far from thermal equilibrium. **Progress of Theoretical Physics**, v. 55, n. 2, p. 356-369, 1976.
- [128] Sivashinsky, G. I. Nonlinear analysis of hydrodynamical instability in laminar flames, I. Derivation of basic equations. **Acta Astronautica**, v. 4, n. 11-1, p. 1177-1206, 1977.
- [129] LaQuey, R. E.; Mahajan, S. M.; Rutherford, P.H.; Tang, W. M. Nonlinear saturation of the trapped-ion-mode. **Physical Review Letters**, v. 34, n. 7, p. 391-394, 1975.

- [130] Cohen, B. I.; Krommes, J. A.; Tang, W. M.; Rosenbluth, M. N. Non-linear saturation of the dissipative trapped-ion mode by mode coupling. **Nuclear Fusion**, v.16, n. 6, p. 971-992, 1976.
- [131] Tang, W. M. Microinstability theory in tokamaks. **Nuclear Fusion**, v. 18, n. 8, p. 1089-1160, 1978.
- [132] Sivashinsky, G. I.; Michelson, D. M. On irregular wavy flow of a liquid film down a vertical plane. **Progress of Theoretical Physics**, v. 63, n. 6, p. 2112-2114, 1980.
- [133] Babchin, A. J.; Frenkel, A. L.; Levich, B. G.; Sivashinsky, G. I. Nonlinear saturation of Rayleigh-Taylor instability. **Physics of Fluids**, v. 26, n. 11, p. 3159-3161, 1983.
- [134] Kliakhandler, I.; Sivashinsky, G. Kinetic alpha effect in viscosity stratified creeping flows. **Physics of Fluids**, v. 7, n. 8, p. 1866-1871, 1995.
- [135] Haltiner, G. J. **Numerical Weather Prediction**. [S. l.]: John Wiley & Sons, 1971. 317 p.
- [136] Gottlieb, D.; Orszag, S. A. **Numerical analysis of spectral methods: theory and applications**. [S. l.]: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1977. 172 p.
- [137] Haltiner, G. J.; Williams, R. T. **Numerical prediction and dynamic meteorology**. [S. l.]: John Wiley & Sons, 1980. 477 p.
- [138] Quarteroni, A. **Numerical approximation of partial differential equations**. [S. l.]: Springer Verlag, 1997. 543 p.
- [139] Armbruster, D.; Guckenheimer, J.; Holmes, P. Kuramoto-Sivashinsky dynamics on the center-unstable manifold. **SIAM Journal of Applied Mathematics**, v. 49, n. 3, p. 676-691, 1989.

- [140] Sokolnikoff, I. S.; Redheffer R. M. **Mathematics of Physics and Modern Engineering**. New York: McGraw-Hill Company, 1966. 752 p.
- [141] Christiansen, F.; Cvitanović, P.; Putkaradze, V. Hopf's last hope: spatiotemporal chaos in terms of unstable recurrent patterns. **Nonlinearity**, v. 10, n. 1, p. 55-70, 1997.
- [142] Foias, C.; Manley, O.; Rosa, R.; Temam, R. **Navier-Stokes equations and turbulence**. Cambridge: Cambridge University Press, 2001, 347 p.
- [143] Lorenz, E. N. Deterministic nonperiodic flow. **Journal of the Atmospheric Sciences**, v. 20, n. 2, p. 130-141, 1963.
- [144] Yorke, E. D.; Yorke, J. A. Metastable chaos: transition to sustained chaotic behaviour in the Lorenz model. **Journal of Statistical Physics**, v. 21, n. 3, p. 263-277, 1979.
- [145] Hyman, J. M.; Nicolaenko, B.; Zaleski, S. Order and complexity in the Kuramoto-Sivashinsky model of weakly turbulent interfaces. **Physica D**, v. 23, n. 1-3, p. 265-292, 1986.
- [146] Jolly, M. S.; Kevrekidis, I. G.; Titi, E. S. Approximate inertial manifolds for the Kuramoto-Sivashinsky equation: analysis and computations. **Physica D**, v. 44, n. 1-2, p. 38-60, 1990.
- [147] Hohenberg, P. C.; Shraiman, B. I. Chaotic behavior of an extended system. **Physica D**, v. 37, n. 1-3, p. 109-115, 1989.
- [148] Hu, Y.; Ecke, R. E.; Ahlers, G. Convection under rotation for Prandtl numbers near 1: Linear stability, wave-number selection, and pattern dynamics. **Physical Review E**, v. 55, n. 6, p. 6928-6949, 1997.
- [149] Elder, K. R.; Gunton, J. D.; Goldenfeld, N. Transition to spatiotemporal chaos in the damped Kuramoto-Sivashinsky equation. **Physical Review E**, v. 56, n. 2, p. 1631-1634, 1997.

- [150] Morris, S. W.; Bodenschatz, E.; Cannell, D. S.; Ahlers, G. The spatio-temporal structure of spiral-defect chaos. **Physica D**, v. 97, n. 1-3, p. 164-179, 1996.
- [151] Paniconi, M.; Elder, K. R. Stationary, dynamical, and chaotic states of the two-dimensional damped Kuramoto-Sivashinsky equation. **Physical Review E**, v. 56, n. 3, p. 2713-2721, 1997.
- [152] Morris, S. W.; Bodenschatz, E.; Cannell, D. S.; Ahlers, G. Spiral defect chaos in large aspect ratio Rayleigh-Bénard convection. **Physical Review Letters**, v. 71, n. 13, p. 2026-2029, 1993.
- [153] Rempel, E. L.; Chian, A. C.-L. High-dimensional chaotic saddles in the Kuramoto-Sivashinsky equation. **Physics Letters A**, v. 319, n. 1-2, p. 104-109, 2003.
- [154] Rempel, E. L.; Chian, A. C.-L.; Macau, E. E. N.; Rosa, R. R. Analysis of chaotic saddles in high-dimensional dynamical systems: the Kuramoto-Sivashinsky equation. **CHAOS**, v. 14, n.3, p. 545-556, 2004.
- [155] Krauskopf, B.; Osinga, H. M. Growing 1D and Quasi-2D Unstable Manifolds of Maps. **Journal of Computational Physics**, v. 146, n. 1, p. 404-419, 1998.
- [156] Beyn, W. J.; Kless, W. Numerical Taylor expansions of invariant manifolds in large dynamical systems. **Numerische Mathematik**, v. 80, n. 1, p. 1-38, 1998.
- [157] Krauskopf, B.; Osinga, H. M. Two-dimensional global manifolds of vector fields. **Chaos**, v. 9, n. 3, p. 768-774, 1999.
- [158] Johnson, M. E.; Jolly, M. S.; Kevrekidis, I. G. The Oseberg transition: Visualization of global bifurcations for the Kuramoto-Sivashinsky equation. **International Journal of Bifurcation Chaos**, v. 11, n. 1, p. 1-18, 2001.

- [159] Xu, B.; Lai, Y.-C.; Zhu, L.; Do, Y. Experimental characterization of transition to chaos in the presence of noise. **Physical Review Letters**, v. 90, n. 16, 164101, 2003.
- [160] Bose, S.; Wacker, A.; Schöll, E. Bifurcation scenarios of spatio-temporal spiking in semiconductor devices. **Physics Letters A**, v. 195, n. 2, p. 144-150, 1994.
- [161] Ditto, W. L.; Rauseo, S.; Cawley, R.; Grebogi, C.; Hsu, G.-H.; Kostelich, E.; Ott, E.; Savage, H. T.; Segnan, R.; Spano, M. L.; Yorke, J. A. Experimental observation of crisis-induced intermittency and its critical exponent. **Physical Review Letters**, v. 63, n. 9, p. 923-926, 1989.
- [162] Hamill, D. C.; Deane, J. H. B.; Jefferies, D. J. Modeling of chaotic DC-DC converters by iterated nonlinear mappings. **IEEE Transactions on Power Electronics**, v. 7, n. 1, p. 25-36, 1992.
- [163] Tufaile, A.; Goncalves, W. M.; Sartorelli, J. C. Simulations in a dripping faucet experiment. **Physics Letters A**, v. 255, n. 1-2, p. 58-64, 1999.
- [164] Tufaile, A.; Sartorelli, J. C. The circle map dynamics in air bubble formation. **Physics Letters A**, v. 287, n. 1-2, p. 74-80, 2001.
- [165] Wieczorek, S.; Simpson, T. B.; Krauskopf, B.; Lenstra, D. Global quantitative predictions of complex laser dynamics. **Physical Review E**, v. 65, n. 1, 045207(R), 2002.

- [166] Rosa, R. R. **Caracterização de fragmentação espaço-temporal de energia e turbulência fraca na coroa solar: um estudo fenomenológico da dinâmica das estruturas finas coronais**. 1996. 180 p. Tese (Doutorado em Ciência Espacial) - Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 1996
- [167] Friaça, A. C. S.; Dal Pino, E.; Sodré Jr., L.; Jatenco-Pereira, V. **Astronomia: uma visão geral do universo**. São Paulo: EdUSP, 2000. 278 p.
- [168] Jánosi, I. M.; Flepp, L.; Tél, T. Exploring transient chaos in an NMR-laser experiment. **Physical Review Letters**, v. 73, n. 4, p. 529-532, 1994.
- [169] Leven, R. W.; Selent, M. Construction and quantitative characterization of a chaotic saddle from a pendulum experiment. **Chaos Solitons Fractals**, v. 4, n. 12, p. 2217-2222, 1994.
- [170] Banerjee, S. Coexisting attractors, chaotic saddles, and fractal basins in a power electronic circuit. **IEEE Transactions on Circuits and Systems**, v. 44, n. 9, p. 847-849, 1997.
- [171] Bak, P. E.; Yoshino, R.; Asakura, N.; Nakano, T. Identification of Unstable Periodic Orbit in Inter-Edge-Localized-Mode Intervals in JT-60U. **Physical Review Letters**, v. 83, n. 7, p. 1339-1342, 1999.
- [172] Degeling, A. W.; Martin, Y. R.; Bak, P. E.; Lister, J. B.; Llobet, V.; Dynamics of edge localized modes in the TCV tokamak. **Plasma Physics and Controlled Fusion**, v. 43, n. 12, p. 1671-1698, 2001.
- [173] Kaneko, K. Supertransients, spatiotemporal intermittency and stability of fully developed spatiotemporal chaos. **Physics Letters A**, v. 149, n. 2, p. 105-112, 1990.
- [174] Dhamala, M.; Lai, Y.-C. Controlling transient chaos in deterministic flows with applications to electrical power systems and ecology. **Physical Review E**, v. 59, n. 2, p. 1646-1655, 1999.

- [175] Woo, M. A.; Stevenson, W. G.; Moser, D. K.; Trelease, R. B.; Harper, R. M. Patterns of beat-to-beat heart-rate-variability in advanced heart-failure. **American Heart Journal**, v. 123, n. 3, p. 704-710, 1992.
- [176] Schiff, S. J.; Jerger, K.; Duong, D. H.; Chang, T.; Spano, M. L.; Ditto, W. L. Controlling chaos in the brain. **Nature**, v. 370, n. 6491, p. 615-620, 1994.
- [177] Quyen, M. L. V.; Martinerie, J.; Adam, C.; Varela, F. J. Unstable periodic orbits in human epileptic activity. **Physical Review E**, v. 56, n. 3, p. 3401-3411, 1997.
- [178] Dobson, I.; Chiang, H. D. Towards a theory of voltage collapse in electric-power systems. **Systems & Control Letters**, v. 13, n. 3, p. 253-262, 1989.
- [179] McCann, K.; Yodzis, P. Nonlinear dynamics and population disappearances. **American Naturalist**, v. 144, n. 5, p. 873-879, 1994.
- [180] Hudson, J. L.; Rössler, O. E.; Killory, H. A 4-variable chaotic chemical-reaction. **Chemical Engineering Communications**, v. 46, n. 1-3, p. 159-166, 1986.
- [181] Edelsbrunner, H. Geometric algorithms. In: Gruber, P.M., Wills, J.M. (ed.). **Handbook of convex geometry A**. Amsterdam: Elsevier, 1993. p. 111-151.
- [182] Rosa, R. R.; Sharma, A. S.; Valdivia, J. A. Characterization of asymmetric fragmentation patterns in spatially extended systems. **International Journal of Modern Physics C**, v. 10, n. 1, p. 147-163, 1999.
- [183] da Silva, A. F.; Rosa, R. R.; Roman, L. S.; Veje, E.; Pepe, I. Characterization of asymmetric fragmentation patterns in SFM images of porous silicon. **Solid State Communications**, v. 113, n. 12, p. 703-708, 2000.
- [184] Ramos, F. M.; Rosa, R. R.; Neto, C. R.; Zanandrea, A. Generalized complex entropic form for gradient pattern analysis of spatio-temporal dynamics. **Physica A**, v. 283, n. 1-2, p. 171-174, 2000.

- [185] Chandrasekhar, S. **Hydrodynamic and hydromagnetic stability**. London: Oxford University Press, 1961. 652 p.
- [186] Pontes, J. **Pattern formation in spatially ramped Rayleigh-Bénard systems**. 1994. 151 p. Tese (Ph.D in Physics) - Université Libre de Bruxelles, Bruxelles, 1994.
- [187] Kaneko, K. Pattern dynamics in spatiotemporal chaos: pattern selection, diffusion of defect and pattern competition intermittency. **Physica D**, v. 34, n. 1-2, p. 1-41, 1989.
- [188] Mayer-Kress, Gottfried; Kaneko, K. Spatiotemporal chaos and noise. **Journal of Statistical Physics**, v. 54, n. 5/6, p. 1489-1508, 1989.
- [189] Lepri, S.; Giacomelli, G.; Politi, A.; Arecchi, F. T. High-dimensional chaos in delayed dynamical systems. **Physica D**, v. 70, n. 3, p. 235-249, 1993.
- [190] Chaté, H. On the analysis of spatiotemporally chaotic data. **Physica D**, v. 86, n. 1-2, p. 238-247, 1995.

## APÊNDICE A

### OPERADORES DE CAMPO GRADIENTE

Considere-se um sistema espacialmente extenso em duas dimensões representado por uma matriz de amplitudes escrita na forma

$$E = \begin{pmatrix} e_{1,1} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & e_{n,m} \end{pmatrix} \quad (\text{A.1})$$

onde  $e_{n,m}$  são os valores para cada elemento de amplitude da matriz  $E$ . Pode-se escrever o campo gradiente de  $E$  como um somatório dos componentes de duas matrizes:

$$\nabla E = \begin{pmatrix} |a_{1,1}| & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & |a_{n,m}| \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \phi_{1,1} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \phi_{n,m} \end{pmatrix} \quad (\text{A.2})$$

onde a primeira matriz contém os valores absolutos de cada vetor do campo gradiente de  $E$  e a segunda contém os valores de seus respectivos ângulos de fase, medidos entre  $\pi$  e  $-\pi$ .

#### A.1 Operador AAF

Dois vetores de  $\nabla E$  são chamados de simétricos se possuem o mesmo módulo e orientações opostas. Assim, dois vetores  $L_i$  e  $L_j$  pertencentes a  $\nabla E$  são simétricos, dentro de uma tolerância  $\varepsilon$ , se  $\|L_i + L_j\| < \varepsilon$ .

O operador AAF (*Asymmetric Amplitude Fragmentation Operator*) atua sobre  $\nabla E$  por meio dos seguintes passos: Primeiramente são removidos todos os pares de

vetores simétricos de  $\nabla E$ , sendo gerado um campo com  $L$  vetores simétricos. No segundo passo os  $L$  vetores são substituídos por  $L$  pontos, localizados no ponto médio de cada vetor. Estes pontos são conectados por uma triangulação de Delaunay [181], com  $I$  arestas. O grau de fragmentação assimétrica de  $\nabla E$  é medido pelo parâmetro  $F_A$  [109,182,183]

$$F_A = \frac{I - L}{L} \quad (\text{A.3})$$

## A.2 Operador CEF

A entropia complexa associada a  $E$  é dada pelo valor do operador CEF (*Complex Entropic Form*), definido por [111,184]

$$S_C(E) = - \sum_{i=1, j=1}^{n, m} \frac{|a_{i,j}|}{\sum |a_{i,j}|} \log \frac{|a_{i,j}|}{\sum |a_{i,j}|} + i \sum_{i=1, j=1}^{n, m} \frac{|a_{i,j}|}{\sum |a_{i,j}|} \phi_{i,j} \quad (\text{A.4})$$

onde  $i = \sqrt{-1}$ .

## A.3 Análise de Padrões Gradientes na Equação Swift-Hohenberg

Como exemplo de análise de campo gradiente sobre padrões espaço-temporais bidimensionais, considere-se o clássico problema de convecção Rayleigh-Bénard, onde um fluido é confinado entre duas chapas horizontais e aquecido por baixo [53,185]. Se a diferença de temperatura entre as chapas inferior e superior for grande o bastante, o fluido em estado uniforme torna-se instável, gerando a ocorrência de movimentos convectivos. O problema de convecção Rayleigh-Bénard pode ser modelado pela equação Swift-Hohenberg (SH) [113]

$$\tau_0 \frac{\partial u}{\partial t} = -D(\nabla^2 + k^2)^2 u + F(u). \quad (\text{A.5})$$

O parâmetro  $\tau_0$  é a escala de tempo característica e  $k$  é o número de onda crítico

$$k = 3.1172, \quad (\text{A.6})$$

que caracteriza os padrões convectivos espacialmente periódicos formados no ponto crítico de transição para o regime convectivo. O parâmetro  $D$  na equação (A.5) é definido por  $D = \xi^2/4k^2$ , onde  $\xi$  é a escala de comprimento característica [4]. O operador  $\nabla^2$  é o Laplaciano em duas dimensões

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \quad (\text{A.7})$$

Para o caso de não-linearidade cúbica tem-se

$$F(u) \equiv \varepsilon u - gu^3. \quad (\text{A.8})$$

onde  $\varepsilon$  é o parâmetro de bifurcação relacionado com o gradiente de temperatura entre as duas chapas e  $g$  é uma constante.

A função real  $u(x, y, t)$  está relacionada com a magnitude média da componente vertical da velocidade normal à chapa.

A equação (A.5) foi resolvida numericamente com um método baseado em diferenças finitas, implementado por Pontes [186]. As condições de contorno usadas são dadas por

$$\mathbf{u} = \partial_n \mathbf{u} = 0 \quad (\text{A.9})$$

em todas as bordas, onde  $n$  é a direção normal à borda. Foi utilizado  $\varepsilon = 0.5$  em uma grade de  $80 \times 80$  pontos, com  $\Delta x = \Delta y = 25/80$ . Os demais parâmetros do sistema foram fixos em  $\tau_0 = 0.0509$ ,  $D = 0.0159$ ,  $g = 1.2900$  e  $k = 3.1172$ . Partindo-se de uma condição inicial aleatória, a Figura A.1(a) mostra o padrão espacial  $u(x, y)$  no instante  $t = 2$ . Neste estágio inicial, a dinâmica espaço-temporal predominante é a formação de estruturas coerentes e o crescimento de sua amplitude. Na Figura A.1(b) é mostrado o campo  $u(x, y)$  para  $t = 240$ , quando a dinâmica espaço-temporal dominante é a variação da fase, ou o deslocamento das estruturas espaciais formadas. Neste regime ocorrem menos variações na amplitude das estruturas.

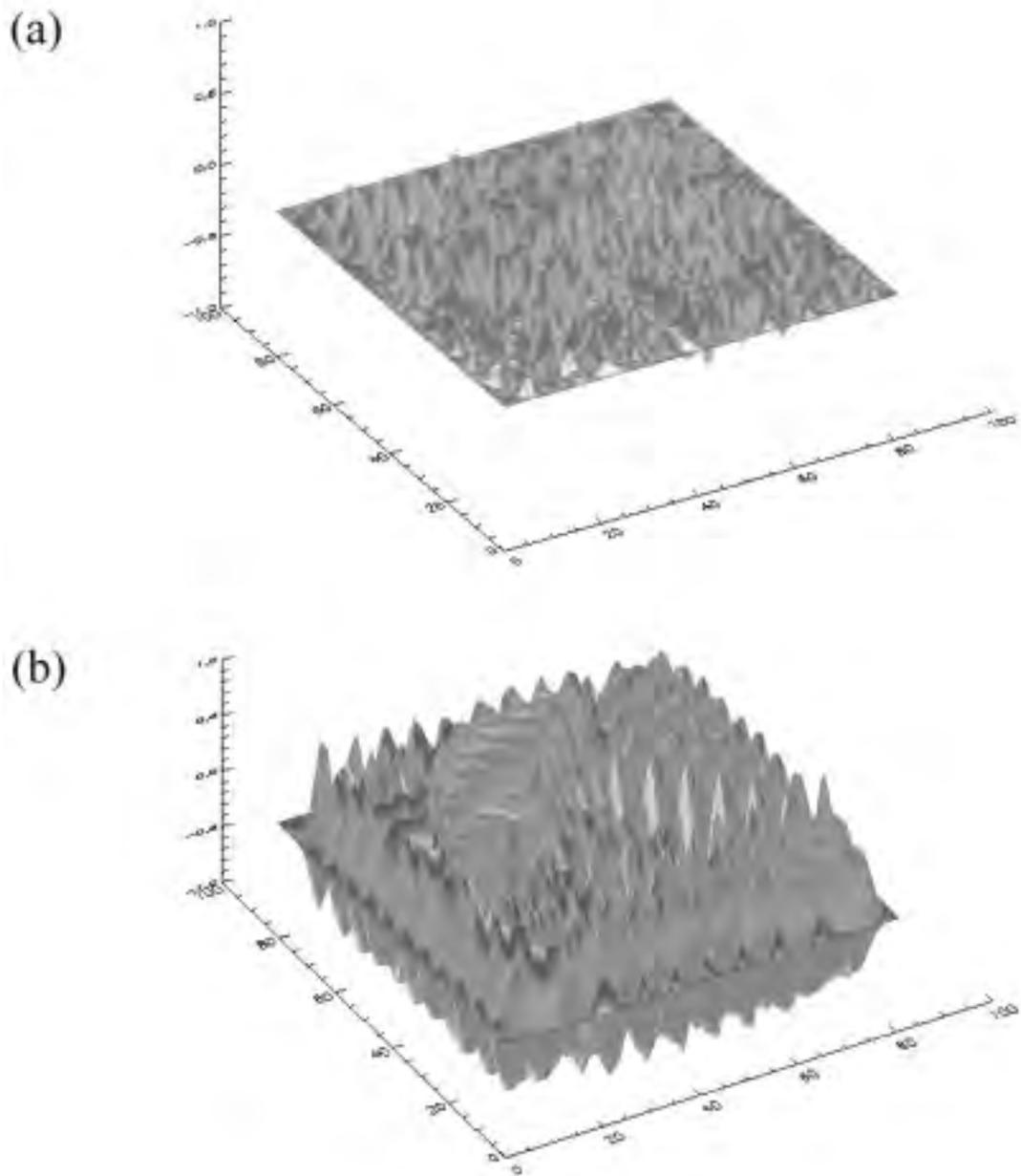


FIGURA A.1 - Dois quadros de uma simulação da equação SH para (a)  $t=2$  e (b)  $t=240$ .

FONTE: [111] (p. 158).

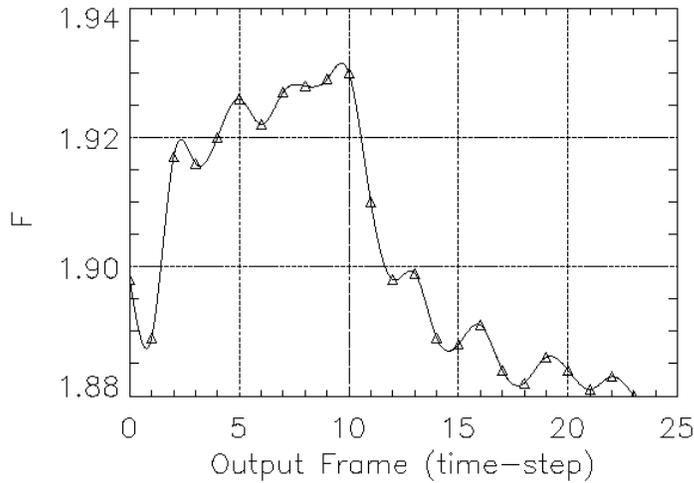


FIGURA A.2 - Evolução de  $F_A$  para um conjunto de 24 quadros representativos de uma simulação da equação SH.

Com o intuito de caracterizar a mudança entre o estágio de predomínio de dinâmica de amplitude para o estágio de dinâmica de fase, os operadores AAF e CEF foram aplicados sobre um conjunto com 24 matrizes representativas da série espaço-temporal. Os resultados da aplicação de AAF e CEF são mostrados nas Figuras A.2 e A.3, respectivamente. Em ambas as figuras pode-se perceber claramente uma mudança brusca de comportamento ocorrendo a partir do quadro 11. Esta mudança representa a transição entre o estágio de dinâmica de amplitude para dinâmica de fase. No caso do operador AAF, antes da transição a derivada média do parâmetro  $F_A$  no tempo ( $DF = \langle dF_A/dt \rangle$ ) é positiva, ao passo que após a transição,  $DF$  é negativa. No caso do operador CEF, a transição caracteriza-se por um aumento brusco na variância de sua fase ( $\text{Im}(S_c)$ ).

#### A.4 Análise de Padrões Gradientes no Modelo Bohr-Rand

A integração numérica de equações diferenciais parciais em geral requer um longo tempo computacional. Algumas vezes as características a serem estudadas estão presentes em modelos mais simples, mais distantes do sistema físico real. Uma

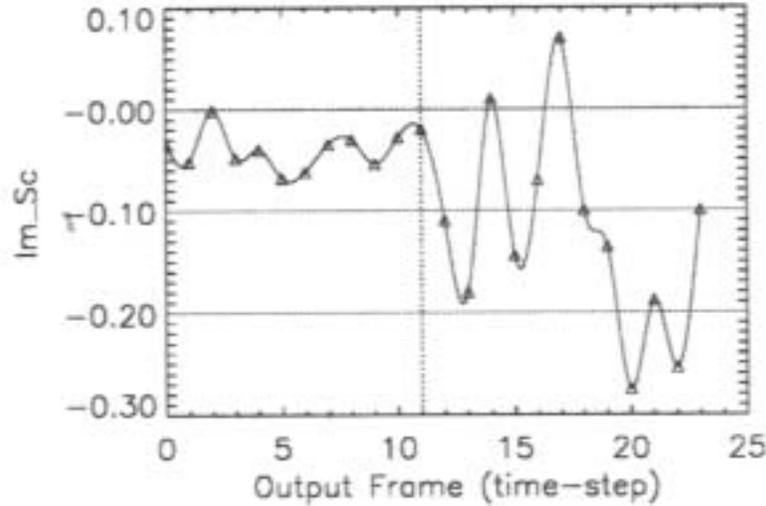


FIGURA A.3 - Evolução da componente fase de CEF ( $\Im(S_c)$ ) para um conjunto de 24 quadros representativos de uma simulação da equação SH. FONTE: [111] (p. 158).

simplificação muito utilizada na análise de sistemas extensos são as redes de mapas acoplados (“coupled map lattices” - CML) [187], que são conjuntos de mapas não-lineares conectados por interações locais ou globais e situados em grades espaciais regulares. Estes sistemas são discretos no tempo e no espaço. Os mapas que estão acoplados podem ser caóticos em si mesmos, portanto, a rede de mapas acoplados não fornece informação sobre a origem de caos espaço-temporal no sistema real. Contudo, muitas características verificáveis em sistemas que apresentam caos espaço-temporal, tais como a caracterização em termos de expoentes de Lyapunov e dimensão de correlação [6,188,189], e intermitência espaço-temporal [190], podem ser observadas nestes modelos simplificados.

Um exemplo de rede de mapas acoplados bidimensional é o mecanismo de geração de turbulência localizada apresentado por Bohr e Rand [6,114]

$$u_{i,j}(n+1) = f(u_{i,j}(n)) - c(f(u_{i,j}(n)) - f(u_{i-1,j}(n))) + \epsilon \Delta f(u_{i,j}(n)) \quad (\text{A.10})$$

onde

$$\begin{aligned} \Delta f(u_{i,j}(n)) = & \frac{1}{4}(f(u_{i+1,j}(n)) + f(u_{i-1,j}(n)) + f(u_{i,j+1}(n)) + \\ & + f(u_{i,j-1}(n)) - 4f(u_{i,j}(n))) \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

e  $f$  é o mapa linear definido por

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 2, & \text{se } -1 \leq x < -1/3 \\ ax, & \text{se } -1/3 \leq x \leq 1/3 \\ 3x - 2, & \text{se } 1/3 < x \leq 1 \end{cases} \quad (\text{A.12})$$

O mecanismo de Bohr e Rand modela o aparecimento súbito de pacotes turbulentos isolados e localizados em um fluido em um escoamento aberto. Estes pacotes se deslocam com o fluido de maneira que suas partes frontal e traseira possuem velocidades diferentes mas bem definidas, ocasionando um crescimento regular. O estado local pode retornar a uma forma laminar de maneira a manter o pacote espacialmente localizado. O coeficiente  $c$  na equação (A.10) é análogo à velocidade média do fluido. A Figura A.4 mostra três quadros da evolução espaço-temporal de uma pequena perturbação inicial ( $10^{-6}$ ) aplicada no ponto central da fronteira esquerda da grade. Os demais pontos da grade são inicializados com 0. A perturbação cresce à medida em que se desloca para a direita, até atingir um ponto em que o comportamento torna-se aparentemente caótico, após o qual a amplitude média dos picos do pacote instável se satura e o pacote continua sendo deslocado para a direita enquanto cresce em extensão. Foram usados  $\epsilon = 0.1$ ,  $c = 0.6$  e  $a = 1.1$  e condições de contorno rígidas. Uma forma de se estudar este sistema é aplicando os operadores de campo gradiente sobre uma matriz de tamanho fixo definida em torno da perturbação inicial e movendo a matriz a cada iteração com velocidade equivalente a  $c$ . Um exemplo é dado na Figura A.5, que mostra um quadrado em torno das curvas de contorno do pacote instável para quatro instantes de tempo. A Figura A.6 mostra a evolução temporal do parâmetro  $F_A$  para esta série de matrizes, revelando um

aumento de fragmentação assimétrica à medida em que o pacote instável aumenta de tamanho. Uma possível aplicação da análise de padrões gradientes no modelo de Bohr-Rand é a caracterização de turbulência localizada por meio do espectro de fragmentação, introduzido em Rosa et al. [109] para o estudo de imagens da região ativa solar. Com isto, pode-se averiguar a conjectura de que a origem da turbulência observada nas regiões ativas solares é um processo de turbulência fraca localizada.

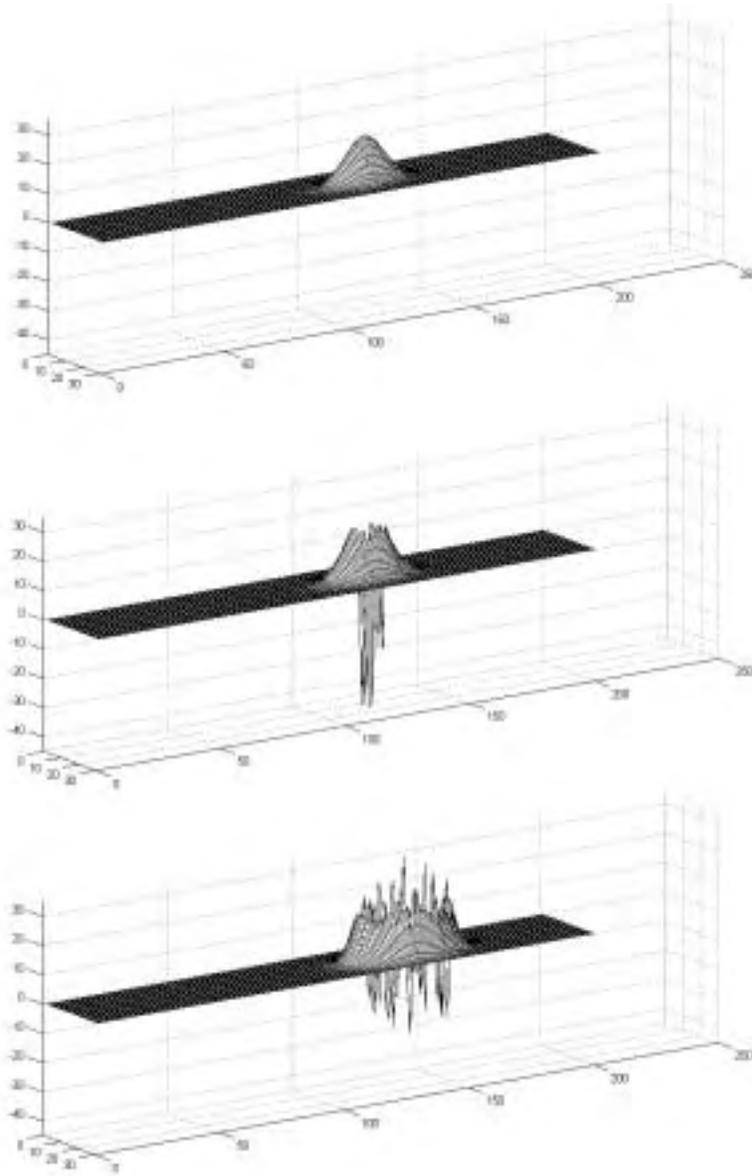


FIGURA A.4 - Evolução espaço-temporal de uma perturbação aplicada no modelo de Bohr-Rand com  $\epsilon = 0.1$ ,  $c = 0.6$  e  $a = 1.1$ .

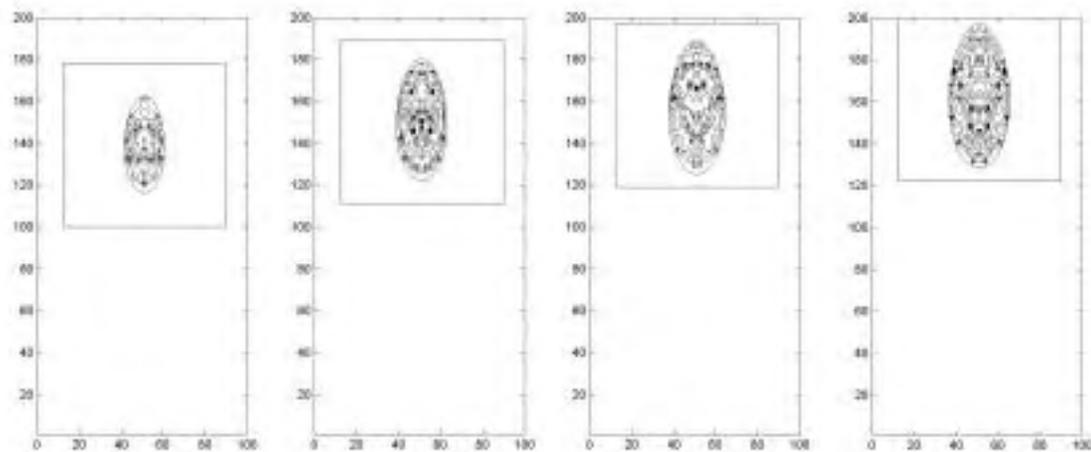


FIGURA A.5 - Curvas de contorno do pacote instável para quatro instantes de tempo. O quadrado se desloca com a “velocidade do fluido”, e é usado para extrair a região de interesse.

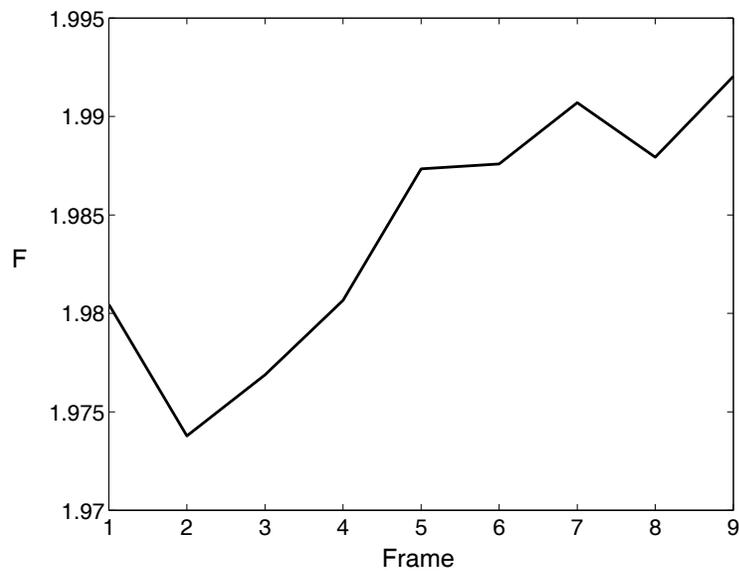


FIGURA A.6 - Evolução temporal do parâmetro  $F_A$  para o modelo de Bohr-Rand, revelando um aumento de fragmentação assimétrica à medida em que o pacote instável aumenta de tamanho.